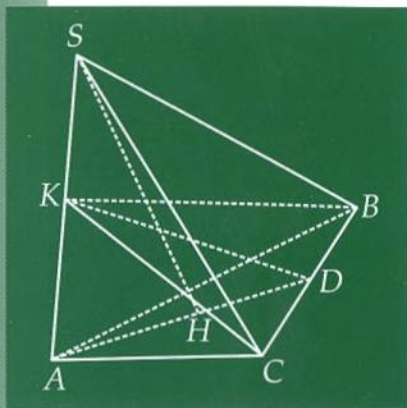




В. В. Ткачук

МАТЕМАТИКА АБИТУРИЕНТУ

В. В. Ткачук

МАТЕМАТИКА — АБИТУРИЕНТУ

Все о вступительных экзаменах в вузы

Издание восемнадцатое, стереотипное

Москва

Издательство МЦНМО, 2018

УДК 51(07)

ББК 22.1

Т 48

Ткачук В. В.

Т 48 Математика — абитуриенту. — 18-е изд., стереотип. — М.:

МЦНМО, 2018. — 944 с.

ISBN 978-5-4439-2675-9

Книга представляет собой наиболее полный курс элементарной математики для подготовки к ЕГЭ и вступительным экзаменам в вуз любого уровня сложности. Излагаются уникальные алгоритмы самоподготовки, успешно апробированные при подготовке к поступлению в ведущие вузы страны.

Отдельная глава посвящена вариантам вступительных экзаменов по математике на все факультеты МГУ им. М. В. Ломоносова за последние 40 с лишним лет (1970–2016).

Книга позволяет самостоятельно, предельно эффективно и в сжатые сроки повторить школьный курс математики. Особую ценность книга представляет для абитуриентов из отдаленных регионов страны, но она будет также полезна учащимся старших классов, учителям математики, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

В настоящее издание включены написанные А. В. Семеновым методические рекомендации по подготовке к ЕГЭ с использованием данной книги.

Учебно-методическое издание

Владимир Владимирович Ткачук

Математика — абитуриенту

Подписано в печать 07.12.2017 г. Формат 60×84/16. Бумага офсетная № 1.

Печать офсетная. Печ. л. 59. Тираж 3000 экз. Заказ № ВЗК-06104-17.

Издательство Московского центра

непрерывного математического образования.

119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных материалов в АО «Первая Образцовая типография», филиал «Дом печати — ВЯТКА» 610033, г. Киров, ул. Московская, 122.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине

«Математическая книга», Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.

Тел. (495) 745-80-31. E-mail: biblio@mccme.ru



ISBN 978-5-4439-2675-9

© Ткачук В. В., 2017

© МЦНМО, 2018

Содержание

Как готовиться к экзамену по математике по книге «Математика — абитуриенту». <i>А. В. Семенов</i>	8
Предисловие к пятому изданию	16
Введение	19
Об этой книге	19
1. Зачем нужен экзамен по математике?	21
2. Виды и уровни сложности экзаменов	23
3. Устройство сего опуса и инструкция по его применению	24
Слова благодарности	29

I. Справочник

1. Шпаргалки	33
1. Тригонометрия	33
2. Уравнения и неравенства с модулями и радикалами	37
3. Алгебраические системы уравнений и неравенств	39
4. Текстовые задачи	40
5. Прогрессии	43
6. Показательные, логарифмические и смешанные уравнения и неравенства	44
7. Производная и ее применения	48
9. Теоремы об общих и прямоугольных треугольниках	53
10. Подобие, площади, параллелограммы	54
11. Окружности и общие многоугольники	57
12. Геометрические места точек и задачи на построение	58
13. Свойства и расположение корней квадратного трехчлена	60
14. Реализация простейших логических операций	64
15. Нестандартные задачи	65
16. Основные формулы стереометрии	66
17. Векторы	68
2. Некоторые доказательства	71
1. Формула корней квадратного уравнения	71
2. Тригонометрические формулы	72

3. Метод интервалов	75
4. Простейшие случаи раскрытия радикалов	76
5. Прогрессии	78
6. Переход от показательных и логарифмических уравнений к алгебраическим	79
7. Общие теоремы о треугольниках	82
3. То, чего нет в школьной программе, а знать надо	84
1. Сравнение чисел	84
2. Извлечение квадратного корня «вручную»	86
3. График дробно-линейной функции	88
4. Деление «уголком» многочлена на многочлен	89
5. Метод неопределенных коэффициентов	91
6. Теоремы Чебы и Менелая	93
 II. Подготовка к экзамену	
1. Тригонометрия	99
Урок 1. Сведение к квадратным уравнениям	99
Урок 2. Группировка и разложение на множители	109
Урок 3. Сведение к однородным уравнениям	115
Урок 4. Преобразование сумм в произведения и произведений в суммы	121
Урок 5. Метод вспомогательного аргумента	127
Урок 6. Системы тригонометрических уравнений	132
Урок 7. Обратные тригонометрические функции	142
 2. Простейшие уравнения и неравенства	148
Урок 8. Уравнения и неравенства с модулями	148
Урок 9. Рациональные уравнения и неравенства	153
Урок 10. Уравнения и неравенства с радикалами	158
 3. Алгебраические системы	165
Урок 11. Системы уравнений и неравенств, возникающие из текстовых задач	165
Урок 12. Сложные системы уравнений	171
 4. Текстовые задачи	178
Урок 13. Движение	178
Урок 14. Работа	189
Урок 15. Смеси	199
Урок 16. Оптимальный выбор и целые числа	207
Урок 17. Прогрессии	215

5. Более сложные уравнения и неравенства	221
Урок 18. Показательные	221
Урок 19. Логарифмические	226
Урок 20. Смешанная тригонометрия	235
Урок 21. Задачи, содержащие одновременно логарифмы, модули, радикалы и т.п.	243
6. Начала анализа	249
Урок 22. Вычисление производной	249
Урок 23. Применения производной	254
Урок 24. Касательная	261
Урок 25. Плоские множества	266
7. Планиметрия	276
Урок 26. Общие треугольники	276
Урок 27. Прямоугольные треугольники	286
Урок 28. Подобие	291
Урок 29. Площади	302
Урок 30. Параллелограммы и трапеции	312
Урок 31. Окружности	325
Урок 32. Общие ≥ 4 -угольники	334
Урок 33. Геометрические места точек	343
Урок 34. Построения циркулем и линейкой	354
8. Задачи с параметрами	367
Урок 35. Квадратные уравнения и неравенства	367
Урок 36. Расположение корней квадратного трехчлена в зависимости от параметра	375
Урок 37. Логические задачи. Необходимость и достаточность	383
Урок 38. Более сложные логические задачи	397
9. Нестандартные задачи	410
Урок 39. Метод мажорант	411
Урок 40. Использование различных свойств функций	418
Урок 41. Удачная подстановка или группировка	427
Урок 42. Геометрический подход	436
10. Стереометрия	444
Урок 43. Тривиальные задачи	447
Урок 44. Вспомогательные задачи	459
Урок 45. Тетраэдры	468
Урок 46. Параллелепипеды и призмы	484
Урок 47. Более сложные многогранники	496
Урок 48. Сферы, цилиндры, конусы	513
Урок 49. Векторы	530
Урок 50. Геометрические места точек	539

III. Варианты вступительных экзаменов в МГУ за 1970–2016 гг.

1970 год	552
1971 год	559
1972 год	566
1973 год	572
1974 год	579
1975 год	587
1976 год	595
1977 год	602
1978 год	610
1979 год	617
1980 год	623
1981 год	628
1982 год	635
1983 год	641
1984 год	648
1985 год	655
1986 год	661
1987 год	668
1988 год	674
1989 год	680
1990 год	685
1991 год	691
1992 год	696
1993 год	702
1994 год	707
1995 год	712
1996 год	718
1997 год	725
1998 год	732
1999 год	740
2000 год	748
2001 год	757
2002 год	767
2003 год	777
2004 год	787
2005 год	798
2006 год	808
2007 год	820
2008 год	833
2009 год	838
2010 год	843
2011 год	849
2012 год	851
2013 год	853
2014 год	855
2015 год	857
2016 год	858

Ответы, указания, решения

1. Домашние задания	861
2. Ответы к вариантам за 1970–2016 годы	895

Список использованной литературы	939
---	------------

Как готовиться к экзамену по математике по книге «Математика — абитуриенту»

А. В. Семенов

Залог успешной сдачи ЕГЭ, особенно на уровне, необходимом для поступления в вуз, независимо от того, является ли этот вуз техническим, экономическим или мехматом МГУ, — это систематическое изучение и повторение программы, развитие математического мышления, отработка умений находить пути решения задачи, верно выполнять преобразования, вычисления, искать и исправлять свои ошибки.

И книга, которую вы держите в руках, — как раз то, что нужно, чтобы систематически повторить (а при необходимости и изучить) методы решения наиболее сложных задач профильного уровня Единого государственного экзамена. Ведь именно эти задачи ЕГЭ по математике необходимы для отбора абитуриентов в вузы. Они похожи на те, что давались на вступительных экзаменах в вузы разного уровня.

Планируя сдавать экзамен по математике, вы должны определить для себя — с какой целью сдаете этот экзамен? Цели могут быть разными:

- просто сдать экзамен по математике (получить аттестат) и больше математики не касаться — тогда эта книга не для вас;
- сдать экзамен и поступить в вуз — тогда вы нашли, что искали. Еще ценнее книга окажется для тех, кто планирует поступать в вуз, в котором есть свои внутренние экзамены по математике.

«Математика — абитуриенту» — это та книга, которая поможет одновременно готовиться и к ЕГЭ, и к внутреннему вузовскому экзамену (если вуз его проводит). В книге нет заданий из вариантов ЕГЭ прошлых лет, заданий из открытого банка математических задач, в ней содержатся именно те задания, которые традиционно давались на вступительных экзаменах. Поэтому подготовка к экзамену по этой книге позволит качественно повторить (изучить) материал, необходимый для выполнения заданий высокого уровня сложности, обязательно присутствующих в вариантах Единого государственного экзамена по математике профильного уровня.

Ценность этой книги заключается в том, что в ней приведена система обучения решению задач высокого уровня. Этой системе подготовки абитуриентов уже более 20 лет.

Вариант Единого государственного экзамена по математике (профильный уровень) состоит из 19 задач. Вначале идут 12 задач с кратким ответом. Основной акцент в этих задачах сделан на проверку основных математических навыков (в первую очередь на умение решать практические задачи, применять математические знания). Далее идут 7 заданий повышенного и высокого уровня сложности.

Задачи 1–12, приведенные ниже, могут показаться вам слишком простыми. Конечно, если вы читаете эту книгу, наверное, вы уверены в том, что они вам по плечу. Тем не менее мы убедительно просим вас обратить на них внимание. Посмотрите советы, написанные перед заданиями, и обязательно проводите регулярные тренировки по решению задач 1–12 с использованием тренировочных работ, которые публикуются на сайте mathege.ru, и книг издательства МЦНМО серии «ЕГЭ 2017. Математика. Задачи 1–12. Профильный уровень». Это позволит вам застраховаться от случайной ошибки.

Рекомендации по решению задач 1–12

Ответ к первым 12 задачам нужно записать в краткой форме: целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Ответы к этим задачам нужно записать в специальный бланк ответов №1. Для того чтобы получить ответ, нужно на черновике кратко (но понятно для себя) изложить ключевые этапы решения (черновики не проверяются). Не спешите вписывать ответы в бланк ответов: на черновике напишите номер задания и номер ответа, например, «задача 3: 2» (не ставьте тире — иначе можно прочитать его как знак «минус»). После того как закончите работать с заданиями 1–12, аккуратно занесите ответы в бланк ответов №1. Если вы «промахнулись», то под таблицей есть поле замены

ошибочных ответов, в котором вносится номер задания и записывается ответ.

Прежде чем приступать к пробе своих сил в решении задач 1–12, внимательно прочитайте следующие советы (они пригодятся и в других случаях).

1. В задачах 1–12 ответ довольно часто можно проверить подстановкой — если есть такая возможность, обязательно сделайте это.

2. Решать задачи имеет смысл по порядку. Если задача для вас трудна, то пропустите ее и переходите к решению следующей. Не вписывайте придуманные ответы, лучше оставьте пустые места.

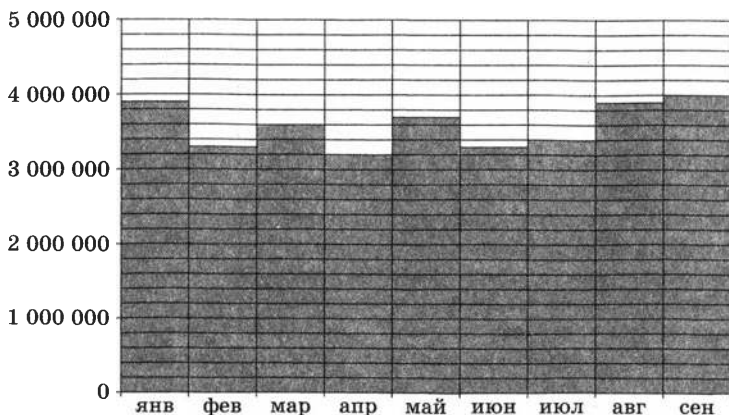
3. После того как были просмотрены (и частично решены) все задачи 1–12, вернитесь к началу заданий и поработайте с задачами, которые не получились с первой попытки.

Помните, что на весь экзамен отводится без малого 4 часа — 235 минут.

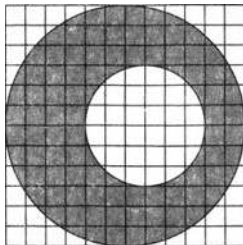
Давайте посмотрим теперь на образцы задач.

1. Школа закупает книги по цене 70 рублей за штуку. При покупке на сумму больше 500 рублей магазин дает скидку 10 %. Сколько рублей будет стоить покупка 23 книг?

2. На диаграмме показано число запросов со словом КИНО, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме наибольшее месячное число запросов со словом КИНО в указанный период.



3. На клетчатой бумаге нарисовано два круга. Площадь внутреннего круга равна 1. Найдите площадь закрашенной фигуры.

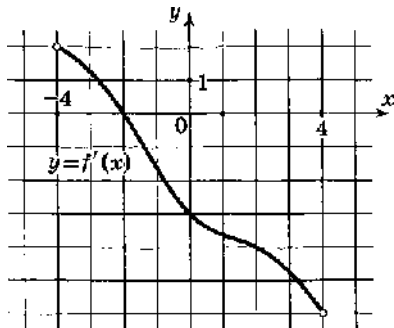


4. В классе 7 мальчиков и 14 девочек. 1 сентября случайным образом определяют двух дежурных на 2 сентября, которые должны приготовить класс к занятиям. Найдите вероятность того, что будут дежурить два мальчика.

5. Решите уравнение $\sqrt{x+4} = 7$.

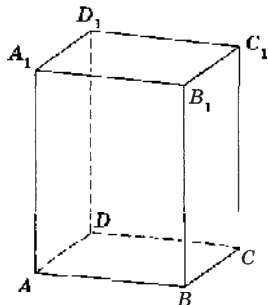
6. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, делит прямой угол на два угла, один из которых равен 56° . Найдите меньший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах.

7. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4; 4)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -3x - 11$ или совпадает с ней.



8. Дана правильная четырехугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 7. Найдите объем мно-

гогранника, вершинами которого являются точки $A, B, C, A_1, B_1, C_1, D, D_1$.



9. Найдите значение выражения $\log_6 126 - \log_6 3,5$.

10. Груз массой 0,4 кг колеблется на пружине. Его скорость v (в м/с) меняется по закону $v = v_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала наблюдения в секундах, $T = 2$ с — период колебаний, $v_0 = 0,5$ м/с. Кинетическая энергия E (в Дж) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза (в кг), v — скорость груза (в м/с). Найдите кинетическую энергию груза через 60 секунд после начала наблюдения. Ответ дайте в джоулях.

11. Первая труба наполняет бак объемом 600 литров, а вторая труба — бак объемом 900 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 3 л воды больше, чем другая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = (x - 2)^2(x - 4) + 5$ на отрезке $[1; 3]$.

Проверьте ответы. Если вы ошиблись в решении какого-либо задания, постарайтесь ошибку устранить.

Ответы: 1. 1449. 2. 4000000. 3. 3. 4. 0,1. 5. 45. 6. 34. 7. 0. 8. 14. 9. 2. 10. 0,05. 11. 9. 12. 5.

Если эти задачи вызвали у вас затруднения, то решите для себя, готовы ли вы приложить значительные усилия для обучения решению сложных задач.

Прежде чем приступить к подготовке к решению задач 13–19, вам следует определить уровень, на котором вы будете работать с книгой:

– если вам нужен балл 65–70 — средний уровень, то нужно получить 13–14 первичных баллов, т.е., например, решить все задания 1–12 и задание 13;

– если вам нужен балл 71–76 — повышенный уровень (хорошие технические вузы), то нужно получить от 15 до 17 первичных баллов, т.е. решить не менее двух-трех из задач 13–19;

— если вам нужен балл 77 и выше — высокий уровень (вузы с математическим профилем), то нужно решить не менее четырех из задач 13–19. Эти три уровня соответствуют уровням сложности, данным автором на с. 25–26 этой книги. Если вы сравнительно легко справились с задачами 1–12 и определились с уровнем, то можно приступать к следующим, более сложным задачам.

Рекомендации по решению задач 13–19

Из этих семи задач задачи 13–17 повышенного уровня сложности, 18 и 19 высокого уровня сложности. При выполнении этих заданий требуется записать полное решение в бланке ответов №2 (выдается в экзаменационном пакете); по требованию экзаменуемого выдается любое число дополнительных. В бланках не следует писать очень подробно, например, решение квадратного уравнения и т.п., поэтому нужно сначала на черновике полностью оформить решение, а затем короче переписать на чистовик. Другими словами, по записи решения должна полностью восстанавливаться логика решения, а все ключевые моменты должны быть пояснены — только в этом случае за решение будут выставлены максимальные баллы.

Объясним вкратце, с чем вы столкнетесь в этих задачах.

Задача 13 — самая простая из этих семи. Это несложное уравнение, для решения которого единственное, что требуется, — хорошо знать простейшие свойства тригонометрических (логарифмических, показательных — уж что достанется) функций и уметь решать простейшие уравнения. Не забудьте про ОДЗ. См. уроки 1, 18, 19.

Следующая по трудности задача 14 — несложная задача по стереометрии, состоящая из двух пунктов: в пункте а) нужно доказать геометрический факт, а в пункте б) нужно что-нибудь вычислить (например, расстояние от точки до плоскости сечения). В ней нет хитрых комбинаций различных тел, и для ее решения не требуется утомительных вычислений. Все, что необходимо, — хорошо знать основные факты о параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей, включая теорему о трех перпендикулярах, и — главное! — хорошо представлять себе, где эти параллельные и перпендикулярные прямые и плоскости встречаются на популярных в школе геометрических фигурах — призмах, пирамидах, параллелепипедах. Для успешного решения этой задачи нужно тщательно проработать урок 43. Хотя автор назвал его «тривиальные задачи», не такие они и тривиальные: кто хорошо ориентируется в этих задачах, тот уже неплохо знает стереометрию.

Задача 15 — неравенство с показательными и логарифмическими функциями. Уравнения и неравенства такого уровня рассматриваются на уроках

с 18 по 21.

Задача 16 — задача по планиметрии, состоящая из двух пунктов: в пункте а) нужно доказать геометрический факт, а в пункте б) нужно что-нибудь вычислить (скажем, площадь фигуры). Она не чересчур трудна для того, кто в планиметрии хорошо ориентируется. Уроки 26–32 для подготовки к решению этой задачи абсолютно необходимы, уроки 33 и 34 нужны для создания «запаса прочности».

Задача 17 — прикладная задача с элементами экономики. Для подготовки к ней надо повторить текстовые задачи (уроки 13–17) и просмотреть задачи из вступительных экзаменов на экономический факультет МГУ.

Задачи 18 и 19 самые трудные. Задача 18 — «задача с параметром» (непосредственно им посвящены уроки 35–42, но они опираются на весь предшествующий материал), задача 19 — «нестандартная задача».

Прежде чем пробовать свои силы в решении задач 13–19, внимательно прочитайте следующие советы.

1. После выполнения заданий 1–12 сделайте перерыв в 3–5 минут, постарайтесь настроиться на спокойную и вдумчивую работу.

2. Имейте в виду, что задачи 13–19 нередко имеют «подводные камни».

3. Не забывайте о краткости записи решения при полном обосновании.

4. Пользоваться на экзамене калькулятором запрещено, поэтому уделите особое внимание проверке выполнения арифметических действий.

Вот образцы того, что может вам встретиться.

13. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x + 6 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14. Ребро AD пирамиды $DABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC . Известны длины ребер пирамиды $AD = 2\sqrt{5}$, $AB = AC = 10$, $BC = 4\sqrt{5}$.

а) Докажите, что основания высот треугольников ABC и DBC , проведенных к стороне BC , совпадают.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости, проходящей через середины ребер AB , AC и AD .

15. Решите неравенство $\log_{|x|}^2 x^2 + \log_2 x^2 \leq 6$.

16. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются в точке A внешним образом. Прямая, проходящая через точку A , вторично пересекает первую окружность в точке B , а вторую — в точке C .

а) Докажите, что $O_2C \parallel O_1B$.

б) Найдите площадь треугольника BCO_2 , если известно, что радиусы первой и второй окружностей равны 5 и 8 соответственно, а $\angle ABO_1 = 15^\circ$.

17. 31 декабря 2013 года Ваня взял в банке 9 009 000 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20 %), затем Ваня переводит в банк платеж. Весь долг Ваня выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ принимает наибольшее значение.

19. В некотором царстве было несколько (более двух) княжеств. Однажды некоторые из этих княжеств объявили себя царствами и разделились каждое на то же самое число княжеств, которое было в самом начале. Затем все новые и новые княжества из числа прежних и вновь образующихся объявляли себя царствами и делились каждое на то же самое число княжеств, которое было в самом начале.

а) Могло ли сразу после одного из делений общее число княжеств стать равным 102?

б) Могло ли в какой-то момент времени общее число княжеств стать равным 320, если известно, что сразу после одного из делений общее число княжеств было равно 162?

в) Сколько княжеств было в самом начале, если сразу после какого-то из делений общее число княжеств стало ровно в 38 раз больше первоначального?

Ответы: **13.** а) $-\arctg 2 + \pi n$, $-\arctg 3 + \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\pi - \arctg 2$, $-\pi - \arctg 3$. **14.** б) **2.** **15.** $[-2; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 2]$. **16.** б) **26.** **17.** 1 036 800. **18.** $a = 2$. **19.** а) Нет; б) нет; в) 38.

После выполнения этих заданий вы почувствуете, что нужно еще потренироваться в решении сложных задач. Перед вами целый сборник интересных задач. После проработки уроков обязательно вернитесь к задачам, которые у вас не вышли.

Успешность выполнения заданий работы на экзамене обусловлена не только хорошими знаниями по предмету, но и правильной подготовкой к этому испытанию. Чем больше вы смоделируете и проиграете реальных экзаменационных ситуаций, тем спокойней и уверенней вы будете себя чувствовать. Эта уверенность позволит вам наилучшим способом продемонстрировать свои знания, тем самым выше будут баллы. Надеемся, что наши рекомендации помогут вам в подготовке к экзамену по математике.

Предисловие к пятому изданию

Первое слово в этой книге было написано 1 января 1992 года. Месяца через четыре после начала работы автор с ужасом осознал, что:

- теперь-то он прекрасно понимает, почему все мало-мальски претендующие на универсальность книги подобного типа писались таким количеством авторов, которое могло бы составить футбольную команду;

- его замыслы написать всеохватывающий труд по тематике вступительных экзаменов если и осуществимы в одиночку, то исполнятся не раньше конца XXI века;

- начальство совершенно не собирается уменьшать нагрузку (педагогическую, научную и административную), положенную ему на мех-мате МГУ;

- семья и дети почему-то требуют гораздо больше внимания именно тогда, когда времени категорически нет ни на что!

Честно говоря, даже сейчас, проглядывая и перелистывая мое творение, не могу ни понять, ни объяснить, как случилось, что 31 октября 1992 года я поставил в нем последнюю точку. Да, в этот период я провел гораздо больше ночей с компьютером, чем с женой. Да, желание бросить все и застрелиться возникало у меня чаще, чем за всю предыдущую и последующую жизнь. Да, я научился печатать на компьютере как профессиональная машинистка. И все же до сих пор верится с трудом...

Но факт есть факт. Это дитя у меня родилось всего лишь после десяти месяцев вынашивания, и, как и положено любому ребенку, начало свою самостоятельную жизнь, которая порой не имеет ничего общего с тем, что воображает про нее родитель.

Видимо, время с ноября 1992 года по июль 1993 можно назвать грудным периодом моего дитяти. Кормление грудью заключалось в том, что я (грудью!) пробивался в кабинеты всевозможных издателей и влиятельных лиц и пытался убедить их в том, что мой отпрыск способен вырасти и принести пользу российскому обществу в целом, абитуриентам и издателям в частности.

Все эти усилия, увы, закончились полным провалом. Я успел примириться с мыслью, что мое дитя придется причислить к статистике умерших в грудном возрасте, а меня записать в стройные ряды неудачников и графоманов.

Конец сего горестного периода наступил, когда мне подвернулась возможность устроиться на работу в одном из крупнейших университетов Мексики. Я написал соответствующее заявление, меня взяли, и вот уже скоро пять лет как я тружусь в этой солнечной и гостеприимной стране.

Работы много, но мне нравится. Главным образом потому, что в математических заведениях Мексики крайне поощряются занятия наукой и совершенно отсутствуют стимулы для занятий репетиторством, извозом или бизнесом.

Новые впечатления, лихорадочное изучение испанского языка и приобщение к мексиканским традициям уже притупили невыносимую боль за бесцельно прожитые десять месяцев, когда я узнал в начале 1994 года, что нашлась, наконец, небольшая частная компания, которая решила рискнуть своими деньгами, вложив их в издание этой книги. И свершилось! Начиная с мая 1994 года мое дитя живет и здравствует, растет и даже вызывает иногда полемику в прессе. Как и всякого нормального ребенка, его то хвалят, то ругают. Ругают, естественно, больше, ибо тот, кто доволен им, обычно просто молчит. О содержании хвалебных отзывов я по природной скромности умолчу, а ругают меня за то,

— что я незаслуженно и предательски очернил приемные комиссии вообще и МГУ в частности;

— что я проявил редкостное невежество, причислив единицу к простым числам;

— что допустил массу неточностей и опечаток в ответах к задачам;

— что кривил душой, заявляя, что абитуриент может работать с книгой без репетитора,

и что вообще еврейский вопрос надо выкинуть и взять в соавторы десяток влиятельных лиц — вот тогда-то все в книге будет идеально.

Я не буду здесь отвечать на жалобы: я уже столько раз это делал устно, что мне порядком надоело. Впрочем, и невозможно переубедить тех, кто хочет верить во что-то для себя важное. Скажу только, что меня радует такое большое количество читателей, равнодушных к моему опусу. Это, на мой взгляд, есть самое лучшее доказательство его полезности. У меня есть также засекреченная информация о том, что как раз те, кто громче всех кричат: «Ату!», заплатили свои кровные, чтобы пользоваться им вовсе.

Прежде, чем высказать какое-либо напутствие читателю пятого издания, я просто обязан объяснить ему, что в 1992 году все математики, связанные с приемом в ВУЗы, и в страшном сне не могли себе представить, что этот прием может претерпеть существенные изменения за считанные годы. Ведь до этого ничто не менялось как минимум тридцать лет! Именно это обстоятельство и породило во мне амбициозное желание написать нечто всеохватывающее и универсальное. На мой (прирожденно скромный!) взгляд, это удалось. Но кто же мог подумать, что, начиная с 1991 года, мое родное государство приобретет бешеную динамичность не только в политике и экономике, но и во всем остальном, включая приемные экзаме-

ны. Факты — упрямая вещь, и, как ни тяжело мне в этом признаться, я вынужден констатировать, что моя книга уже не может претендовать на универсальность. В ней, к примеру, нет описания тестов и методов подготовки к ним. Вполне возможно, что многие советы по тактике поведения на экзаменах и апелляциях сейчас имеют лишь историческое значение. Я слышал, что вопрос об экзаменах «с пристрастием» пока не снят с повестки дня, но мои советы и рекомендации по этому поводу явно устарели.

Увы, я не в состоянии идти в ногу со временем и модернизировать книгу для каждого нового издания. Чтобы делать это квалифицированно, надо все время вариться в сием котле, а я уже пять лет живу в другом полушарии и занимаюсь совершенно иными вещами. Поэтому, в общем и целом, книга остается такой же, как и была. Упомяну некоторые причины, по которым она может быть полезна большинству российских (а также бывших советских) абитуриентов, школьников, учителей и репетиторов:

- в ней подробно и доступно представлена вся «школьная» математика;
- методика изложения порождена преподавательской практикой многих десятилетий и посему близка к оптимальной;
- в ней более 2000 задач и упражнений на всевозможные темы;
- даны проверенные алгоритмы подготовки к устному и письменным экзаменам;
- есть краткий справочник по наиболее важным темам.

И, наконец, самое важное. Мой земной поклон и вечная благодарность руководству и сотрудникам Издательства Московского Центра непрерывного математического образования (МЦНМО)

- за взятый на себя риск по вложению сил и средств в издание «Математики — Абитуриенту»;
- за исправление более 200 неточностей и опечаток.
- за пополнение списка вариантов вступительных экзаменов в МГУ.

25 ноября 1997 года, Мехико

Владимир В. Ткачук

Введение*

Об этой книге

Мало для кого является секретом, что подавляющее большинство средних школ бывшего Советского Союза не способны обучать детей математике так, чтобы те, даже обладая природными способностями к точным наукам, получали положительные оценки на вступительных экзаменах в вузы, не говоря уж о четверках и пятерках. Абитуриенты, прошедшие это испытание, как правило, занимались дополнительно — либо сами, либо с репетитором. Последний вариант, безусловно, является самым выгодным для абитуриента. Единственный недостаток его — та сумма, которую надо выложить за обучение в течение года. И тот факт, что она на порядок меньше, чем взятка, которую пришлось бы дать за поступление (где такая возможность есть!), мало утешает. Это все равно очень дорого, ибо составляет примерно минимальную годовую зарплату. И хотя многие родители загодя копят деньги на подготовку детей, часто им приходится отказаться от услуг репетиторов из-за дороговизны.

В этом случае школьник должен готовиться сам. Он знает, что нужно что-то изучать дополнительно. Но что? Если он живет в Москве, Санкт-Петербурге или другом крупном городе, он может там же выбрать вуз и ходить туда на подготовительные курсы по вечерам. Это лучше, чем ничего, хотя может дать лишь общее направление занятий. Всю работу придется сделать практически без квалифицированного контроля, а это значит, что по некоторым темам возможны провалы, о которых абитуриент ничего знать не будет. Если же школьник хочет поступать в вуз в другом городе — последний шанс получить помощь для него состоит в поступлении на заочные курсы данного вуза. Ясно, что это еще хуже, чем вечерние занятия. Кроме того, мало какие вузы имеют заочные курсы. Итак, человек остается один на один со своей проблемой.

Еще есть книги для поступающих. К лучшим из них можно отнести следующие:

Б.И. Александров, В.М. Максимов, М.В. Лурье, А.В. Колесниченко. *Пособие по математике для поступающих в вузы.*

* В этом разделе описана ситуация до введения ЕГЭ. — Прим. ред.

Г.В. Дорофеев, М.К. Потапов, Н.Х. Розов. *Пособие по математике для поступающих в вузы.*

Н.К. Егерев, В.В. Зайцев, Б.А. Кордемский, Т.Н. Маслова, И.Ф. Орловская, Р.И. Позойский, Г.С. Ряховская, Н.М. Федорова — под общей редакцией М.И. Сканави. *Сборник задач по математике для поступающих во втузы.*

Ю.В. Нестеренко, С.Н. Олехник, М.К. Потапов. *Задачи вступительных экзаменов по математике.*

Теоретически, по этим четырем книгам можно подготовиться в любой вуз. Для этого школьнику требуется сущий «пустяк»:

- достать эти книги;
- определить уровень требований к математике в данном вузе;
- выбрать из данных книг то, что необходимо изучить (все не сможет проработать ни один школьник в мире!);
- рассчитать время и силы так, чтобы закончить работу до вступительных экзаменов;
- самому понять, что такое «освоенная тема» и на какую оценку он знает эту тему;
- прекрасно зная, что все запомнить невозможно, определить главное в изучаемом материале и запомнить это главное,

а также многое, многое другое, что, конечно же, недоступно рядовому школьнику.

Однако все, что указано выше, легко проделает квалифицированный репетитор. Мы приходим к парадоксальному выводу — книги, называющие себя пособиями для поступающих, предназначены на самом деле для репетиторов и чрезвычайно полезны последним! Ведь репетиторам тоже где-то надо брать тренировочные задачи для абитуриентов. Поэтому они широко пользуются такой литературой.

Мы видим, что ситуация с книгами для поступающих в нашем государстве вполне укладывается в уже не смешную характеристику «страна дураков». В самом деле, скажите на милость, какой нормальный человек, репетитор, будет писать книгу не для своих (потенциальных) подопечных, а для своих конкурентов?

Пишущему эти строки, впрочем, хорошо известно, почему именно так писались подобные книги, а с большей частью их авторов он знаком лично. Отчасти поэтому, отчасти потому, что «негатива» и в газетах полно, а отчасти и потому, что данная книга не место для разоблачений, мы опустим дальнейшие рассуждения на эту тему.

Ну вот, я, немного побрюзжав, отвел душу, так что могу теперь приступить к тому, что обещано в заголовке параграфа — к рассказу об этой книге.

Хочу заявить сразу и совершенно не кривя душой, что **эта книга написана сугубо для АБИТУРИЕНТА**, поскольку она составлена так, чтобы **ее саму** можно было использовать как репетитора, а именно,

- 1) подготовка к письменному экзамену разложена на 50 уроков;
- 2) на этих уроках разобраны **все** без исключения темы, на которые могут быть составлены вступительные задачи;
- 3) уроки расписаны один к одному по методике, отработанной автором за много лет работы с абитуриентами;
- 4) приведен список московских вузов с классификацией их экзамена по уровням сложности. Материал всех уроков распределен по уровням, чтобы каждый абитуриент мог выбрать свой уровень для работы;
- 5) после каждого урока дается домашнее задание (в точности так, как бывает, если вы ходите к репетитору);
- 6) даются критерии оценок за работу на уроке и за домашнее задание;
- 7) «раскрыты» все секреты работы приемных и экзаменационных комиссий, описана психология преподавателя, проверяющего письменный экзамен и принимающего устный, описана оптимальная стратегия поведения на экзаменах, апелляциях и т.п.
- 8) приведены варианты вступительных экзаменов в МГУ за последние 23 года* с ответами, указаниями и решениями.

Есть и другие особенности книги, позволяющие практически всем, кто имеет силу воли (без нее все-таки никуда!) ходить к репетитору, обойтись и без него или (если родители считают делом чести во что бы то ни стало платить кому-нибудь за ребенка) свести общение с ним к минимуму.

Подробное описание того, как надо работать с книгой, дано в §3 введения. Уверен, вы добьетесь успеха. Ведь главное — желание!

1. Зачем нужен экзамен по математике?

Начнем с того, что экзамен по математике бывает письменный и устный**. В большинстве вузов бывшего СССР если какой-то экзамен по математике проводился, то он был непременно письменным, так что я начну с письменного экзамена.

Математику сдают в самых разных вузах — от механико-математических факультетов университетов до филологических учебных заведений. Причина тому — необходимость понять, насколько абитуриент способен логически мыслить. Ведь математика — это единственный предмет в школе, представляющий собой мышление в чистом виде. Конечно, в технических

* В этом издании добавлены варианты за 1993–2016 гг. — *Прим. ред.*

** В настоящее время устный экзамен не проводится. — *Прим. ред.*

вузах математика сама по себе необходима для изучения таких наук, как физика, химия или, скажем, сопротивление материалов, но я рискну утверждать, что экзамен по этой дисциплине введен в подобных вузах главным образом потому, что руководство вуза мыслит так: «Если абитуриент математику знает, то физике (химии, биологии, географии) уж мы его сумеем обучить». Подтверждением этому служит тот факт, что в большинстве технических вузов медалисты, сдавшие математику на «отлично», зачисляются без дальнейших экзаменов, т.е. считается, что медалист, хорошо знающий математику, может быть и хорошим географом или биологом.

Еще одно достоинство экзаменов по математике — четкость критериев оценки знаний. Задача либо решена, либо нет — за редкими исключениями любому ясно, почему поставлена та или иная оценка. Каким бы парадоксальным это ни казалось, но экзамен по математике нужен не только приемной комиссии (чтобы отобрать достойнейших), но и самому абитуриенту, который в процессе подготовки к экзамену существенно поощряет свои мыслительные способности и, следовательно, получает больше шансов хорошо учиться в вузе и преуспеть в дальнейшем.

2. Виды и уровни сложности экзаменов

Для того чтобы чрезмерно не загромождать изложение, я рассматриваю лишь три уровня сложности вступительных задач по математике. В конкретном вузе могут быть какие-то небольшие отличия от общей схемы. Но все-таки опыт показывает, что человек может выбрать себе уровень сложности (в зависимости от вуза — см. список ниже) и готовиться к поступлению, решая задачи этого уровня.

Вы, вероятно, знаете, что в сборнике, изданном под редакцией М.И. Сканави, задачи тоже разделены на три уровня сложности — они называются (по возрастанию сложности) А, Б и В.

Уровни в настоящем сочинении отличаются от классификации Сканави. Дело в том, что моя книга претендует на охват математики во всех вузах, а не только в технических, как у Сканави. Если попытаться их соотнести, то, пожалуй, уровни А и Б у Сканави соответствуют моему уровню 1, а его уровень В можно сравнить с уровнем 2. Впрочем, поскольку Сканави относит к уровню В все задачи **выше** определенного уровня, среди уровня В попадают и задачи, относимые мной к уровню 3.

Попробую теперь описать уровни сложности, принятые за основу в этой книге.

УРОВЕНЬ 1. Это уровень ликбеза по математике. Практически все задачи, сюда относящиеся, решаются бездумным применением (в 1–2 шага)

формул и теорем школьного курса и рецептов, даваемых здесь. Хорошее усвоение ликбеза даст возможность написать экзамен в соответствующих вузах на четверку. Для того чтобы претендовать на пятерку, надо выйти на положительную (т.е. не ниже 3) оценку при работе на уровне 2.

УРОВЕНЬ 2. Свободное владение уровнем ликбеза, плюс полное понимание всех рецептов, плюс способность решать задачи с большим числом логических шагов, упрощающих задачу. Этого хватит на четверку. Если есть желание бороться за пять, надо освоить работу на уровне 3 с оценкой 4, для чего потребуются еще и минимальные способности на месте придумывать новые методы решения задач.

УРОВЕНЬ 3. Если вы хотите проскочить экзамен с тройкой, то достаточно хорошо освоить уровень 2. Для наработки четверочного потенциала вы должны

- блестяще решать задачи второго уровня;
- не только знать, но и уметь доказывать все рецепты и формулы (кроме тех, про которые специально оговорено, что ими можно пользоваться без доказательства);
- в 50% нестандартных случаев находить новые подходы к решению задач;
- делать не более одной ошибки из-за невнимательности на 10 задач.

Пятерочный потенциал для третьего уровня — вещь практически недосягаемая. Но, в общем, серьезной заявкой на таковую является итоговая оценка работы за год, превосходящая 4,7 (о том, как выставять себе оценки, см. следующий параграф).

А вот список московских вузов с уровнями сложности их вступительных экзаменов по математике.

УРОВЕНЬ 3. МГУ (мехмат и ВМК).

УРОВЕНЬ 2. МГУ (физфак, химфак, биофак, фак-т фундаментальной медицины, геологический, психологический и экономический ф-ты), Моск. авиационный (МАИ), Моск. инженерно-физич. (МИФИ), Моск. инст. инженеров транспорта (МИИТ, фак-т прикл. математики), Народного хоз-ва им. Плеханова (МИНХ), Радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА), Управления им. Серго Орджоникидзе (МИУ), МФТИ (все факультеты), Финансовая академия, Химико-технологический им. Д.И. Менделеева.

УРОВЕНЬ 1. МГУ (почвенный, географический, филологический и философский ф-ты, ИСАиА). Все остальные еще не упомянутые вузы Москвы.

3. Устройство сего опуса и инструкция по его применению

Данный труд устроен так, что просто читать его с начала до конца невозможно, да и ни к чему. Он предназначен служить для вас чем-то вроде репетитора. Поэтому и заниматься с ним надо как с репетитором — конечно, насколько это возможно.

У книги, впрочем, есть кое-какие преимущества по сравнению с репетитором. Она всегда у вас под рукой, всегда поможет и подскажет. Кроме того, труд репетитора оплачивается в зависимости от того, сколько длится урок. Это приводит к тому, что вам нужно осваивать материал за жестко фиксированное время. Если вы работаете с книгой, вы можете разбирать материал одного урока сколь угодно долго.

Как начать работу? Скорее всего, вам придется сдавать сначала письменный экзамен. Вот расписанный по пунктам план вашей подготовки к письменному экзамену.

1. Определите уровень трудности задач вашего вуза по списку, приведенному в §2 введения. Если вы выбрали не московский вуз, то можете смело считать, что на математические, физические, химические и экономические специальности готовиться надо по уровню 2, а на все остальные — по уровню 1.

2. Приступайте к работе над частью 1. Она начинается пятьюдесятью уроками по подготовке к письменному экзамену.

Все уроки устроены одинаково. Сначала идет вступление, состоящее из напоминания основных фактов, формул и теорем, которые нужны для материала урока, а также различных ценных указаний и рецептов решений определенных типов задач.

Сначала нужно хорошо освоить эту часть урока.

Если вы работаете на третьем уровне, добейтесь того, чтобы вы могли наизусть повторить всю вводную часть и при этом доказать любое утверждение или рецепт, данный в ней, если в ней же не оговорено противное.

Если вы работаете на втором уровне, добейтесь того, чтобы вы могли повторить наизусть всю вводную часть и при этом доказать не менее половины утверждений и рецептов, в ней сформулированных.

Для работы на первом уровне достаточно наизусть знать вводную часть.

3. Когда в вводной части все станет ясно, начинайте решать задачи урока **самостоятельно**. Надо прочитать условие задачи, закрыв следующее за ним решение. Если вам удалось, не подглядывая, решить задачу, обязательно просмотрите и мое решение. Если оно такое же, как у вас,

то вы можете увидеть, что упустили какие-то детали, или часть ответа, или, наоборот, не отбросили те значения, что надо. Читая мои решения, вы привыкнете к правильному оформлению решенных задач. Стремитесь оформлять задачи так же, как я.

4. Теперь самое трудное. Как ставить себе оценку за задачу? Если она решена абсолютно верно, что означает верный ответ и наличие всех шагов решения с четкими обоснованиями, вы ставите себе отметку + (она называется плюс) за эту задачу. Если есть незначительная ошибка, т.е.

- арифметическая, повлиявшая на менее чем треть ответа, или
- пропущено доказательство одного из свойств в геометрической или логической задаче при верном ответе, или
- пропущено рассмотрение случая, который мог повлиять на ответ, но не повлиял,

то поставьте себе оценку $\pm$ (она называется плюс-минус).

Если ход решения правильный, но из-за ошибок по невнимательности

- получено менее $2/3$, но не менее половины правильного ответа, или
 - найдена основная идея, упрощающая геометрическую или логическую задачу, или
 - в текстовой задаче правильно составлена система уравнений, или
 - в геометрической идее не доказано главное свойство, упрощающее задачу, но с использованием его получен правильный ответ,
- то поставьте себе оценку $\mp$ (она называется минус-плюс).

Если задача решена меньше, чем на $\mp$, поставьте себе — (эта оценка называется, естественно, минус).

5. В конце многих уроков встречается фраза: «Оценку поставьте себе стандартным образом». Это означает, что

- если у вас 90% чистых плюсов (в число которых можно включить два плюс-минуса (но не минус-плюса!)), вы ставите себе 5.
- если у вас 75% чистых плюсов (в число которых можно включить два плюс-минуса) и нет пятерки, то оценка 4.
- если у вас 50% чистых плюсов (никакие другие оценки в эту категорию не допускаются), но нет четверки, то вы решили работу на 3.
- все остальное (например, 100% плюс-минусов) — двойка.

Такая система оценок применяется на вступительных экзаменах в МГУ и многих других вузах.

6. Если на уроке или в домашнем задании дается задача, возле которой ничего не стоит, то она предназначена для всех уровней, т.е. относится к ликбезу. Если после нее стоит [2], то решать ее надо для уровней 2 и 3. Знак [3] указывает, что задача предназначена для третьего уровня.

7. Стандартный урок состоит из 10 задач, после которых дается 20 домашних. Не стоит ставить себе цель пройти один урок за 90 минут, как

на занятии у репетитора. Все зависит от вашей подготовки, состояния и склонностей. Какие-то уроки у вас пойдут трудно, какие-то, напротив, вы сможете одолеть быстрее, чем за полтора часа. Ничего плохого нет в том, чтобы разбить работу над уроком на три дня.

8. Оценка за домашнее задание ставится **всегда по стандарту**. Никогда не решайте домашнее задание до конца урока, т.е. решения или разбора всех его задач, и даже в тот же день, когда вы закончили работу над уроком. Домашнее задание должно быть действительно домашним заданием.

9. Как правило, проверки домашнего задания по ответам достаточно для выставления оценки. Обязательно найдите ошибку у себя, если ответ не сошелся. Это крайне важно. Если вы разовьете у себя возможность смотреть как бы со стороны на свою работу, вы будете гарантированы от ошибок на экзамене.

10. Если в решении домашней задачи важны какие-нибудь логические ходы, я буду это отмечать в разделе «Ответы, указания, решения».

11. Делайте все, чтобы воспринимать эту книгу как репетитора. Заведите себе день недели, к которому очередной урок и его домашнее задание должны быть сделаны.

12. Распланируйте свою работу. Если вы начали заниматься в сентябре, а экзамены — в июле, то вы обнаружите, что у вас в запасе нет 50 недель. Значит, какие-то уроки должны быть пройдены быстрее, чем за неделю.

13. У вас, несомненно, возникнет проблема забывания того, что пройдено. Если вы забыли какую-то ранее пройденную формулу, репетитор поругает вас, но напомнит ее. Книга вас критиковать не будет (это в принципе невозможно), но для того, чтобы подсказать вам то, что потребовалось, в Справочнике я завел главу «Шпаргалки», в которой собраны вводные сведения по всем урокам, так что вам не нужно долго рыться в книге, отыскивая, на каком уроке что было и сам этот урок.

14. Упаси вас Бог считать, что эта книга может в одиночку служить учебником школьной математики. Она — только дополнение к нему.

15. В нулевой главе я привожу некий теоретический материал, который в школьных учебниках излагается плохо или вообще не излагается. Проходить главу 3 Справочника надо всем, а главу 2 Справочника — на уровнях 2 и 3. Читать материал главы 2 Справочника надо в момент прохождения данной темы на уроках, а именно

- §1 — урок 35;
- §2 — урок 4;
- §3 — урок 9;
- §4 — урок 10;
- §5 — урок 17;

— §6 — уроки 18 и 19;

— §7 — урок 26.

Что касается главы 3 Справочника, то

— §1 проходится на уроке 1;

— §2 проходится на уроке 13;

— §3 проходится на уроке 25;

— §4 проходится на уроке 9;

— §5 проходится на уроке 11;

— §6 проходится на уроках 28 и 29.

16. Отмечайте в раз навсегда заведенной тетрадке по две оценки за каждый пройденный вами урок — за классную работу и за домашнее задание. Обязательно ставьте дату занятия.

17. После прохождения каждой главы устраивайте себе контрольную работу-повтор. Задумайте заранее какое-либо число от 1 до 20 и возьмите по одной задаче с этим номером из каждого домашнего задания предыдущей главы. Вам может показаться, что это бессмысленно — ведь вы уже решали эти задачи. А вот попробуйте, порешайте в течение двух часов, проверьте и поставьте себе оценку по стандарту. Присоедините эту оценку к уже проставленным. Уверен, что здесь для вас будут сюрпризы. Цель таких контрольных — добиться стабильного запоминания пройденных тем и методов.

18. Есть ситуации, когда ясно, на какую оценку вы должны рассчитывать и, соответственно, не тратить зря силы на более высокую. Это бывает в следующих случаях:

а) вы еле-еле справляетесь или не справляетесь с троечными темами письменного экзамена (уроки 1–5, 8–11, 13–15, 17–19, 22–24); понятие «еле-еле справляться» означает не менее 25% двоек за домашние задания или наличие двоек за классную работу. Указанные троечные темы — это тот минимум, который надо освоить, чтобы написать экзамен на тройку наверняка. Если они идут у вас плохо, не затрагивайте другие, обеспечьте себе сначала тройку. При этом если задачи в классных и домашних заданиях кончились, берите для тренировки соответствующие задачи из части III (с любых факультетов).

б) Уроки 16, 41, 42 и 45–50 предназначены для подготовки на пятерку. Не приступайте к ним, если по остальным темам у вас есть тройки (или ниже), или менее 75% пятерок за домашние задания, или менее 50% пятерок за классную работу. Обеспечьте себе сначала четверку, проработав повторно темы, в которых у вас есть пробелы.

в) У вас заведомо есть твердая тройка, но до четверки далеко (т.е. много двоек в четверочных темах, или подавляющее большинство ($> 75\%$) оценок

по четверочным темам не превосходит тройки). Рассчитайте свое время, оставшееся до экзамена, и посмотрите, с какой скоростью вы должны будете осваивать четверочные темы, чтобы успеть. Если такая скорость вам не по силам, попробуйте готовиться на более высокую оценку по другим предметам.

г) У вас заведомо есть твердая четверка, но до пятерки далеко (т.е. много двоек в пятерочных темах, или подавляющее большинство ($> 75\%$) оценок по этим темам не превосходит тройки). Рассчитайте свое время, оставшееся до экзамена, и посмотрите, с какой скоростью вы должны будете осваивать пятерочные темы, чтобы успеть. Если такая скорость вам не по силам, попробуйте готовиться на более высокую оценку по другим предметам.

19. После того, как вы прошли уроки 1–50 (за исключением случая, описанного в 18 а)), выведите себе среднюю оценку (с точностью до десятых ее долей) просто как среднее арифметическое всех оценок за домашние и классные задания.

20. Приступайте к работе над вариантами того уровня, на котором вы работаете. Решать надо не более одного варианта в день, отведя себе на него 4 часа — как на экзамене. Решать его надо тоже как на экзамене, т.е. не прерываясь на обед, прогулки и т.п. Разумеется, заглядывать в ответы можно только через 4 часа после начала экзамена, т.е. все должно быть, как в жизни — сначала окончание экзамена, а потом проверка. Лучше даже, если вы отложите книгу и проверите ваше решение на следующий день. Я, впрочем, отдаю себе отчет, какая для этого нужна сила воли, и не настаиваю на этом. Но все мы должны стремиться к идеальному, и я советую вам попробовать действовать именно так.

21. Для достоверной статистики надо решить не менее 20 вариантов. Сравните среднюю оценку (вычисленную до десятых долей), полученную за их решение, со средней оценкой за подготовку.

Слова благодарности

В произведении, представляемом на суд читателя, — под тысячу страниц текста. Я писал без соавторов. Но, конечно же, без помощи замечательных людей, окружавших меня в течение 10 месяцев работы над этой книгой, она не могла бы появиться.

Я бесконечно благодарен Сипачевой О.В., которая — достала для меня программное обеспечение настольной редакционно-издательской системы $\text{\TeX}$;

- собственноручно установила его;
- придумала, как русифицировать эту систему;
- в течение всех этих десяти месяцев терпеливо выслушивала мои проблемы в работе с ней и решала их.

Я благодарен моей ученице Харитоновой М., которая не только прекрасно освоила мой курс, но и представила мне замечательный конспект моих уроков.

Я благодарен Ященко И.В., который научил меня не бояться компьютера.

Я благодарен сотрудникам приемных и экзаменационных комиссий МГУ и других вузов, познакомивших меня с тонкостями работы экзаменаторов и приемных комиссий, задачами «на засыпку» и т.п. Все они без исключения почему-то (!) захотели остаться неизвестными.

Часть I

СПРАВОЧНИК

Глава 1

Шпаргалки

1. Тригонометрия

Все тригонометрические уравнения решаются сведением к одному из четырех простейших:

$$(1) \quad \sin x = a \iff \begin{cases} x = (-1)^n \arcsin a + n\pi, & n \in \mathbf{Z}, \text{ если } |a| \leq 1, \\ \emptyset, & \text{если } |a| > 1; \end{cases}$$

$$(2) \quad \cos x = a \iff \begin{cases} x = \pm \arccos a + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z}, \text{ если } |a| \leq 1, \\ \emptyset, & \text{если } |a| > 1; \end{cases}$$

$$(3) \quad \operatorname{tg} x = a \iff x = \operatorname{arctg} a + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z};$$

$$(4) \quad \operatorname{ctg} x = a \iff x = \operatorname{arcctg} a + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Формулы (1)–(4) необходимо знать **наизусть**. Кроме того, *желательно* знать наизусть следующие частные случаи формул (1) и (2), записанные в более простом виде:

$$(5) \quad \sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z};$$

$$(6) \quad \sin x = 0 \iff x = n\pi, \quad n \in \mathbf{Z};$$

$$(7) \quad \sin x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z};$$

$$(8) \quad \cos x = 1 \iff x = 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z};$$

$$(9) \quad \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z};$$

$$(10) \quad \cos x = -1 \iff x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Следующие формулы служат для преобразования уравнений к простейшим.

$$(11) \quad \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$(12) \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$(13) \quad \operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$(14) \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$(15) \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$(16) \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$(16) \quad \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$(17) \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(18) \quad \sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \sin(x \pm \frac{\pi}{4})$$

$$(19) \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$(20) \quad \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x, \quad \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

Группировка и разложение на множители производится с помощью следующих формул.

$$(1) \quad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(2) \quad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$(3) \quad \operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

$$(4) \quad a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$$

$$(5) \quad a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$(6) \quad \left(a \pm \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} \pm 2$$

Третий метод упрощения тригонометрических уравнений — **сведение их к однородным уравнениям**, т.е. к одному из уравнений вида

$$(1) \quad A \sin x + B \cos x = 0$$

$$(2) \quad A \sin^2 x + B \sin x \cos x + C \cos^2 x = 0$$

— здесь A, B, C — какие-то числа.

Продemonстрируем сначала, как решать уравнения вида (2). Если оба числа A, B равны нулю, то все просто. Пусть, например, $A \neq 0$. Предположим, что $\cos x = 0$. Подставим это значение косинуса в уравнение (2).

Получим

$$A \sin^2 x + B \sin x \cdot 0 + C \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow A \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0,$$

чего не может быть, так как $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Значит, $\cos x \neq 0$ и можно поделить (2) на $\cos^2 x$. Получим уравнение $A \operatorname{tg}^2 x + B \operatorname{tg} x + C = 0$ — дальше ясно. Точно так же, при помощи деления на $\cos x$ или $\sin x$, решается уравнение (1). Отметим, что при решении подобной задачи на экзамене **обязательно приводить полное доказательство** того, что $\cos x \neq 0$ или $\sin x \neq 0$. К уравнению (2) сводятся уравнения вида

$$P \sin^2 x + Q \cos^2 x + R \sin 2x + S \cos 2x + T \sin x \cos x + U = 0$$

посредством формул $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

$$(1) \quad \sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$$

$$(2) \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

$$(3) \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$$

$$(4) \quad \sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

$$(5) \quad \sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x + y) + \sin(x - y))$$

$$(6) \quad \cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x + y) + \cos(x - y))$$

Применять последнюю группу формул надо, когда тригонометрические функции берутся от аргумента большой кратности (т.е. от $5x$, $8x$ и т.п.). При этом единственная надежда решающего состоит в том, что все плохое сократится рано или поздно.

Метод вспомогательного аргумента

$$\begin{aligned} a \sin x \pm b \cos x &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin x \cos \varphi \pm \cos x \sin \varphi) = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x \pm \varphi), \end{aligned}$$

где $\varphi = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Пояснения: первое равенство выполняется просто потому, что если внести $\sqrt{a^2 + b^2}$ под скобки, оно сократится со знаменателем первого и второго слагаемых и получится левая часть формулы (1); для того, чтобы понять второе равенство, заметим, что мы заменили $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ на $\cos \varphi$, а выражение $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ на $\sin \varphi$.

Напомним, что $\arcsin t$ есть такое число α , что $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ и $\sin \alpha = t$. Значит, прямо из определения арксинуса следует, что $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и, тем самым, вторая замена выполнена обоснованно. Заметим далее, что $\cos \varphi \geq 0$, так как $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Кроме того,

$$\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi = 1 - \frac{b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$$

и, значит, $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ввиду того, что $a > 0$, и мы установили второе равенство. Третье сразу вытекает из формулы синуса суммы-разности (см. урок 1, формулу (11)).

Тригонометрические системы

Решение систем тригонометрических уравнений чаще всего сводится к решению алгебраических систем относительно $\cos x$, $\operatorname{tg} y$, $\cos(x+y)$, $\sin(x+y)$ и т.п.

Например, если мы привели исходную систему к системе вида

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 0 \\ \cos(x-y) = 1, \end{cases}$$

то она эквивалентна линейной системе

$$(1) \quad \begin{cases} x + y = n\pi, & n \in \mathbf{Z} \\ x - y = 2k\pi, & k \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$

откуда легко найти, что

$$(2) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}(n + 2k)\pi \\ y = \frac{1}{2}(n - 2k)\pi, & n, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Здесь необходимо особо отметить, что *совершенно необходимо писать разные целочисленные параметры* при решении независимых простейших уравнений, т.е. в системе (1) числа n и k должны быть обозначены разными буквами. Если бы мы использовали одну и ту же букву, было бы потеряно бесконечное множество решений, а именно множество таких пар (x, y) , задаваемых уравнениями (2), что в их определении $n \neq k$.

Еще одна идея, которая может использоваться при решении систем — это выражение одного переменного через другое и подстановка в другое уравнение. Это можно сделать только в том случае, когда выразить одну переменную через другую можно достаточно просто.

Например, если мы нашли, что $x = y + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, и хотим подставить вместо x его выражение через y в $\cos x$, то придется рассмотреть два случая:

- 1) n нечетно, т.е. $n = 2k + 1$ для некоторого $k \in \mathbf{Z}$; тогда $\cos x = \cos(y + \pi + 2k\pi) = \cos(y + \pi) = -\cos y$.
- 2) n четно, т.е. $n = 2k$ для некоторого $k \in \mathbf{Z}$; тогда $\cos x = \cos(y + 2k\pi) = \cos y$.

Если же трудно понять, как будут себя вести тригонометрические функции при подстановке, лучше ее не применять.

Обратные тригонометрические функции

Обратные тригонометрические функции — это $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\operatorname{arccctg} x$.

$y = \arcsin x \equiv$ (этот значок заменяет русскую фразу «означает по определению, что») $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin y = x$

$$y = \arccos x \equiv y \in [0, \pi] \text{ и } \cos y = x$$

$$y = \arctg x \equiv y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ и } \operatorname{tg} y = x$$

$$y = \operatorname{arccctg} x \equiv y \in (0, \pi) \text{ и } \operatorname{ctg} y = x$$

2. Уравнения и неравенства с модулями и радикалами

Рациональные уравнения и неравенства

Для того чтобы решить любую задачу с модулями, необходимо знать определение модуля числа a . Его можно дать, например, следующим способом:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a \leq 0. \end{cases}$$

Пусть имеем уравнение $|f(x)| + g(x) = 0$, где $g(x)$ также может содержать выражения с модулями. Это уравнение эквивалентно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -f(x) + g(x) = 0, \\ f(x) \leq 0. \end{cases}$$

Необходимо отметить все нули подмодульных выражений на числовой прямой. Они разобьют прямую на лучи и промежутки, на которых все подмодульные выражения имеют постоянный знак. Надо определить этот знак и раскрыть все модули, заменяя их подмодульными выражениями то ли со знаком плюс, то ли со знаком минус в зависимости от знака подмодульного выражения. Знак последнего можно, в принципе, определить, подставляя в него точку из промежутка, **не совпадающую ни с одним из концов данного промежутка**. После этого нужно решить получившееся неравенство или уравнение (в котором уже нет модулей!) и выбрать решения, принадлежащие данному промежутку.

Уравнения или неравенства называются рациональными, если левая и правая их части есть суммы отношений многочленов. Решаются они приведением к общему знаменателю, после которого надо разложить числитель и знаменатель на простейшие множители и применить метод интервалов.

Опишем вкратце, как разлагать многочлены на множители. Многочлен первой степени, т.е. вида $ax + b$, $a \neq 0$, преобразуется так: $ax + b = a(x - (-\frac{b}{a}))$. Если x_1, x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Например, $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, $2x^2 - x - 1 = 2(x - 1)(x - (-\frac{1}{2}))$.

Если дан многочлен степени выше второй и известны его корни, то он раскладывается аналогично квадратному трехчлену. Например, если дан кубический многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$ с корнями x_1, x_2, x_3 , то $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Предположим, что числитель и знаменатель уже разложены на множители. Я опишу метод интервалов на конкретном примере. Пусть мы пришли к неравенству

$$(1) \quad \frac{(x-3)^2(x-7)^3(x+1)}{(x-2)(x+4)^4} \geq 0$$

(обязательно должно быть $x - 2$, а не $2 - x$, именно $x - 7$, а не $7 - x$ и т.д. Этого всегда можно добиться, умножая неравенство на -1 и меняя одновременно его знак столько раз, сколько надо).

Отметим жирными точками нули числителя и прозрачными — нули знаменателя (см. рис. 1). Если бы неравенство (1) было строгим, нужно было бы все нули сделать прозрачными.

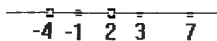


Рис. 1

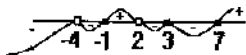


Рис. 2

После этого справа налево ведем змейку (рис. 2) по следующему правилу: она приходит сверху, меняет знак на нечетной степени и сохраняет на четной.

Теперь остается только выписать ответ: $x \in [-1, 2) \cup \{3\} \cup [7, +\infty)$. Важно не забыть $x = 3$.

Приведем ряд эквивалентностей для освобождения от радикалов.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \sqrt{f(x)} = g(x) &\iff \begin{cases} f(x) = (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \\
 (2) \quad \sqrt{f(x)} \geq g(x) &\iff \begin{cases} f(x) \geq (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\
 (3) \quad \sqrt{f(x)} > g(x) &\iff \begin{cases} f(x) > (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\
 (4) \quad \sqrt{f(x)} < g(x) &\iff \begin{cases} f(x) < (g(x))^2 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \\
 (5) \quad \sqrt{f(x)} \leq g(x) &\iff \begin{cases} f(x) \leq (g(x))^2 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Напомним, что квадратные скобки означают, что каждая из систем, ими объединенных, решается отдельно и дает отдельную часть ответа, т.е. решения систем объединяются.

3. Алгебраические системы уравнений и неравенств

Если в процессе решения появилось уравнение вида $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, то мы можем легко выразить x через y . Пусть, например, $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$. Решим это уравнение как квадратное относительно x , считая y известным:

$$x = \frac{-5y \pm \sqrt{25y^2 - 4 \cdot 6y^2}}{2} = \frac{-5y \pm y}{2} = 2y, 3y.$$

Значит, в частности, либо $x = 2y$, либо $x = 3y$ и $x^2 - 5xy + 6y^2 = (x - 2y)(x - 3y)$ — последнее равенство тоже может пригодиться. Вторым методом более сложный. Он называется **методом неопределенных коэффициентов**. Поясним его на примере. Пусть даны уравнения $\begin{cases} x+y+z=13 \\ 7x+3y=-9 \end{cases}$,

причем требуется отыскать $5x + y - 2z$. Указанная система не определяет однозначно x, y и z . То же самое верно и для выражения $4x + y - 2z$. Однако раз по условию задачи выражение $5x + y - 2z$ можно найти, его можно представить как линейную комбинацию выражений $x + y + z$ и $7x + 3y$, т.е. найдутся числа α и β , такие, что $5x + y - 2z = \alpha(x + y + z) + \beta(7x + 3y)$. Как найти числа α и β ? Надо, раскрыв скобки, приравнять коэффициенты при x, y, z . Посмотрите, как это делается: $5x + y - 2z = \alpha(x + y + z) + \beta(7x + 3y) \iff 5x + y - 2z = \alpha x + \alpha y + \alpha z + 7\beta x + 3\beta y \iff 5x + y - 2z = (\alpha + 7\beta)x + (\alpha + 3\beta)y + \alpha z$. А теперь, приравнявая коэффициенты при x, y, z , получаем систему

$$\begin{cases} \alpha + 7\beta = 5 \\ \alpha + 3\beta = 1 \\ \alpha = -2 \end{cases} \iff \alpha = -2, \beta = 1.$$

Значит, $5x + y - 2z = -2(x + y + z) + 1(7x + 3y) = -2 \cdot 13 + (-9) = -35$.

Последнее замечание перед решением задач. Помните, что решение системы с двумя переменными есть **пара** чисел, с тремя — **тройка**, и т.д. Например, ответ, записанный в виде $x = 4, y = \pm 1$, вообще говоря, не имеет смысла. Надо писать $(4, 1), (4, -1)$ или $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$.

4. Текстовые задачи

Решение любой текстовой задачи складывается из трех основных моментов:

- 1) удачного выбора неизвестных;
- 2) составления уравнений и формализации того, что требуется найти;
- 3) решения полученной системы уравнений и неравенств.

1) Практически всегда в задачах на движение выбор в качестве неизвестных величин расстояний и скоростей приводит к успеху. Если вы составили уравнения, а полученная система не решается, надо попробовать выбрать другие неизвестные. Ни в коем случае не пугайтесь того, что у вас слишком много неизвестных. Правильное составление системы превыше всего. Кроме того, обращайтесь особое внимание на единицы измерения — они в течение всего решения должны быть одинаковыми. Если это часы, то время должно на протяжении всей задачи выражаться в часах, а не в минутах, не должны в одном решении применяться километры и метры, и т.п.

2) Помните о том, что для превращения высказываний в тексте задачи в уравнения вашей системы **математических знаний вообще не надо** — необходим лишь здравый смысл. Практическое, заземленное мышление

на уровне торговли на базаре гарантирует успех на 100%. Важно **обязательно** сформулировать при помощи ваших переменных, что вы обязаны найти, поскольку переменных может быть больше, чем уравнений, так что все их найти будет просто невозможно.

3) Решение систем, которые в таких случаях возникают, было рассмотрено на уроке 11. Отмечу здесь, что нужно все время помнить о том, что ищется. Кроме того, в текстовых задачах все величины, как правило, положительны (ибо в природе скорости и расстояния положительны). Поэтому можно смело умножать, делить и возводить в квадрат получающиеся уравнения и неравенства, не делая необходимых в таких случаях оговорок.

В задачах на работу за неизвестные, как правило, надо принимать производительность — ее роль такова же, как роль скорости в задачах на движение. Главное, как и в задачах на движение, — здравый смысл и полное ваше понимание того, что вы делаете. К примеру, если вы пишете, что x — производительность станка, вы должны уметь расшифровать, что это значит — число деталей в минуту, или в час, или в день, и т.д. Бывают такие задачи, в которых вообще не сказано, какая работа выполняется. Тогда удобнее ввести самим единицу работы, равную всей работе. Тогда производительность есть часть всей работы, выполненная за единицу времени. Следите за тем, чтобы единицы времени были одни и те же на протяжении всей задачи.

Задачи на трубы, из которых что-то льется, есть также задачи на работу. Здесь производительность трубы — это объем жидкости, протекающей через нее за единицу времени.

Среди задач на работу бывают такие, где решающую роль играют данные, являющиеся целыми числами. Тут уже никаких рецептов дать нельзя. Чаще всего используется делимость и тот факт, что если m и n — целые числа со свойством $|m - n| < 1$, то $m = n$. Помните, что текстовые задачи, где нужно использовать свойства целых чисел, всегда являются сложными и их надо решать в последнюю очередь. Вы поймете, что в задаче важны целые числа, после того, как составите систему уравнений и увидите, что просто так найти из нее неизвестные невозможно.

В задачах на смеси, растворы и сплавы в качестве неизвестных удобно выбирать либо весь вес (или объем) вещества, которое нас интересует в смеси, либо его концентрацию, т.е. вес (или объем) данного вещества в единице веса (или объема) смеси. Требования к здравому смыслу при решении этих задач особенно высоки. Если вы исследуете смесь, держите в памяти две ее характеристики: общее количество данного вещества в смеси и количество данного вещества в 1 кг (или 1 л) смеси. Приведу пример простейшего рассуждения, часто возникающего в задачах на смеси.

Пример. Пусть 17 литров раствора содержат 6 литров спирта. Сколько

спирта содержится в 9 литрах раствора?

Решение. В 17 литрах раствора — 6 литров спирта. Значит, в 1 литре раствора — $\frac{6}{17}$ литров спирта. Значит, в 9 литрах раствора — $9 \cdot \frac{6}{17} = \frac{54}{17}$ литра спирта.

Опыт показывает, что школьники не очень хорошо владеют процентами. Поэтому советую вам избегать работы с ними. От процентов вещества в данной смеси всегда можно перейти либо к его абсолютному количеству, либо к концентрации.

Отмечу здесь некоторые свойства целых чисел, которые часто применяются. Поступающие, как правило, знают их интуитивно, на уровне «все понимаю, но сам ничего сказать не могу». Видимо, для вас будет достаточно запомнить, как формулируются эти свойства для того, чтобы вы смогли их впоследствии применять. В вашей вступительной работе вы можете пользоваться всеми приводимыми ниже свойствами без доказательства. Однако вам полезно знать, что доказательства некоторых из них (например, 4 и 5) настолько сложны, что недоступны подавляющему большинству школьников.

1. Натуральное число n делится на (натуральное) число k , если и только если найдется такое натуральное l , что $n = kl$. В частности, число n четно, если и только если $n = 2l$ для некоторого натурального l , n делится на 3, если и только если $n = 3l$ для некоторого натурального l , и т.д.
2. Натуральное число n нечетно, если найдется натуральное l такое, что $n = 2l + 1$. Число n дает при делении на k остаток r , если и только если найдется такое натуральное l , что $n = lk + r$. В частности, число дает при делении на 3 остаток 1, если оно есть $3l + 1$ для некоторого натурального l , оно дает при делении на 4 остаток 3, если оно есть $4l + 3$ для некоторого l , и т.д.
3. Если $a_0, a_1, \dots, a_n$ — цифры (т.е. числа вида 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), то тот факт, что число записывается цифрами $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ (порядок именно такой, как у меня, а черта наверху ставится, чтобы отличить это число от произведения) означает, что это число равно $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$.

Например, число, состоящее из цифр x и y , равно $10x + y$, а число, состоящее из цифр x, y, z , равно $100x + 10y + z$.

4. Любое натуральное число единственным образом (с точностью до перестановок) разлагается на простые множители.
5. Если xu делится на z и x взаимно просто с z , то u делится на z . Например, если $7x$ делится на 3, то и x делится на 3.

Как решать задачи на оптимальный выбор, подробно пояснено на примерах задач 1–3 урока 16.

5. Прогрессии

Последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ называется *арифметической прогрессией*, если найдется такое число d , называемое *разностью* прогрессии, что $a_2 = a_1 + d, a_3 = a_2 + d, \dots, a_n = a_{n-1} + d$. Иными словами, второй член получается из первого прибавлением числа d , третий получается из второго прибавлением того же самого числа d , и т.д. Отсюда ясно, что все члены прогрессии определяются ее первым членом и разностью. Я отнес задачи на прогрессии к текстовым задачам, так как практически любая задача на арифметические прогрессии решается составлением системы уравнений относительно a_1 и d . Для того чтобы составить такую систему, достаточно знать следующие формулы:

$$(1) \quad a_n = a_1 + (n-1)d,$$

$$(2) \quad a_1 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Здесь, конечно, имеется в виду, что $a_1, \dots, a_n$ — арифметическая прогрессия.

Последовательность чисел $b_1, \dots, b_n$ называется *геометрической прогрессией*, если $b_k \neq 0$ для всех k и найдется такое число $q \neq 0$, называемое *знаменателем* прогрессии, что $b_2 = b_1 \cdot q, b_3 = b_2 \cdot q, \dots, b_n = b_{n-1} \cdot q$. Определение совершенно аналогично определению арифметической прогрессии с заменой сложения на умножение. Требование, чтобы отличались от нуля все члены и знаменатель прогрессии необходимо для того, чтобы однозначно можно было определить прогрессию по любому члену и знаменателю, а также сам знаменатель, если даны все члены прогрессии. Если допустить, что могут быть члены прогрессии, равные нулю, то последовательность $0, 0, \dots, 0$ можно считать прогрессией со знаменателем 3 или 7 или $\sqrt{2}$, т.е. знаменатель не определяется однозначным образом.

Если допустить, что знаменатель может быть равен нулю, то последовательность $2, 0, \dots, 0$ является геометрической прогрессией с таким знаменателем, но, зная знаменатель и второй член, мы никак не можем найти первый — он может, в принципе, равняться любому числу.

Задачи на геометрические прогрессии решаются так же, как и задачи на арифметические прогрессии — составлением системы уравнений относительно b_1 и q . Вот необходимые для этого формулы:

$$(3) \quad b_n = b_1 \cdot q^{n-1},$$

$$(4) \quad b_1 + b_2 + \dots + b_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Последнее замечание о названиях. Название «арифметическая прогрессия» для последовательности $a_1, \dots, a_n$ проистекает от того факта, что любой член прогрессии есть среднее арифметическое соседних с ним членов (если они имеются), т.е. для любого натурального k если $1 < k < n$, то $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$.

Аналогично, если $b_1, \dots, b_n$ есть геометрическая прогрессия с положительными членами, то каждый ее член равен среднему геометрическому своих соседних (если они имеются), т.е. для любого натурального k если $1 < k < n$, то $b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}}$.

6. Показательные, логарифмические и смешанные уравнения и неравенства

Начнем со свойств показательных функций. Первое, что необходимо твердо запомнить, — это то, что общая степенная функция $y = a^x$ имеет смысл только при $a > 0$. При этом x может принимать любые значения. Тем самым, если в вашем уравнении или неравенстве фигурирует выражение $f(x)^{g(x)}$, то к условиям, определяющим ОДЗ, надо отнести неравенство $f(x) > 0$.

Скажу несколько слов, почему нельзя возводить неположительные числа в произвольную степень. Действительно, вроде бы понятно, как возвести -1 в степень, равную $1/3$. Однако, совершенно невозможно возвести это число в степень $1/2$, а уж что делать со степенью $\sqrt{2}$, вообще представить себе нельзя. Число 0 невозможно возвести в отрицательную степень. Отсюда видно, что если бы мы задумали рассмотреть функцию $y = (-1)^x$, то ОДЗ для нее написать нам было бы не по силам. Впрочем, такую функцию, определенную только для целых x , мы рассматривали на наших уроках по тригонометрии.

Приведу основные свойства степеней, при помощи которых преобразуются показательные уравнения и неравенства.

$$(1) \quad a^x > 0 \text{ при всех } a > 0 \text{ и } x \in \mathbf{R}$$

$$(2) \quad a^x = b \iff x = \begin{cases} \log_a b, & \text{если } a > 0, b > 0, a \neq 1, \\ \emptyset, & \text{если } a = 1, b \neq 1, \\ \text{любое,} & \text{если } a = b = 1 \end{cases}$$

$$(3) \quad \text{Если } m \text{ и } n \text{ — натуральные числа, то } a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$(4) \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$(5) \quad a^{x+y} = a^x a^y$$

$$(6) \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$(7) \quad a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x$$

$$(8) \quad (ab)^x = a^x b^x$$

$$(9) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$(10) \quad a^0 = 1, \quad a^1 = a$$

Кроме того, необходимо помнить, что при $a > 1$ функция $y = a^x$ возрастает, а при $0 < a < 1$ — убывает на всей прямой.

Подобно тригонометрическим, показательные уравнения и неравенства решаются сведением к простейшим при помощи формул (1)–(10).

Вот список простейших уравнений и неравенств с указанием равносильных переходов, устраняющих степени:

$$(11) \quad a^{g(x)} = a^{h(x)}, \quad a > 0, a \neq 1 \iff g(x) = h(x)$$

$$(12) \quad f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)} \iff \begin{cases} g(x) = h(x) \\ f(x) > 0 \\ f(x) = 1 \\ g(x), h(x) \text{ определены} \end{cases}$$

$$(13) \quad f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)} \iff \begin{cases} g(x) > h(x) \\ f(x) > 1 \\ g(x) < h(x) \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases}$$

$$(14) \quad f(x)^{g(x)} \geq f(x)^{h(x)} \iff \begin{cases} f(x) \geq 1 \\ g(x) \geq h(x) \\ 0 < f(x) \leq 1 \\ g(x) \leq h(x) \end{cases}$$

$$(15) \quad f(x)^{g(x)} < f(x)^{h(x)} \iff \begin{cases} g(x) < h(x) \\ f(x) > 1 \\ g(x) > h(x) \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases}$$

$$(16) \quad f(x)^{g(x)} \leq f(x)^{h(x)} \iff \begin{cases} f(x) \geq 1 \\ g(x) \leq h(x) \\ 0 < f(x) \leq 1 \\ g(x) \geq h(x) \end{cases}$$

Уравнения и неравенства с логарифмами

Самое главное, как всегда, — определение. Пусть $a > 0, b > 0, a \neq 1$. Тогда $\log_a b$ есть такое число c , что $a^c = b$. Можно записать это определение и так:

$$(1) \quad a^{\log_a b} = b, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad a \neq 1.$$

Формулу (1) часто называют еще основным логарифмическим тождеством. Полезно помнить, что это все-таки определение.

Логарифмические уравнения и неравенства, так же как показательные и тригонометрические, приводятся к простейшим с помощью формул преобразования логарифмов. Вот эти формулы:

$$(2) \quad \log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$(3) \quad \log_a (bc) = \log_a b + \log_a c, \quad a, b, c > 0, \quad a \neq 1$$

$$(4) \quad \log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c, \quad a, b, c > 0, \quad a \neq 1$$

$$(5) \quad \log_a (b^x) = x \log_a b, \quad a, b > 0, \quad a \neq 1$$

$$(6) \quad \log_{(a^x)} b = \frac{1}{x} \log_a b, \quad a, b > 0, \quad a \neq 1, \quad x \neq 0$$

$$(7) \quad \log_a (b^{2n}) = 2n \log_a |b|, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b \neq 0, \quad n \quad \text{— натуральное}$$

$$(8) \quad \log_a \frac{1}{b} = -\log_a b, \quad a, b > 0, \quad a \neq 1$$

$$(9) \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad a, b, c > 0, \quad a, c \neq 1$$

$$(10) \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad a, b > 0, \quad a, b \neq 1$$

Решение всех задач на логарифмы должно начинаться с нахождения ОДЗ. В процессе преобразований необходимо постоянно следить за ОДЗ и равносильностью преобразований. Например, формула (3) неверна, если не все из чисел a, b, c положительны. Если преобразовать выражение $\log_a (f(x)g(x))$ по формуле (3), то можно просто потерять те корни x , при которых как $f(x)$, так и $g(x)$ отрицательны. Поэтому при решении уравнений и неравенств полезно применять следующие вариации формул (3) и (4).

$$(11) \quad \log_a (bc) = \log_a |b| + \log_a |c|, \quad a > 0, \quad b \cdot c > 0, \quad a \neq 1$$

$$(12) \quad \log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a |b| - \log_a |c|, \quad a > 0, \quad b \cdot c > 0, \quad a \neq 1$$

Приведем теперь простейшие логарифмические уравнения и неравенства и эквивалентные переходы, позволяющие избавляться от логарифмов.

$$(13) \quad \log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x) \iff \begin{cases} g(x) = h(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$$

В частности, если a есть положительное число, не равное единице, то

$$(14) \quad \log_a g(x) = \log_a h(x) \iff \begin{cases} g(x) = h(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Заметим, что в формулах (13) и (14) вместо неравенства $g(x) > 0$ можно было в каждой из систем записать неравенство $h(x) > 0$ — это все равно, так как $g(x) = h(x)$; можно при желании записать в систему оба эти неравенства. Конечно же, разумней решать поменьше неравенств и, поскольку все равно, какое из двух записать в систему, лучше взять то, которое проще.

Покажем, как избавляться от логарифмов в простейших неравенствах.

$$(15) \quad \log_{f(x)} g(x) > \log_{f(x)} h(x) \iff \begin{cases} \begin{cases} g(x) > h(x) \\ h(x) > 0 \\ f(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$(16) \quad \log_{f(x)} g(x) \geq \log_{f(x)} h(x) \iff \begin{cases} \begin{cases} g(x) \geq h(x) \\ h(x) > 0 \\ f(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) \geq g(x) \\ g(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$(17) \quad \log_{f(x)} g(x) < \log_{f(x)} h(x) \iff \begin{cases} \begin{cases} g(x) < h(x) \\ g(x) > 0 \\ f(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) < g(x) \\ h(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$(18) \quad \log_{f(x)} g(x) \leq \log_{f(x)} h(x) \iff \begin{cases} g(x) \leq h(x) \\ g(x) > 0 \\ f(x) > 1 \\ h(x) \leq g(x) \\ h(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases}$$

Если взглянуть в формулы (15)–(18), то видно, что все они построены по одной схеме: надо рассмотреть два случая — когда основание больше единицы с сохранением неравенства и когда оно лежит между нулем и единицей с заменой его на противоположное.

Приведу еще несколько следствий формул (15)–(18), которые заслуживают своего запоминания.

$$(19) \quad \text{если } a, b \text{ — числа и } a > 0, a \neq 1, \text{ то } \log_a f(x) = b \iff f(x) = a^b$$

$$(20) \quad \text{если } a > 0, a \neq 1, \text{ то } \log_a f(x) > b \iff \begin{cases} f(x) > a^b, & \text{если } a > 1 \\ 0 < f(x) < a^b, & \text{если } a < 1 \end{cases}$$

$$(21) \quad \text{если } a > 0, a \neq 1, \text{ то } \log_a f(x) \geq b \iff \begin{cases} f(x) \geq a^b, & \text{если } a > 1 \\ 0 < f(x) \leq a^b, & \text{если } a < 1 \end{cases}$$

$$(22) \quad \text{если } a > 0, a \neq 1, \text{ то } \log_a f(x) < b \iff \begin{cases} 0 < f(x) < a^b, & \text{если } a > 1 \\ f(x) > a^b, & \text{если } a < 1 \end{cases}$$

$$(23) \quad \text{если } a > 0, a \neq 1, \text{ то } \log_a f(x) \leq b \iff \begin{cases} 0 < f(x) \leq a^b, & \text{если } a > 1 \\ f(x) \geq a^b, & \text{если } a < 1 \end{cases}$$

7. Производная и ее применения

Для того, чтобы научиться вычислять производные элементарных функций, нужно для начала подобно таблице умножения запомнить **наизусть** табличку производных самых наираспростейших функций. Вот она:

$$(1) \quad C' = 0 \text{ для любой константы } C$$

$$(2) \quad x' = 1$$

$$(3) \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \text{ где } \alpha \text{ — любое число, не зависящее от } x$$

$$(4) \quad (\sin x)' = \cos x$$

$$(5) \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(6) \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(7) \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

И опять-таки наизусть необходимо выучить следующие формулы, при помощи которых можно поиски производных сложных функций сводить к табличным случаям.

$$(8) \quad (Cf(x))' = Cf'(x), \text{ где } C \text{ — константа, т.е. не функция, а число}$$

$$(9) \quad (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(10) \quad (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$(11) \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$(12) \quad (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Заметим еще, что формула (12) позволяет вычислять производные от функций, которые представлены в виде последовательного применения не только двух, а любого числа функций. Например,

$$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x))) \cdot (g(h(x)))' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Применения производной

Говорится, что функция $y = f(x)$ *возрастает* на некотором промежутке I , если для любых $x, y \in I$ таких, что $x < y$, будет $f(x) < f(y)$. Геометрически это означает, что график функции идет подобно изображенному на рис. 1:

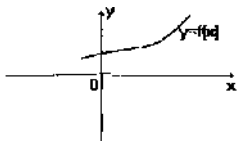


Рис. 1

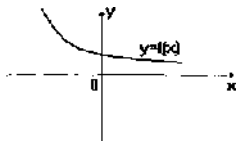


Рис. 2

Аналогично, если для любых x, y , $x < y$ из промежутка I имеем $f(x) > f(y)$, то функция $f(x)$ *убывает* на этом промежутке. График ее в этом случае ведет себя примерно так, как на рис. 2.

Необходимо иметь в виду, что говорить о том, что функция, скажем, возрастает, без упоминания промежутка бессмысленно. Типичная ошибка здесь такова: поступающие хорошо знают, что если производная меньше нуля, то функция убывает. При этом они часто забывают добавить дважды

«на промежутке». Если это проделать, то в результате получаем следующее (уже верное) правило:

если производная функции $f(x)$ больше (меньше) нуля во всех точках (**), как некоторого промежутка, то $f(x)$ возрастает (соответственно, убывает) на промежутке.

Вот рецепты для анализа поведения функций на промежутках.

1) Для нахождения областей возрастания и убывания функции $f(x)$ надо найти $f'(x)$ и решить неравенства $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$. После этого надо отобрать **промежутки**, на которых $f'(x) > 0$, и объявить, что на каждом из них (**отдельно!**) функция возрастает; аналогично на каждом из промежутков, где $f'(x) < 0$, исходная функция убывает.

2) Точки ОДЗ для $f(x)$, в которых производная равна нулю или не определена, называются *критическими*. Критическая точка a называется *точкой максимума*, если найдутся такие числа p и q , что

$$p < a < q \text{ и } f(a) \geq f(x) \text{ для любого } x \in (p, q).$$

Критическая точка называется *точкой минимума*, если найдутся такие числа p и q , что

$$p < a < q \text{ и } f(a) \leq f(x) \text{ для любого } x \in (p, q).$$

3) Если a — критическая точка, то ее характер (т.е. является ли она точкой минимума или максимума) определяется следующим образом:

3.1) если найдутся числа p и q такие, что $p < a < q$ и $f'(x) > 0$ при $p < x < a$, но $f'(x) < 0$ при $a < x < q$, то a есть точка максимума;

3.2) если найдутся числа p и q такие, что $p < a < q$ и $f'(x) < 0$ при $p < x < a$, но $f'(x) > 0$ при $a < x < q$, то a есть точка минимума;

3.3) если найдутся числа p и q такие, что $p < a < q$ и $f'(x)$ имеет одинаковый знак на интервалах (p, a) и (a, q) , то a не является ни точкой максимума, ни точкой минимума.

С первого взгляда может показаться, что эти правила трудно запомнить. Но вы же хорошо помните, возрастает или убывает функция в зависимости от знака производной. Если вы забыли, как определять характер точки, нарисуйте числовую ось, на ней точку a и знак производной слева и справа от a . Пусть, например, слева от a стоит знак минус, а справа — плюс (см. рис. 3). На этом же рисунке изображено стрелкой слева от a , что функция убывает на промежутке (p, a) , а стрелкой справа, что она возрастает на (a, q) .

Две стрелки, нарисованные на картинке, напоминают график функции. В действительности именно так себя будет вести сама функция, хотя график ее, разумеется, не обязан состоять из прямых линий. Из этого «графика» видно, что в точке a функция принимает наименьшее значение, т.е. точка a есть точка минимума.

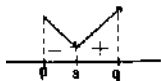


Рис. 3

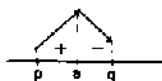


Рис. 4

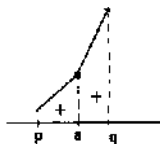


Рис. 5

Если слева от a производная имеет знак плюс, а справа — минус, то рис. 4 объясняет, почему получается точка максимума.

Если производная положительна слева и справа от a , то из рисунка 5 видно, почему a не есть ни точка минимума, ни точка максимума.

Аналогично выглядит ситуация, когда производная отрицательна как слева, так и справа от a .

4) Пусть функция $f(x)$ задана на некотором промежутке. Если требуется найти наибольшее (наименьшее) ее значение на этом промежутке, то нужно действовать следующим образом:

- 4.1) найти критические точки функции;
- 4.2) на промежутках знакопостоянства производной изобразить стрелками, возрастает или убывает функция на данном промежутке;
- 4.3) из получившегося рисунка будет видно, какие точки есть точки максимума, а какие — минимума;
- 4.5) вычислить значения в точках максимума (минимума) и на концах промежутка; наибольшее (соответственно, наименьшее) из них и будет наибольшим (соответственно, наименьшим) значением функции на исходном промежутке.

Самое общее уравнение прямой имеет вид $ax + by + c = 0$, где a, b, c — произвольные числа, причем a и b не равны нулю одновременно. Заметим, что если $b \neq 0$, то оно эквивалентно уравнению $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = px + q$, где $p = -\frac{a}{b}$, $q = -\frac{c}{b}$. Если $b = 0$, то $a \neq 0$, и получаем уравнение $x = -\frac{c}{a}$.

Таким образом, уравнение любой прямой может быть приведено к одному из двух видов: $x = c$ или $y = px + q$ (здесь c, p, q — произвольные числа).

Проще всего разобраться со случаем, когда мы имеем уравнение $x = c$. Оно задает прямую, параллельную оси Oy и пересекающую ось Ox в точке c (см. рис. 1).

Геометрически совершенно понятно, почему именно такой вид у этой прямой. Ведь в уравнении написано, что у данного множества точек все абсциссы равны c , а прямая на рис. 1 есть как раз геометрическое место точек, абсциссы которых равны c .

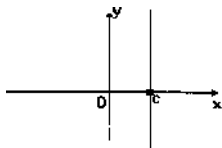


Рис. 1

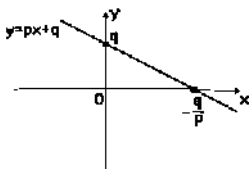


Рис. 2

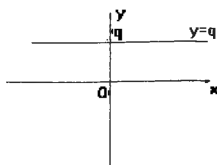


Рис. 3

Пусть теперь мы имеем уравнение прямой вида

$$(1) \quad y = px + q.$$

Анализируется оно следующим образом. Самые важные точки прямой — это точки пересечения с осями. Если $p \neq 0$, то прямая пересекается с каждой из осей. Точка (x, y) лежит на оси Ox только если $y = 0$. Отсюда $px + q = 0 \iff x = -\frac{q}{p}$. Тем самым, точка пересечения прямой (1) с осью абсцисс имеет вид $(-\frac{q}{p}, 0)$. Точка пересечения прямой (1) с осью ординат получается, если мы положим $x = 0$. Получим точку $(0, q)$. Если мы нарисуем обе найденные на осях точки и соединим их прямой, получится требуемый график (см. рис. 2).

Если же $p = 0$, то получим уравнение $y = q$. Соответствующая прямая будет параллельна оси абсцисс и пересечет ось ординат в точке $(0, q)$ (рис. 3).

Оказывается, если прямая (1) образует с осью Ox угол α , отсчитываемый против часовой стрелки (рис. 4), то $\operatorname{tg} \alpha = p$.

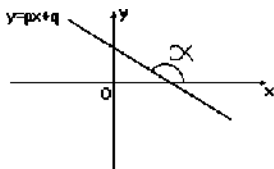


Рис. 4

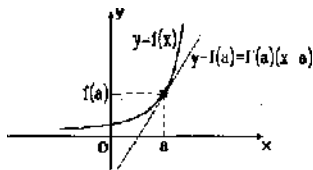


Рис. 5

В частности, прямая параллельна Ox , т.е. образует с этой осью угол 0, если и только если $p = 0$. Кроме того, если даны прямые $y = p_1x + q_1$ и $y = p_2x + q_2$, то они параллельны, если и только если образуют с Ox равные углы, т.е. если $p_1 = p_2$. Пусть дана функция $f(x)$, у которой существует производная $f'(a)$ в некоторой точке a . Тогда к графику функции $y = f(x)$ можно провести в этой точке касательную (см. рис. 5), уравнение которой записывается в виде

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \iff y = f'(a) \cdot x + f(a) - af'(a).$$

Из того, что $p = f'(a)$, следует, например, что касательная к графику функции в точке a параллельна оси абсцисс тогда и только тогда, когда производная в этой точке равна нулю; две касательные в разных точках параллельны, если и только если их производные в этих точках совпадают, и т.п.

9. Теоремы об общих и прямоугольных треугольниках

Следующие теоремы мы должны знать идеально.

- $$(1) \quad S = \frac{1}{2}ah_a = pr = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}ab \sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
- $$(2) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \text{ — теорема косинусов}$$
- $$(3) \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ — теорема синусов}$$

Естественно, и следствия этих теорем должны быть постоянно в нашей памяти и в любой момент готовы к применению. Например, мы написали, что $S = \frac{1}{2}ah_a$ и $S = \frac{1}{2}ab \sin C$. Но, конечно же, будет и $S = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B$. Если нам нужно найти, например, радиус r вписанной в треугольник окружности, то для него есть только одна формула — $r = \frac{S}{p}$. Если же мы ищем радиус R описанной окружности, то надо помнить четыре возможности для поиска R : $R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C} = \frac{abc}{4S}$. Для поиска площади таких возможностей еще больше и надо все их держать в памяти.

Теорема Пифагора — $a^2 + b^2 = c^2$ — очевидным образом вытекает из теоремы косинусов при $C = \frac{\pi}{2}$. Хорошо нужно владеть определениями тригонометрических функций: знать, что синус угла есть отношение противолежащего катета к гипотенузе, косинус его — отношение прилежащего катета к гипотенузе, тангенс есть отношение противолежащего катета к прилежащему, а котангенс — отношение прилежащего катета к противолежащему.

Отсюда следует, что $a = c \sin A = c \cos B = b \operatorname{tg} A = b \operatorname{ctg} B$, $b = c \cos A = c \sin B = a \operatorname{ctg} A = a \operatorname{tg} B$, $c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B} = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\cos A}$. Все приведенные равенства вы должны знать наизусть; в худшем случае — уметь вывести из определения.

10. Подобие, площади, параллелограммы

Два треугольника (соответственно, два четырехугольника) подобны, если можно обозначить вершины одного из них через A, B, C (A, B, C, D), а другого — через A_1, B_1, C_1 (соответственно, A_1, B_1, C_1, D_1) так, что будет $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ (соответственно, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\angle D = \angle D_1$) и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ (соответственно, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$).

Мы с вами должны хорошо знать три следующих признака признака подобия треугольников. Треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ в каждом из следующих случаев:

- 1) если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$;
- 2) если $\angle A = \angle A_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$;
- 3) если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Чаще всего подобие треугольников встречается в двух следующих ситуациях.

Ситуация 1. В треугольнике ABC проведена прямая $A_1C_1 \parallel AC$ (см. рис. 1).

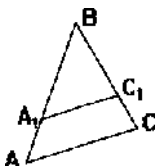


Рис. 1

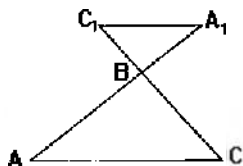


Рис. 2

Тогда треугольник ABC подобен треугольнику A_1BC_1 (по первому признаку — ибо $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ как внутренние односторонние углы секущих AB и BC при параллельных прямых AC и A_1C_1).

Ситуация 2. Прямая A_1C_1 пересекает продолжения сторон AB и BC (см. рис. 2).

Тогда треугольник ABC подобен треугольнику A_1BC_1 (по первому признаку — ибо $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ как внутренние накрест лежащие углы секущих AA_1 и CC_1 при параллельных прямых AC и A_1C_1).

Площади

Чаще всего нужно сводить задачу к поискам площадей треугольников, разбивая при необходимости более сложные фигуры на треугольники. Для сравнения площадей треугольников полезно применять следующие простые факты:

Факт 1. Пусть треугольники ABC и A_1B_1C таковы, что их стороны AB и A_1B_1 лежат на одной прямой (рис. 1).

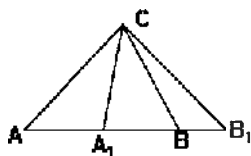


Рис. 1

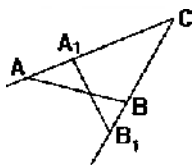


Рис. 2

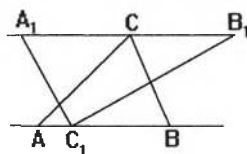


Рис. 3

Тогда

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C}} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Факт 2. Пусть треугольники ABC и A_1B_1C имеют общий угол C (см. рис. 2). Тогда

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C}} = \frac{AC \cdot BC}{A_1C \cdot B_1C}.$$

Факт 3. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ расположены так, что стороны AB и A_1B_1 параллельны, вершина C лежит на прямой A_1B_1 , а вершина C_1 лежит на прямой AB (рис. 3). Тогда

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C}} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Факт 4. Если треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$, то

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C}} = \left(\frac{AB}{A_1B_1} \right)^2 = \left(\frac{AC}{A_1C_1} \right)^2 = \left(\frac{BC}{B_1C_1} \right)^2,$$

т.е. отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Параллелограммы

1) Если диагонали произвольного выпуклого четырехугольника равны d_1 и d_2 и образуют угол α , то площадь четырехугольника может быть найдена по формуле

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \alpha.$$

2) Для того чтобы в выпуклый четырехугольник $ABCD$ можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы было $AB + CD = BC + AD$.

3) Для того чтобы вокруг выпуклого четырехугольника $ABCD$ можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма каких-нибудь двух его противоположных углов равнялась π .

4) Выпуклый четырехугольник является параллелограммом, если и только если его диагонали в точке пересечения делятся пополам.

5) Площадь параллелограмма $ABCD$ равна

$$S = AB \cdot BC \cdot \sin(\angle DAB) = AB \cdot h,$$

где h есть перпендикуляр, опущенный из точки B на сторону AD (т.е. высота параллелограмма).

6) Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC равна

$$\frac{1}{2}(AD + BC) \cdot h,$$

где h есть перпендикуляр, опущенный из точки B на сторону AD (т.е. высота трапеции).

7) Если $ABCD$ — параллелограмм, то

$$AC^2 + BD^2 = 2(AD^2 + AB^2),$$

т.е. сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

8) Параллелограмм описан вокруг некоторой окружности тогда и только тогда, когда он является ромбом; он вписан в некоторую окружность, если и только если является прямоугольником.

9) Ромб вписан в некоторую окружность, если и только если он есть квадрат.

10) Трапеция вписана в некоторую окружность тогда и только тогда, когда она является равнобедренной.

11. Окружности и общие многоугольники

1) Вписанный угол, т.е. угол, образованный двумя хордами, исходящими из одной точки окружности, равен по величине половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу (см. рис. 1), т.е. $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

На данном рисунке $\beta = \angle ACB$ — вписанный угол, а $\alpha = \angle AOB$ — центральный.



Рис. 1

Как следствие получаем, что два вписанных угла, опирающихся на одну и ту же дугу, равны. Другое следствие состоит в том, что вписанный угол равен 90° , если и только если он опирается на диаметр.

2) Пусть точка A лежит вне окружности, AB — касательная к окружности, AC и AF — секущие (см. рис. 2). Тогда $AD \cdot AC = AF \cdot AE = AB^2$, т.е. квадрат касательной, проведенной к окружности из произвольной точки, равен произведению любой секущей, проведенной из той же точки, на ее внешнюю часть. В частности, если из одной точки проведены к окружности две секущие, то произведения их длин на внешние части равны между собой. Мы даже доказали этот факт (см. урок 28, задача 9).

3) Пусть хорды AB и CD некоторой окружности пересекаются в точке O . (см. рис. 3). Тогда $AO \cdot OB = CO \cdot OD$. Этот факт мы тоже доказали (в задаче 8 урока 28).

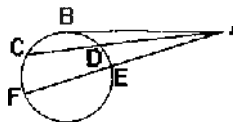


Рис. 2

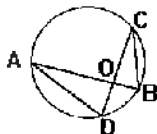


Рис. 3

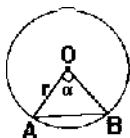


Рис. 4

4) Пусть мы имеем окружность с центром O радиуса r , точки A и B лежат на окружности, причем угол AOB равен α (рис. 4). Тогда площадь сектора AOB равна $\frac{1}{2}r^2\alpha$ (угол α обязательно должен быть выражен в радианах!). Площадь сегмента, ограниченного хордой AB равна $\frac{1}{2}r^2(\alpha - \sin \alpha)$. Длина дуги AB равна $r\alpha$. В частности, площадь круга (т.е. сектора при $\alpha = 2\pi$) равна πr^2 , а длина окружности (т.е. дуги при $\alpha = 2\pi$) есть $2\pi r$.

5) Если существует окружность, вписанная в многоугольник, то центр ее лежит в точке пересечения всех биссектрис этого многоугольника. Если

существует окружность, описанная около многоугольника, то ее центр лежит в точке пересечения всех серединных перпендикуляров к сторонам многоугольника. Разумеется, все сказанное относится и к треугольникам, с той лишь разницей, что у них всегда существуют и вписанная и описанная окружности.

6) Окружности радиусов R и r касаются внешним образом тогда и только тогда, когда расстояние между их центрами равно $R + r$; их касание будет внутренним, если и только если расстояние между их центрами равно $R - r$.

1) Сумма углов произвольного выпуклого n -угольника равна $\pi(n - 2)$.

2) Правильный n -угольник может быть вписан в окружность и описан около окружности.

3) Если a — сторона правильного n -угольника, то его площадь равна $\frac{1}{4}na^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$, радиус описанной около него окружности равен $R = \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$, радиус вписанной в него окружности равен $\frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$.

12. Геометрические места точек и задачи на построение

В решении задачи на ГМТ должны присутствовать три момента:

1) предъявлено множество P , про которое мы утверждаем, что оно — искомое;

2) доказано, что каждая точка множества P обладает заданным свойством;

3) доказано, что нет других точек, обладающих данным свойством.

Тремя важнейшими ГМТ на плоскости являются следующие:

а) ГМТ, равноудаленных от точек A и B — это прямая, перпендикулярная к отрезку AB и проходящая через его середину;

б) ГМТ, удаленных на расстояние R от данной точки O — это окружность радиуса R с центром в точке O ;

в) ГМТ, из которых данный отрезок AB виден под данным углом α (под этим для краткости понимает-ся множество таких точек M , что угол AMB равен α) — это объединение двух дуг окружностей радиуса $R = \frac{AB}{2 \sin \alpha}$ с центрами на серединном перпендикуляре к отрезку AB , лежащими на расстоянии $R \cos \frac{\alpha}{2}$ от прямой AB (см. рис. 1), симметричных относительно прямой AB (точки A и B не принадлежат этому множеству). В частности, ГМТ, из которых данный отрезок виден под прямым углом есть окружность, построенная на этом отрезке как на диаметре.

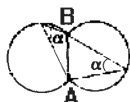


Рис. 1

Если мы знаем ГМТ M_1 , определяемое свойством P_1 , и ГМТ M_2 , определяемое свойством P_2 , то ГМТ, для которых одновременно выполняются свойства P_1 и P_2 , есть пересечение множеств M_1 и M_2 .

Общих рецептов нахождения ГМТ дать невозможно. Как правило, можно понять, как устроено искомое ГМТ, если разбить данное свойство на более простые, найти соответствующие более простые ГМТ и из них построить искомое. Иногда удается удачно ввести систему координат и записать данное свойство в виде формулы $f(x, y) = 0$. В этом случае помогут методы из урока 25. Иногда нужно просто угадать хорошую геометрическую закономерность, присутствующую в данном свойстве.

Важнейшими ГМТ в пространстве являются следующие:

а) ГМТ, удаленных на расстояние $R > 0$ от данной точки O , есть (по определению) сфера радиуса R с центром в точке O .

б) ГМТ, равноудаленных от двух различных точек A и B , есть плоскость P , перпендикулярная отрезку AB и проходящая через его середину.

в) ГМТ, равноудаленных от трех не лежащих на одной прямой точек A , B и C есть прямая, перпендикулярная плоскости ABC и проходящая через центр окружности, описанной около треугольника ABC .

г) ГМТ, равноудаленных от сторон двугранного угла, есть его биссектральная плоскость.

д) Геометрическим местом точек $M(x, y, z)$ пространства с системой координат $Oxyz$ таких, что $Ax + By + Cz + D = 0$ (A, B, C, D — числа такие, что $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$), является плоскость, перпендикулярная вектору $n\{A, B, C\}$.

е) Уравнение $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$, где $R > 0$, задает сферу радиуса R с центром в точке $O(a, b, c)$.

Когда в задаче мы читаем «Построить циркулем и линейкой то-то и то-то», мы отнюдь не обязаны где-то раздобыть циркуль и линейку, чтобы вычертить то, что указано. Решение задачи на построение состоит в описании последовательности операций, которые нужно проделать так называемыми идеальными циркулем и линейкой для того, чтобы получить нужную фигуру.

Что такое идеальный циркуль? Это нечто, чем можно проделывать следующие операции:

Ц-1) провести окружность с центром в любой точке плоскости и радиусом, равным длине любого *наперед выбранного* отрезка на плоскости;

Ц-2) найти точки пересечения проведенной окружности с любым *наперед заданным* объектом на плоскости (окружностью, прямой, отрезком и т.п.), если они (точки) имеются.

Идеальная линейка позволяет

Л-1) провести прямую через любые две заданные точки на плоскости;

Л-2) найти пересечение проведенной прямой с любыми *доселе заданными* объектами на плоскости (правда, таковое может оказаться пустым).

При этом слово «найти» означает возможность далее применять операции Ц-1, Ц-2 и Л-1, Л-2 к получившимся точкам, т.е. проводить через них прямые, отмерять радиус и проводить окружности.

Задача на построение считается решенной, если

- точно указана последовательность операций;
- доказано, что в результате их применения получится нужная фигура;
- разобраны все возможные случаи, при которых задача имеет решение и указано, сколько решений имеется.

На практике допускается вместо последовательности самих операций (будем называть их элементарными) указывать последовательность блоков операций, при условии, что вам ясно, как разложить каждый блок на элементарные операции. Например, если на плоскости задана прямая и точка, можно (и это будет делаться на данном уроке) считать одной операцией проведение через заданную точку прямой, перпендикулярной данной или параллельной данной. Выражение этих операций через элементарные абитуриенты, как правило, проводят неплохо.

13. Свойства и расположение корней квадратного трехчлена

1. (Необязательно квадратные) уравнения (или неравенства) называются *эквивалентными* или *равносильными*, если множества их решений совпадают.

2. Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни тогда и только тогда, когда

$$D = b^2 - 4ac \geq 0.$$

3. Корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ называются корни (если они существуют) уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

4. Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет при $a \neq 0$ не более двух корней.

5. (Теорема Виета). Пусть дано уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ и $a \neq 0$. Если x_1 и x_2 — различные его корни, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Если это уравнение имеет единственный корень x_1 , то теорема Виета остается верной, если положить $x_2 = x_1$.

6. (Частный случай теоремы Виета). Если уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет различные корни x_1 и x_2 , то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q. \end{cases}$$

Если это уравнение имеет единственный корень x_1 , то указанные равенства будут выполняться, если положить $x_2 = x_1$.

7. Если уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет различные корни x_1 и x_2 , то имеет место тождество $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$.

Если имеется единственный корень x_1 , то $x^2 + px + q = (x - x_1)^2$.

8. Если уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет при $a \neq 0$ два различных корня x_1 и x_2 , то имеет место тождество $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Если имеется единственный корень x_1 , то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

9. В частности, если известно, что x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения с ненулевым коэффициентом при x^2 , то это уравнение можно записать в виде $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$. Обратите внимание, что x_1 и x_2 здесь — конкретные числа, а x — переменная.

10. Не рецептом, но помощью против логических трудностей при решении задач с параметром можно считать **выучивание наизусть фразы о том, что требуется найти в задаче, и повторение ее (скажем, 100 раз) до тех пор, пока она сама неотвязно не будет вертеться в голове**. Эта вертящаяся в голове фраза поможет рассуждать в нужном направлении.

Расположение корней

1. Прямая $x = x_0 = -\frac{b}{2a}$ — ось параболы, которая является одновременно осью ее симметрии. Формула (1) показывает, что точка (x_0, y_0) является вершиной параболы, где $y_0 = f(x_0) = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

2. Знак числа a показывает, куда направлены ветви параболы — если $a > 0$, то вверх, если $a < 0$, то вниз.

3. Дискриминант $D = b^2 - 4ac$ показывает, пересекается ли парабола с осью абсцисс. При $a > 0$, $D < 0$ парабола «висит» над осью Ox (рис. 1).

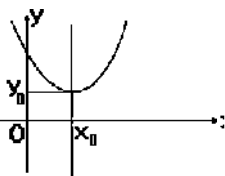


Рис. 1

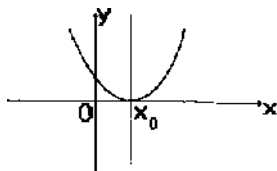


Рис. 2

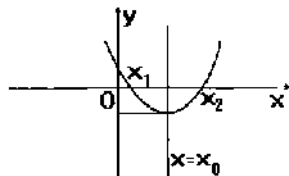


Рис. 3

Если $a > 0$ и $D = 0$, то парабола касается сверху оси Ox (рис. 2).

Если $a > 0$ и $D > 0$, то парабола пересекает ось Ox в двух точках — корнях параболы (рис. 3)

4. Если $a < 0$ и $D < 0$, то парабола «висит» под осью Ox (рис. 4). В случае, когда $a < 0$ и $D = 0$ она касается оси Ox снизу (рис. 5). В случае, когда $a < 0$ и $D > 0$, парабола пересекает ось Ox в двух точках x_1 и x_2 , являющихся ее корнями (рис. 6).

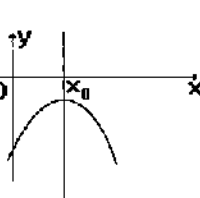


Рис. 4

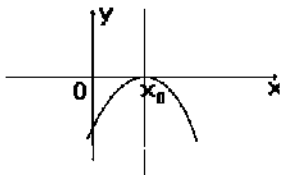


Рис. 5

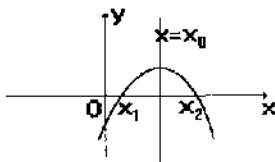


Рис. 6

Указанные свойства парабол позволяют доказать следующие факты, касающиеся расположения корней квадратного трехчлена на числовой оси. На первом уровне достаточно хорошо запомнить эти факты, на втором и третьем необходимо уметь доказывать их.

5. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$ и M — точка на оси абсцисс. Тогда оба корня x_1 и x_2 трехчлена $f(x)$ будут строго меньше M , если и только если выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0, \\ x_0 < m, \\ f(M) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ D \geq 0, \\ x_0 < M, \\ f(M) < 0. \end{cases}$$

Здесь $f(M) = aM^2 + bM + c$ — подстановка M вместо переменной квадратного трехчлена. Ситуация проиллюстрирована на рисунках 7 и 8.

6. Если M — какое-то число, то $x_1 < M < x_2$ в том и только том случае, когда $a \cdot f(M) < 0$ (рис. 9).

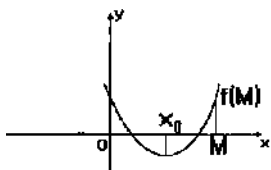


Рис. 7

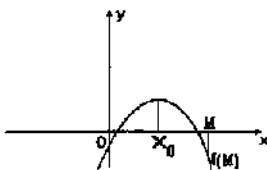


Рис. 8

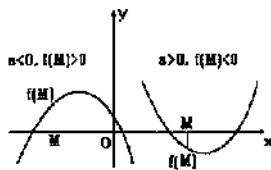


Рис. 9

7. Оба корня трехчлена $f(x)$ больше некоторого числа M , если и только если

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0, \\ x_0 > M, \\ f(M) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ D \geq 0, \\ x_0 > M, \\ f(M) < 0; \end{cases}$$

см. рисунки 10 и 11.

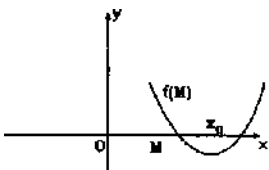


Рис. 10

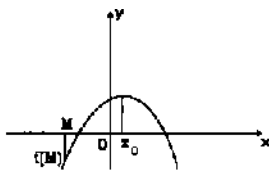


Рис. 11

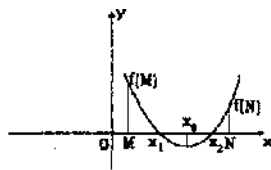


Рис. 12

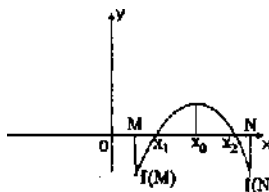


Рис. 13

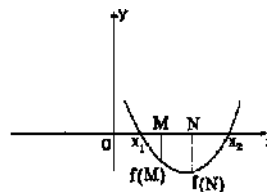


Рис. 14

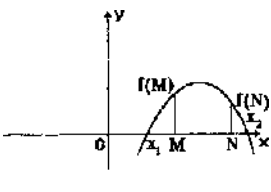


Рис. 15

8. Оба корня x_1, x_2 квадратного трехчлена $f(x)$ лежат на интервале (M, N) , если и только если

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0, \\ x_0 \in (M, N), \\ f(M) > 0, \\ f(N) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ D \geq 0, \\ x_0 \in (M, N), \\ f(M) < 0, \\ f(N) < 0 \end{cases}$$

(см. рисунки 12 и 13).

И, наконец, отрезок $[M, N]$ целиком лежит в интервале (x_1, x_2) тогда и только тогда, когда $a \cdot f(M) < 0$ и $a \cdot f(N) < 0$ (см. рис. 14 и 15).

14. Реализация простейших логических операций

Пусть дана система уравнений (или неравенств) с двумя переменными, зависящая от параметра, причем требуется отыскать все значения параметра, при которых она имеет единственное решение. Часто срабатывает следующий прием: экспериментируя, находим, что если (x_0, y_0) — решение системы, то и $(-x_0, y_0)$ — тоже ее решение (не обязательно будет так, что решение останется решением при замене знака x_0 , может быть, это произойдет при замене y_0 на $y_0 + 1$ и т.п. — поиск такой закономерности и назван экспериментированием). Далее рассуждаем так: пусть параметр(ы) таков(ы), что система имеет единственное решение (x_0, y_0) . Тогда $(-x_0, y_0)$ — тоже решение системы, совпадающее с (x_0, y_0) (ибо последнее единственно). Значит, $x_0 = -x_0 \iff x_0 = 0$, и уже можно подставить $x_0 = 0$ в данную систему и найти y_0 и параметр(ы). После этого необходимо убедиться, что найденные значения параметров удовлетворяют условию задачи. Для этого их надо подставить в исходную систему и проверить, будет ли решение (x_0, y_0) единственным.

Если требуется найти значения параметров, при которых два данных уравнения (зависящие от параметров) эквивалентны, то чаще всего надо угадать корень одного из них и подставить в другое. Это часто позволяет найти параметры, которые потом еще необходимо проверить на предмет выполнения условий задачи. Если логическое высказывание про a нестандартно, надо стремиться упрощать его, разбивая на объединение более простых, следя за тем, чтобы совокупность этих более простых высказываний логически была в точности эквивалентна рассматриваемому. Часто полезно воспользоваться методами, приведенными на уроке 25, и нарисовать на плоскости множество решений данного уравнения (неравенства, системы). Тогда логические высказывания о свойствах уравнения (неравенства, системы) можно перевести на геометрический язык и понять, как решать задачу. Вот пример такого перевода: каждое решение одной системы является решением другой, если и только если множество решений первой системы, нарисованное на плоскости, целиком лежит в множестве решений второй системы.

15. Нестандартные задачи

Мажорантой данной функции $f(x)$ на множестве P (или множества A чисел) называется такое число M , что либо $f(x) \leq M$ для всех $x \in P$, либо $f(x) \geq M$ для всех $x \in P$ (соответственно, $x \leq M$ для всех x из A или $x \geq M$ для всех $x \in A$). Мы знаем много мажорант для известных функций. Например, любое число, большее или равное 1, будет мажорантой для функций $\sin x$ и $\cos x$ на любом множестве.

Основная идея метода мажорант (она, кстати, уже встречалась в предыдущих главах) состоит в следующем:

Пусть мы имеем уравнение $f(x) = g(x)$ и существует такое число M , что для любого x из области определения $f(x)$ и $g(x)$ имеем $f(x) \leq M$ и $g(x) \geq M$. Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ эквивалентно системе

$$\begin{cases} f(x) = M, \\ g(x) = M. \end{cases}$$

Как искать такое число M ? Ну, это просто. Вы ведь владеете таким мощным средством исследования функций как производная. С ее помощью вы можете найти наибольшее значение функции $f(x)$ и наименьшее значение $g(x)$. Если они совпадают, то за M можно принять их общее значение. Но чаще всего производная не понадобится, если вы хорошо владеете следующими неравенствами:

$$(1) \quad a + \frac{1}{a} \geq 2 \text{ при } a > 0 \text{ и } a + \frac{1}{a} \leq -2 \text{ при } a < 0,$$

причем равенство достигается только при $a = \pm 1$.

$$(2) \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ при } a \geq 0, b \geq 0,$$

причем равенство достигается только при $a = b$.

Впрочем, лучше всего осваивать метод мажорант в процессе решения задач.

Часто используется монотонность функций. Например, если у вас есть уравнение $f(x) = c$ и функция f возрастает, то она может принимать значение c не более, чем в одной точке. А эту точку, как правило, можно просто угадать.

Геометрический подход

Многие негеометрические задачи можно решить геометрическими методами. Точнее было бы назвать эти методы координатными, поскольку применение их состоит в изображении на координатной плоскости графиков и множеств, относящихся к заданной ситуации, и, в зависимости от геометрических свойств последних, упрощение рассматриваемой задачи.

Здесь требуется хорошее владение построением множеств на плоскости, так что проверьте себя, решив две первых и две последних задачи урока 25. Если есть проблемы, повторите этот урок, пожалуйста.

16. Основные формулы стереометрии

I. Основные теоремы стереометрии

1. Теоремы о параллельности прямых и плоскостей

а) Если прямая параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна самой плоскости.

б) Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости и пересекает эту другую плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна первой прямой.

в) Если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то получившиеся две линии пересечения параллельны.

г) Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны соответственно двум пересекающимся прямым второй плоскости, то эти плоскости параллельны.

2. Теоремы о перпендикулярности прямых и плоскостей

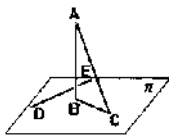


Рис. 1

а) Для того, чтобы прямая была перпендикулярна к плоскости, необходимо и достаточно, чтобы она была перпендикулярна к двум произвольным непараллельным прямым, лежащим в этой плоскости.

б) Для того, чтобы прямая DE , лежащая в плоскости π , была перпендикулярна наклонной AC к этой плос-

кости, необходимо и достаточно, чтобы DE была перпендикулярна к ее проекции BC (см. рис. 1). (Это чуть более общая теорема, чем та, что в школе называется теоремой о трех перпендикулярах. Я для краткости буду называть эту теорему теоремой о трех перпендикулярах).

в) Если две прямые перпендикулярны к одной и той же плоскости, то они параллельны.

г) Если две плоскости перпендикулярны к одной и той же прямой, то они параллельны.

д) Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и к другой.

е) Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

3. С к р е щ и в а ю щ и е с я п р я м ы е

а) Угол между скрещивающимися прямыми k и l определяется как угол между прямой k и любой прямой, пересекающей k и параллельной l .

б) Расстояние между скрещивающимися прямыми находится как расстояние от одной из этих прямых до плоскости, содержащей другую прямую и параллельной первой прямой.

4. К р у г л ы е т е л а

а) Если из точки, лежащей вне сферы, к этой сфере проведены две касательные, то длины их равны.

б) Если из точки A , лежащей вне сферы, к сфере проведены секущая ABC (B и C — точки ее пересечения со сферой) и касательная AD , то

$$AB \cdot AC = AD^2.$$

в) Если дана сфера с центром O и плоскость π касается сферы в точке A , то радиус OA перпендикулярен плоскости π .

II. Основные формулы стереометрии

1. П р и з м а

а) Площадь боковой поверхности призмы равна боковому ребру, умноженному на периметр сечения призмы плоскостью, перпендикулярной боковым ребрам.

б) Объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

в) Площадь боковой поверхности прямой призмы равна периметру ее основания, умноженному на высоту.

2. П и р а м и д а

а) Объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту (т.е. $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot H$, где S — площадь основания, а H — высота).

б) Объем усеченной пирамиды с площадями оснований S_1 и S_2 и высотой H равен $V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})H$.

в) Объем любого многогранника (и, в частности, пирамиды), описанного около шара радиуса R , равен $V = \frac{1}{3}SR$, где S — площадь полной поверхности многогранника.

3. Ц и л и н д р

а) Площадь боковой поверхности цилиндра равна $S = 2\pi RH$, где R — радиус основания и H — высота.

б) Объем цилиндра равен $V = \pi R^2 H$.

4. П р я м о й к р у г о в о й к о н у с

а) Площадь боковой поверхности прямого кругового конуса с радиусом R и высотой H равна $\pi R\sqrt{R^2 + H^2}$.

б) Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна

$$S = \pi(R_1 + R_2)L,$$

где R_1 и R_2 — радиусы оснований, а L — образующая.

в) Объем (не обязательно прямого кругового) конуса равен $V = \frac{1}{3}SH$, где S — площадь основания, H — высота.

г) Объем усеченного конуса равен $V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})H$, где S_1 и S_2 — площади оснований и H — высота.

5. С ф е р а, ш а р

а) Площадь сферы равна $S = 4\pi R^2$, где R — ее радиус.

б) Площадь шарового сегмента равна $2\pi RH$, где H — высота сегмента.

в) Объем шара равен $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

г) Объем шарового сегмента равен $V = \pi H^2(R - \frac{H}{3})$.

17. Векторы

Под вектором обычно понимается направленный отрезок (на плоскости или в пространстве). Слово «направленный» означает, что он отличается от обычного отрезка тем, что один его конец называется началом, а другой — концом (прошу прощения за выражение «конец называется концом», но, видимо, никак иначе сказать нельзя). При этом для того, чтобы сразу

видно было, где начало вектора, а где его конец, над ним рисуется стрелка. Например, запись $\overrightarrow{AB}$ означает, что начало вектора есть точка A , а его конец — точка B . Начало и конец вектора могут совпадать. В этом случае он называется нулевым вектором. Иногда стрелка будет стоять над одной буквой (например, $\vec{x}$). Это означает, что $\vec{x}$ есть некий вектор, конец и начало которого не указываются.

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, лежащие на разных прямых, называются равными, если $AB \parallel CD$ и $AC \parallel BD$. Если эти векторы лежат на одной прямой, то они равны в том и только том случае, когда $AB = CD$ и один из лучей, порожденных этими векторами, содержится в другом. При этом луч, порожденный вектором $\overrightarrow{AB}$, есть множество всех точек прямой AB , лежащих с той же стороны от A , что и точка B .

На интуитивном уровне можно понимать равенство векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ как возможность некоторым параллельным переносом перевести точку A в точку C и одновременно точку B в точку D . Кроме того мы не будем различать равные векторы. Выгода от этого будет видна в дальнейшем.

Напомним еще, что умножение вектора $\vec{x}$ на число α дает вектор $\alpha \cdot \vec{x}$, параллельный $\vec{x}$, длина которого есть длина $\vec{x}$, умноженная на $|\alpha|$, одинаково направленный с $\vec{x}$ (в очевидном смысле), если $\alpha > 0$, и направленный противоположно, если $\alpha < 0$.

Легко проверяется, что если в пространстве (на плоскости) заданы вектор $\vec{x}$ и произвольная точка A , то существует такая точка B пространства (плоскости), что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{x}$ равны.

Векторы можно складывать друг с другом. Это можно делать, применяя любое из двух правил:

- *правило треугольника*: если даны векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$, то нужно выбрать точки A, B и C так, чтобы было $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, а $\overrightarrow{BC} = \vec{y}$ (убедитесь сами, что это всегда возможно). Тогда $\vec{x} + \vec{y}$ есть по определению вектор $\overrightarrow{AC}$.
- *правило параллелограмма*: нужно выбрать точки A, B, C и D так, чтобы было $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{y}$ и чтобы четырехугольник $ABDC$ был параллелограммом. Тогда $\overrightarrow{AD} = \vec{x} + \vec{y}$.

По определению $\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-1) \cdot \vec{y}$.

Последняя операция над векторами, которую мы должны уметь производить, — это скалярное произведение. Если даны векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$, то их скалярным произведением $(\vec{x}, \vec{y})$ называется произведение длин этих векторов (обозначаемых далее $|\vec{x}|$ и $|\vec{y}|$) на косинус угла между ними. Ясно, что, в частности, $(\vec{x}, \vec{x}) = |\vec{x}|^2$.

Векторы в пространстве (на плоскости) можно задавать координатами. Делается это так. Пусть $\vec{x}$ — произвольный вектор пространства (плоскости), в котором (на которой) задана координатная система $Oxyz$ (соот-

ветственно Oxy). Выберем такую точку A пространства (плоскости), что $\overrightarrow{OA} = \vec{x}$. Тогда координаты точки A есть по определению координаты вектора $\vec{x}$. При этом будет употребляться запись $\vec{x} = \{a, b, c\}$, где a, b, c — координаты точки A .

Если $\vec{x} = \{a_1, b_1, c_1\}$, $\vec{y} = \{a_2, b_2, c_2\}$ и α — произвольное число, то $\vec{x} + \vec{y} = \{a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2\}$, $\vec{x} - \vec{y} = \{a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2\}$ и $\alpha \cdot \vec{x} = \{\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot b_1, \alpha \cdot c_1\}$.

Если даны точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их координаты.

Если даны векторы $\vec{x} = \{a_1, b_1, c_1\}$ и $\vec{y} = \{a_2, b_2, c_2\}$, то их скалярное произведение вычисляется по формуле

$$(\vec{x}, \vec{y}) = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2.$$

В частности, $|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$. Кроме того, из определения скалярного произведения следует, что угол φ между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ определяется из соотношения

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}| |\vec{y}|} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

В частности, векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$.

Единичный (т.е. единичной длины) вектор $\vec{x}_0$, сонаправленный с вектором $\vec{x}$, находится по формуле

$$\vec{x}_0 = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}.$$

Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они параллельны. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору. Ненулевые векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны, если и только если найдется такое число α , что $\alpha \cdot \vec{x} = \vec{y}$.

Глава 2

Некоторые доказательства

1. Формула корней квадратного уравнения

Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$. Преобразуем его эквивалентным образом:

$$\begin{aligned} & ax^2 + bx + c = 0 \\ & \quad \Downarrow \\ & x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0 \quad (\text{поделили на } a \neq 0) \\ & \quad \Downarrow \\ & x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \\ & \quad \Downarrow \\ (1) \quad & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \end{aligned}$$

Если $D = b^2 - 4ac < 0$, то квадрат слева равен отрицательному числу справа, чего быть не может, т.е. решений нет.

Если $D = 0$, то уравнение равносильно тому, что $x + \frac{b}{2a} = 0$, т.е. в этом случае имеется единственное решение $x = -\frac{b}{2a}$.

Наконец, если $D > 0$, то уравнение (1) эквивалентно тому, что

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

и уравнение имеет два корня

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. В случае, когда квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) имеет корни x_1 и x_2 (при $D = 0$ считаем, что есть два совпадающих корня), имеют место равенства

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}, \end{cases}$$

называемые теоремой Виета и проверяемые непосредственной подстановкой.

Следствие 2. В случае, когда квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) имеет корни x_1 и x_2 (при $D = 0$ считаем, что есть два совпадающих корня), для любого x имеет место равенство

$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + bx + c.$$

Доказательство. Оно состоит в тривиальном раскрытии скобок:

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2) = \\ &= a\left(x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

— мы, естественно, воспользовались теоремой Виета.

2. Тригонометрические формулы

Самые трудные доказательства — у формул синуса и косинуса суммы. Я начну с этих формул и выведу из них все остальные.

Напомню, что косинус угла в α радиан есть абсцисса такой точки M на тригонометрическом круге, что угол, который составляет отрезок OM с осью Ox (O — начало координат), измеряемый при вращении отрезка $[0, 1]$ оси Ox против часовой стрелки, равен α (рис. 1).

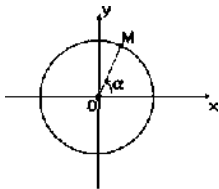


Рис. 1

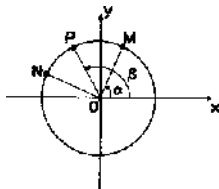


Рис. 2

Для произвольных α и β возьмем на круге точку M , определяющую угол α , и точку P , определяющую угол β (рис. 2).

По определению синуса и косинуса имеем

$$\overrightarrow{OM} = \{\cos \alpha, \sin \alpha\} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OP} = \{\cos \beta, \sin \beta\}.$$

Эти равенства в координатах означают, что если мы возьмем векторы $\vec{e}_1 = \{1, 0\}$ и $\vec{e}_2 = \{0, 1\}$, то векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OP}$ запишутся в виде

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \cos \alpha \cdot \vec{e}_1 + \sin \alpha \cdot \vec{e}_2, \\ \overrightarrow{OP} = \cos \beta \cdot \vec{e}_1 + \sin \beta \cdot \vec{e}_2. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим систему координат $Ox'y'$ с началом O , ось Ox' которой идет по прямой OM , а ось Oy' — по прямой ON , перпендикулярной OM (рис. 2).

Ясно, что угол от оси OM до OP в этой новой системе координат будет равен $\beta - \alpha$, а роль векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ будут играть соответственно векторы $\vec{f}_1 = \overrightarrow{OM}$ и $\vec{f}_2 = \overrightarrow{ON}$.

Из перпендикулярности ON и OM следует, что

$$\overrightarrow{ON} = \vec{f}_2 = \{-\sin \alpha, \cos \alpha\}.$$

В системе координат $Ox'y'$ вектор $\overrightarrow{OP}$ разложится по составляющим векторам $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ следующим образом:

$$\overrightarrow{OP} = \cos(\beta - \alpha) \cdot \vec{f}_1 + \sin(\beta - \alpha) \cdot \vec{f}_2.$$

Приравняем найденный двумя разными способами вектор $\overrightarrow{OP}$:

$$\overrightarrow{OP} = \cos(\beta - \alpha) \cdot \vec{f}_1 + \sin(\beta - \alpha) \cdot \vec{f}_2 = \cos \beta \cdot \vec{e}_1 + \sin \beta \cdot \vec{e}_2.$$

Теперь подставим в это равенство выражения векторов $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ через векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$:

$$\begin{aligned} & \cos(\beta - \alpha) \cdot (\cos \alpha \cdot \vec{e}_1 + \sin \alpha \cdot \vec{e}_2) + \sin(\beta - \alpha) \cdot (-\sin \alpha \cdot \vec{e}_1 + \cos \alpha \cdot \vec{e}_2) = \\ & = (\cos(\beta - \alpha) \cos \alpha - \sin(\beta - \alpha) \sin \alpha) \vec{e}_1 + (\cos(\beta - \alpha) \sin \alpha + \sin(\beta - \alpha) \cos \alpha) \vec{e}_2 = \\ & = \cos \beta \cdot \vec{e}_1 + \sin \beta \cdot \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Теперь мы имеем право приравнять коэффициенты при векторах $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, ибо два вектора равны, если и только если равны их координаты, а коэффициенты при названных векторах и есть координаты этих векторов.

Итак, имеем два равенства:

$$\begin{cases} \cos(\beta - \alpha) \cos \alpha - \sin(\beta - \alpha) \sin \alpha = \cos \beta \\ \cos(\beta - \alpha) \sin \alpha + \sin(\beta - \alpha) \cos \alpha = \sin \beta. \end{cases}$$

Они выполняются для произвольных α и β , так что можно положить $\beta - \alpha = x$, $\alpha = y$. Тогда $\beta = x + y$ и мы получим

$$(1) \quad \begin{cases} \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y. \end{cases}$$

Подставляя в равенства (1) $-y$ вместо y и пользуясь тем, что $\sin(-y) = -\sin y$, $\cos(-y) = \cos y$, получим формулы для синуса и косинуса разности:

$$(2) \quad \begin{cases} \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y, \\ \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y. \end{cases}$$

Проще всего из формул (1) выводятся формулы двойных углов.

$$\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x,$$

$$\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Если точка $M(x, y)$ на тригонометрическом круге задает угол α , то $x = \cos \alpha$ и $y = \sin \alpha$. По теореме Пифагора имеем

$$1 = OM^2 = x^2 + y^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha,$$

и мы доказали основное тригонометрическое тождество. С его помощью можно получить выражения для $\cos 2x$ через $\sin x$ и через $\cos x$.

Если мы сложим правые части выражений для $\cos(x+y)$ и $\cos(x-y)$, то получим, что

$$(3) \quad \cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y.$$

Если положить $x+y = \alpha$ и $x-y = \beta$, то, очевидно, будет $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ и $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$ — получаем формулу преобразования суммы косинусов в произведение:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Совершенно аналогично получаются все остальные формулы преобразования сумм в произведения. Если поделить на 2 обе части формулы (3), то получим формулу преобразования произведения косинусов в сумму.

Остальные формулы преобразования произведений в сумму доказываются аналогично.

Выведем еще формулу тангенса суммы:

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}.$$

Теперь поделим числитель и знаменатель на $\cos x \cos y$ (в предположении, что это произведение не равно нулю):

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \frac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

3. Метод интервалов

Предположим, что мы имеем неравенство

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0, \text{ или } \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0, \text{ или } \frac{f(x)}{g(x)} > 0, \text{ или } \frac{f(x)}{g(x)} < 0,$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены, причем они уже разложены на простейшие множители, т.е. являются произведениями многочленов вида $x - a$.

Я опишу метод интервалов на конкретном примере. Пусть мы пришли к неравенству

$$(1) \quad \frac{(x-3)^2(x-7)^3(x+1)}{(x-2)(x+4)^4} \geq 0$$

(обязательно должно быть $(x-2)$, а не $2-x$, именно $x-7$, а не $7-x$ и т.д. Этого всегда можно добиться, умножая неравенство на -1 и меняя одновременно его знак столько раз, сколько надо).

Отметим жирными точками нули числителя и прозрачными — нули знаменателя (см. рис. 1). Если бы неравенство (1) было строгим, нужно было бы все нули сделать прозрачными.

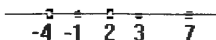


Рис. 1

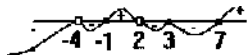


Рис. 2

После этого справа налево ведем змейку (рис. 2) по следующему правилу: она приходит сверху, меняет знак на нечетной степени и сохраняет на четной.

Теперь остается только выписать ответ: $x \in [-1, 2) \cup \{3\} \cup [7, +\infty)$. Важно не забыть $x = 3$.

Докажем, что этот ответ действительно такой, как написан. В самом деле, если $x > 7$, то все сомножители и в числителе и в знаменателе строго больше нуля. Значит, дробь сама больше нуля и мы доказали, что «змейка приходит сверху».

Следующий интервал, который мы должны рассмотреть, — это $(3, 7)$. Но при переходе через 7 все сомножители дроби, кроме одного (а именно, $x-7$), остались без изменения. Сомножитель $x-7$ изменил знак на противоположный, так что и вся дробь меняет знак и змейка идет в минус.

Следующий интервал — $(2, 3)$. По сравнению с предыдущей ситуацией, только один сомножитель (а именно, $x-3$) изменил свой знак на противоположный. Но этот сомножитель стоит в квадрате. Значит, дробь не изменит

знак, и на этом интервале змейка будет идти также в минусе. Дальше рассуждения идентичны. Какой бы ни был знак дроби на интервале между корнями, при переходе через очередной корень a только множитель $x - a$ меняет знак. Если он стоит в четной степени, то ясно, что дробь знака не изменит и змейка останется там же, где шла. Если же $x - a$ стоит в нечетной степени, то вслед за изменением знака у $x - a$ изменится знак у всей дроби и змейку нужно рисовать в другом знаке.

Проведенное рассуждение доказывает, что получился правильный ответ на интервалах между корнями. Ясно, что если неравенство строгое, то на концах выбранных интервалов дробь либо равна нулю (если $x - a$ стоит в числителе), либо не определена (если $x - a$ стоит в знаменателе), и ни то, ни другое нам не годится.

Если же неравенство нестрогое, то к его решениям относятся те числа, для которых дробь определена и обращается в нуль, т.е. мы должны отобрать нули числителя и отбросить нули знаменателя, что и было сделано выше.

4. Простейшие случаи раскрытия радикалов

Я докажу, что имеют место следующие эквивалентности.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \sqrt{f(x)} = g(x) &\iff \begin{cases} f(x) = (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \\
 (2) \quad \sqrt{f(x)} \geq g(x) &\iff \begin{cases} f(x) \geq (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\
 (3) \quad \sqrt{f(x)} > g(x) &\iff \begin{cases} f(x) > (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\
 (4) \quad \sqrt{f(x)} < g(x) &\iff \begin{cases} f(x) < (g(x))^2 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \\
 (5) \quad \sqrt{f(x)} \leq g(x) &\iff \begin{cases} f(x) \leq (g(x))^2 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Напомним, что квадратные скобки означают, что каждая из систем, ими объединенных, решается отдельно и дает отдельную часть ответа, т.е. решения систем объединяются.

Займемся эквивалентностью (1). Что значит доказать, что левая часть эквивалентна правой? Надо взять произвольное решение левой части и доказать, что оно будет и решением правой; и наоборот, что любое решение правой части будет удовлетворять левому уравнению.

Пусть x — какое-нибудь решение уравнения $\sqrt{f(x)} = g(x)$. Тогда радикал $\sqrt{f(x)}$ имеет смысл и, согласно определению радикала, неотрицателен. Но $g(x)$ равно этому значению радикала и, тем самым, $g(x) \geq 0$. Кроме того, числа $\sqrt{f(x)}$ и $g(x)$ равны, а значит, и их квадраты равны, и мы доказали, что число x удовлетворяет правой системе (т.е. мы установили, что $g(x) \geq 0$ и $f(x) = (g(x))^2$).

Обратно, пусть x удовлетворяет правой системе, т.е. $g(x) \geq 0$ и $f(x) = (g(x))^2$. Число $f(x)$ равно квадрату $g(x)$ и, следовательно, неотрицательно. Из равенства двух неотрицательных чисел следует равенство квадратных корней из них. Значит,

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{(g(x))^2} = |g(x)| = g(x).$$

Последнее равенство выполняется, так как $g(x) \geq 0$. Мы доказали, что если x удовлетворяет правой системе, то $\sqrt{f(x)} = g(x)$, т.е. x удовлетворяет левому уравнению и эквивалентность (1) полностью доказана.

Мы докажем эквивалентности (2) и (3) сразу. При этом мы будем доказывать (2), но это доказательство превращается в доказательство (3) путем замены в очевидных местах знака $\geq$ на знак $>$.

Пусть x удовлетворяет левому неравенству. Тогда либо $g(x) \geq 0$, либо $g(x) < 0$.

Если $g(x) < 0$, то, поскольку $\sqrt{f(x)}$ определено, имеем $f(x) \geq 0$ и, значит, в этом случае выполняется вторая из систем правой части.

Если $g(x) \geq 0$, то имеем неравенство $\geq$ между двумя неотрицательными числами $\sqrt{f(x)}$ и $g(x)$. Из неотрицательности этих чисел следует, что такое же неравенство связывает и их квадраты, т.е. $f(x) \geq (g(x))^2$, и мы доказали, что в этом случае выполняется первая из систем.

Следовательно, если x есть решение левого неравенства, то выполняется одна из систем справа.

Обратно, пусть для x выполняется первая система справа. Тогда $f(x) \geq 0$, так как $f(x)$ не меньше, чем квадрат неотрицательного числа $g(x)$. Второе неравенство системы говорит, что $g(x) \geq 0$. Извлечение корня из неотрицательных чисел сохраняет неравенство между ними, так что имеем

$$\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{(g(x))^2} = |g(x)| = g(x),$$

т.е. в этом случае левое неравенство выполняется.

Пусть для x выполняется вторая система справа. Тогда определено число $\sqrt{f(x)}$ и оно, как и всякий корень квадратный, неотрицательно. Второе неравенство системы говорит нам, что $g(x)$ отрицательно. Значит, $\sqrt{f(x)} > g(x)$, т.е. и в этом случае левое неравенство выполнено. Эквивалентности (2) и (3) доказаны.

Я докажу эквивалентность (4). Чтобы доказать (5), достаточно в очевидных местах заменить неравенство $<$ на $\geq$.

Пусть выполняется левое неравенство. Тогда $f(x) \geq 0$, так как радикал, под которым стоит $f(x)$, должен быть определен. Кроме того, $g(x) > \sqrt{f(x)} \geq 0$, так что $g(x) > 0$. Кроме того, неравенства между положительными числами при возведении в квадрат сохраняются, откуда получаем, что $f(x) < (g(x))^2$, что доказывает, что каждое решение левого неравенства удовлетворяет правой системе.

Обратно, пусть x удовлетворяет правой системе. Тогда $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$, и из неравенства между неотрицательными числами $f(x)$ и $(g(x))^2$ можно извлечь корень. Получим

$$\sqrt{f(x)} < \sqrt{(g(x))^2} = |g(x)| = g(x),$$

что и требовалось доказать.

5. Прогрессии

Я докажу формулы для суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессий.

Итак, пусть $a_1, \dots, a_n$ — арифметическая прогрессия с разностью d . Мы знаем, что $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d, \dots$, $a_n = a_1 + (n-1)d$. Значит,

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + \dots + a_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1)d) = \\ &= \underbrace{a_1 + \dots + a_1}_{n \text{ раз}} + d(1 + 2 + \dots + (n-1)). \end{aligned}$$

Теперь мы должны найти сумму $B_n = 1 + 2 + \dots + (n-1)$. Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} 2B_n &= (1 + \dots + (n-1)) + (1 + \dots + (n-1)) = \\ &= \underbrace{(1 + (n-1)) + (2 + (n-2)) + (3 + (n-3)) + \dots + ((n-1) + 1)}_{n-1 \text{ раз}} = \\ &= n(n-1) \iff B_n = \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Значит,

$$S_n = na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d = n \cdot \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь нам дана геометрическая прогрессия $b_1, \dots, b_n$ со знаменателем q . Тогда $b_2 = b_1q, b_3 = b_1q^2, \dots, b_n = b_1q^{n-1}$.

Найдем сумму

$$\begin{aligned} G_n &= b_1 + \dots + b_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-1} = \\ &= b_1(1 + q + \dots + q^{n-1}). \end{aligned}$$

Найдем отдельно сумму $H_n = 1 + q + \dots + q^{n-1}$. Ясно, что

$$qH_n = q + q^2 + \dots + q^n = 1 + q + \dots + q^{n-1} + q^n - 1 = H_n + q^n - 1.$$

Мы получили уравнение $qH_n = H_n + q^n - 1$, решая которое, находим, что $H_n = (q^n - 1)/(q - 1)$.

Осталось подставить вычисленное значение H_n в выражение для G_n :

$$G_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

что и требовалось доказать.

6. Переход от показательных и логарифмических уравнений к алгебраическим

Вот список простейших уравнений и неравенств с указанием равносильных переходов, устраняющих степени:

$$(1) \quad a^{g(x)} = a^{h(x)}, \quad a > 0, a \neq 1 \iff g(x) = h(x)$$

$$(2) \quad f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)} \iff \begin{cases} g(x) = h(x) \\ f(x) > 0 \\ f(x) \neq 1 \\ g(x), h(x) \text{ определены} \end{cases}$$

$$(3) \quad f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)} \iff \begin{cases} g(x) > h(x) \\ f(x) > 1 \\ g(x) < h(x) \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases}$$

$$(4) \quad f(x)^{g(x)} \geq f(x)^{h(x)} \iff \begin{cases} f(x) \geq 1 \\ g(x) \geq h(x) \\ 0 < f(x) \leq 1 \\ g(x) \leq h(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad f(x)^{g(x)} < f(x)^{h(x)} &\iff \begin{cases} g(x) < h(x) \\ f(x) > 1 \\ g(x) > h(x) \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases} \\
 (6) \quad f(x)^{g(x)} \leq f(x)^{h(x)} &\iff \begin{cases} f(x) \geq 1 \\ g(x) \leq h(x) \\ 0 < f(x) \leq 1 \\ g(x) \geq h(x) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Эквивалентность (1) имеет место, так как для любого $a > 0$, $a \neq 1$, функция $y = a^x$ монотонна. Отсюда следует, что если $a^p = a^q$, то $p = q$.

Докажем, что имеет место (2). Пусть x таково, что выполняется равенство в левой части эквивалентности. Если $f(x) \neq 1$, то $g(x) = h(x)$ по замечанию в предыдущем абзаце. Кроме того при $f(x) \leq 0$ степень $f(x)$ не определена, так что $f(x) > 0$ и мы доказали, что имеет место первая система правой части. Если же $f(x) = 1$, то ясно, что имеет место вторая система, и мы доказали, что из левой части следует правая.

Пусть x удовлетворяет правой части. Это значит, что имеет место либо первая, либо вторая система из совокупности. Если имеет место вторая система, то $f(x) = 1$ и $1^{g(x)} = 1^{h(x)}$, если $g(x)$ и $h(x)$ определены. Значит, в этом случае выполняется левая часть эквивалентности.

Опять-таки, если $g(x) = h(x)$, то при $f(x) > 0$ можно возвести $f(x)$ в равные степени $g(x)$ и $h(x)$. Конечно, при этом получатся равные числа, так что опять левая часть эквивалентности имеет место. Эквивалентность (2) доказана.

Эквивалентности (3)–(6) мы докажем одновременно. Я буду вести рассуждение только для (3). Для всех остальных нужно, где это необходимо, поменять знак неравенства, оставив рассуждение прежним.

Итак, доказываем (3). Ни в левой, ни в правой части эквивалентности $f(x)$ не может равняться единице. Если $0 < f(x) < 1$, то, ввиду убывания функции $y = a^x$ при $0 < a < 1$ неравенство $g(x) < h(x)$ равносильно неравенству $f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}$, т.е. неравенству, стоящему в левой части эквивалентности.

Если $f(x) > 1$, то ввиду возрастания функции $y = a^x$ неравенство между степенями будет совпадать с неравенством между показателями, так что $g(x) > h(x)$ эквивалентно неравенству $f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}$, и опять получилось, что левая часть эквивалентна правой, чем все и доказано.

Покажем, как избавляться от логарифмов в простейших неравенствах.

$$(7) \quad \log_{f(x)} g(x) > \log_{f(x)} h(x) \iff \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} g(x) > h(x) \\ h(x) > 0 \\ f(x) > 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} h(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$(8) \quad \log_{f(x)} g(x) \geq \log_{f(x)} h(x) \iff \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} g(x) \geq h(x) \\ h(x) > 0 \\ f(x) > 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} h(x) \geq g(x) \\ g(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$(9) \quad \log_{f(x)} g(x) < \log_{f(x)} h(x) \iff \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} g(x) < h(x) \\ g(x) > 0 \\ f(x) > 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} h(x) < g(x) \\ h(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$(10) \quad \log_{f(x)} g(x) \leq \log_{f(x)} h(x) \iff \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} g(x) \leq h(x) \\ g(x) > 0 \\ f(x) > 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} h(x) \leq g(x) \\ h(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Если взглянуть на формулы (7)–(10), то видно, что все они построены по одной схеме: надо рассмотреть два случая — когда основание больше единицы с сохранением неравенства и когда оно лежит между нулем и единицей с заменой его на противоположное. В каждом из этих случаев снятие логарифма эквивалентно либо сохранению неравенства между выражениями, стоящими под логарифмом (при основании > 1), либо противоположному неравенству между этими выражениями (при основании логарифма < 1). Кроме того, в правых частях стоят ограничения, которые необходимы для того, чтобы все логарифмы имели смысл (т.е. выражение под логарифмом должно быть больше нуля, а стоящее в основании — положительно и не равно единице). Эти замечания и доказывают формулы (7)–(10).

7. Общие теоремы о треугольниках

Я докажу следующие теоремы.

$$(1) \quad S = \frac{1}{2}ah_a = pr = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}ab \sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$(2) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \text{ — теорема косинусов.}$$

$$(3) \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ — теорема синусов.}$$

Начну с теоремы синусов. Пусть треугольник ABC вписан в окружность радиуса R . Соединим точку B с центром O окружности. Пусть A_1 — вторая (кроме B) точка пересечения прямой OB с окружностью. В треугольнике BA_1C отрезок BA_1 — диаметр, так что опирающийся на него вписанный угол BCA_1 прямой. Кроме того, угол BA_1C опирается либо на одну и ту же дугу с углом BAC , либо на ее дополнение. Следовательно, либо $\angle A = \angle A_1$, либо $\angle A_1 = \pi - \angle A$. В любом случае $\sin A = \sin A_1$.

В прямоугольном треугольнике BCA_1 гипотенуза равна $2R$, а острый угол — A_1 . Следовательно,

$$BC = BA_1 \cdot \sin A_1 \iff a = 2R \sin A \iff \frac{a}{\sin A} = 2R,$$

что и требовалось доказать.

Для того чтобы доказать формулу $S = \frac{1}{2}ah_a$, выведем ее для прямоугольных треугольников, где a есть катет, а h_a — другой катет. Наш треугольник запишем в виде ABC , где AB — гипотенуза. Возьмем такую точку C_1 на плоскости, что $ACBC_1$ — прямоугольник. Ясно, что его площадь равна $AC \cdot CB = ab$. Но этот прямоугольник сложен из двух треугольников ABC и равного ему треугольника ABC_1 . Тем самым, площадь ABC есть половина площади $ACBC_1$, т.е. $\frac{1}{2}ab$, что и требовалось.

Пусть теперь дан произвольный треугольник ABC и $AN = h_a$ — его высота. Если точка H лежит на стороне BC , то

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{BAH} + S_{HAC} = \frac{1}{2}(BH \cdot AN + HC \cdot AN) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot AN \cdot (BH + HC) = \frac{1}{2}ah_a, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Если точка H лежит на продолжении стороны BC , то нужно представить площадь ABC в виде разности площадей двух прямоугольных треугольников и снова воспользоваться доказанной для них формулой площади.

Пусть теперь O — центр вписанной в треугольник ABC окружности и A_1, B_1, C_1 — точки ее касания соответственно со сторонами BC, AC, AB . Тогда $OA_1 = OB_1 = OC_1 = r$ и все три этих радиуса перпендикулярны

соответствующим сторонам. Следовательно, они являются высотами в треугольниках BCO , ACO и ABO соответственно. Значит, имеем

$$S = S_{BCO} + S_{ABO} + S_{ACO} = \frac{1}{2}r(AB + BC + AC) = pr,$$

и мы доказали, что $S = pr$.

Из определения синуса в прямоугольном треугольнике легко вытекает, что $h_a = b \sin C$ (нарисуйте сами картинку!). Следовательно,

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab \sin C$$

— и еще одна формула для площади доказана. Подставим в нее $\sin C$ из выражения

$$\sin C = \frac{c}{2R},$$

являющегося следствием теоремы синусов. Получим, что $S = \frac{abc}{4R}$, и еще одна формула доказана.

Перед формулой Герона докажем теорему косинусов. Проще всего это сделать при помощи векторов. Имеем

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}.$$

Умножим скалярно на себя каждую часть этого равенства:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC})$$

$$\Downarrow$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cos C$$

— а это и есть в точности теорема косинусов.

Для того, чтобы доказать формулу Герона, запишем теорему косинусов и формулу для площади (в очевидным образом измененном виде):

$$\begin{cases} 4S = 2ab \sin C, \\ a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C. \end{cases}$$

Возводя эти равенства в квадрат и складывая, получим, что

$$16S^2 + (b^2 + a^2 - c^2)^2 = 4a^2b^2,$$

откуда

$$\begin{aligned} 16S^2 &= 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = \\ &= (2ab - a^2 - b^2 + c^2)(2ab + a^2 + b^2 - c^2) = \\ &= (c^2 - (a - b)^2)((a + b)^2 - c^2) = \\ &= (c + a - b)(c + b - a)(a + b - c)(a + b + c), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{b + c - a}{2} \cdot \frac{a + c - b}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2} \cdot \frac{a + b + c}{2} = \\ &= p(p - a)(p - b)(p - c), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Глава 3

То, чего нет в школьной программе, а знать надо

1. Сравнение чисел

При решении рациональных уравнений и неравенств, а также задач с модулями, требуется рисовать расположение чисел на прямой. При этом важно расположить их в правильном порядке, т.е. так, чтобы ни одно большее число не оказалось левее меньшего. Если это числа, представленные в десятичном виде, то это сделать легко. Хуже, когда они представляют из себя сложные выражения с радикалами. Пользоваться калькуляторами на экзамене, как правило, не разрешают. Но и если бы разрешали, то приблизительный подсчет двух чисел не является строгим доказательством того, что одно число меньше другого. Я бы посоветовал абитуриентам до поступления в вуз забыть выражение «приблизительно равно», потому что для строгого пользования этим понятием необходимо уметь оценивать погрешность вычислений. А это уже задача из высшей математики, она вам пока не по силам.

Конечно же, если запрещено чем-то пользоваться, то этому должна быть замена. И такая замена этому понятию есть, причем к строгости ее придраться никак невозможно.

Как, например, строго выразить тот факт, что π приближенно равно 3,1415926? Очень просто. Непонятное высказывание «приблизительно равно» надо заменить восемью совершенно понятными неравенствами (которые доказать, кстати, трудно, но вы не обязаны знать доказательство — просто пользуйтесь ими):

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 < \pi < 4, \\ 3,1 < \pi < 3,2, \\ 3,14 < \pi < 3,15, \\ 3,141 < \pi < 3,142, \\ 3,1415 < \pi < 3,1416, \\ 3,14159 < \pi < 3,14160, \\ 3,141592 < \pi < 3,141593, \\ 3,1415926 < \pi < 3,1415927. \end{array} \right.$$

Думаю, теперь вам понятно, как совершенно строго сказать, что $\sqrt{2}$ приближенно равно 1,4142.

Посмотрим теперь, как нужно сравнивать числа, которые сложно выглядят. Пусть мы должны сравнить $3 + 2\sqrt{2}$ и $\sqrt{34}$. Мы не знаем, какое из них больше, поэтому поставим между ними галочку $\vee$ (мысля ее как неизвестно какой знак неравенства). Далее начнем возведением в квадрат убирать радикалы. Рано или поздно станет понятно, как сравнить числа, и, значит, ясно, какой знак неравенства представляет галочка. Итак,

$$\begin{array}{c} 3 + 2\sqrt{2} \vee \sqrt{34} \\ \Updownarrow \\ (3 + 2\sqrt{2})^2 \vee 34 \\ \Updownarrow \\ 9 + 12\sqrt{2} + 8 \vee 34 \\ \Updownarrow \\ 17 + 12\sqrt{2} \vee 34 \\ \Updownarrow \\ 12\sqrt{2} \vee 17 \\ \Updownarrow \\ (12\sqrt{2})^2 \vee 17^2 \\ \Updownarrow \\ 288 \vee 289 \Rightarrow \vee = <, \end{array}$$

$$\text{и } 3 + 2\sqrt{2} < \sqrt{34}.$$

Может, правда, случиться так, что слева и справа стоят отрицательные числа (кстати, работая с галочкой, вы должны всегда быть уверены в знаке выражений слева и справа). Тогда возводить в квадрат нельзя — не будет эквивалентности. В этом случае надо умножить неравенство на -1 , поменяв его знак. Удобно при этом перевернуть галочку. Знак $\wedge$ при этом кодирует знак неравенства, обратный исходному. После того, как вы найдете, чему равна перевернутая галочка, понятно каков исходный знак неравенства. Впрочем, может быть, придется умножать на -1 несколько раз. Тогда перевернутая галочка должна заменяться просто галочкой. Рассмотрим пример.

$$\begin{array}{c}
\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \vee -\sqrt{3} \\
\Downarrow \\
-1 - \sqrt{5} \vee -2\sqrt{3} \\
\Downarrow \\
1 + \sqrt{5} \wedge 2\sqrt{3} \\
\Downarrow \\
1 + 5 + 2\sqrt{5} \wedge 12 \\
\Downarrow \\
2\sqrt{5} \wedge 6 \\
\Downarrow
\end{array}$$

$$20 \wedge 36 \Rightarrow \wedge \text{ есть } < \Rightarrow \vee \text{ есть } > .$$

Значит, $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} > -\sqrt{3}$.

2. Извлечение квадратного корня «вручную»

Я покажу сначала, как извлекается корень из целого числа — пусть это будет, например, число 223729. Мы должны проделать следующие операции:

А) разбить число справа налево на разряды по две цифры в разряде, ставя штрихи наверху — $223729 \rightarrow 22'37'29'$. Если бы это было число с нечетным числом цифр, как, например, 4765983, то при разбиении к первой цифре слева надо приписать нуль, т.е. $4765983 \rightarrow 04'76'59'83'$.

Б) Навесить на число радикал и написать знак равенства:

$$22'37'29 \rightarrow \sqrt{22'37'29} = \dots$$

После этого начинаем, собственно, вычислять корень. Это делается шагами, причем на каждом шаге обрабатывается один разряд исходного числа, т.е. две очередных цифры слева направо, и получается одна цифра результата.

Шаг 1 — извлечение квадратного корня с недостатком из первого разряда:

$$\sqrt{22} = 4 \text{ (с недостатком).}$$

Итог шага 1 есть первая цифра искомого числа:

$$\sqrt{22'37'29} = 4 \dots$$

Шаг 2 — первую полученную цифру возводим в квадрат, приписываем под первым разрядом и ставим знак минус вот так:

$$\begin{array}{r}
-\sqrt{22'37'29} = 4 \dots \\
\underline{16} \\
6
\end{array}$$

и производим вычитание так, как это уже написано.

Шаг 3 — приписываем справа к результату вычитания две цифры следующего разряда и слева от получившегося числа ставим вертикальную черту вот так:

$$\begin{array}{r} \sqrt{22'37'29} = 4 \dots \\ \underline{16} \\ 637 \end{array}$$

После этого, воспринимая цифры, стоящие после знака =, как обычное число, умножаем его на 2 и приписываем слева от вертикальной черты, оставив у самого края вертикальной черты пропуск, в который ставим точку и под этой точкой тоже ставим точку — это изображено на диаграмме справа.

Поставленная точка обозначает поиск цифры. Эта цифра будет второй в итоговом числе, т.е. встанет после цифры 4. Ищется она по следующему правилу: **это наибольшая цифра k такая, что число $8k$, т.е. число, получающееся из 8 приписыванием цифры k , умноженное на k , не превосходит 637.** В данном случае это цифра 7, т.к. $87 \cdot 7 = 609 < 637$, но $88 \cdot 8 = 704 > 637$. Итак, мы имеем $\sqrt{22'37'29} = 473$.

Провели горизонтальную черту и под ней написали результат вычитания — $637 - 609 = 28$. К числу 28 списали последний разряд исходного числа и получили число 2829. Записали семерку после четверки в результирующее число. Провели вертикальную черту слева от числа 2829, умножили 47 на 2 и полученное число 94 приписали слева от вертикальной черты, оставив место в виде точки для поиска последней цифры. Цифра 3 подошла в точности, так как $943 \cdot 3 = 2829$, значит, это последняя цифра искомого числа, т.е. $\sqrt{223729} = 473$.

В принципе, если бы остаток получился ненулевой, можно было бы поставить после найденных цифр числа запятую, списать в качестве следующего разряда два десятичных знака числа, или два нуля, если таковые отсутствуют, и продолжать все более и более точно извлекать квадратный корень. Вот тому пример:

$$\begin{array}{r} \sqrt{22'37'29} = 4\dots \\ \underline{16} \\ 8 \cdot \overline{) 6 \ 37} \\ \underline{ } \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{22'37'29} = 473 \\ \underline{16} \\ 87 \overline{) 6 \ 37} \\ \times \quad \underline{7 \ 6 \ 09} \\ 943 \overline{) 28 \ 29} \\ \times \quad \underline{3 \ 28 \ 29} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{17} = 4,123... \\
 \begin{array}{r}
 16 \\
 \hline
 81 \overline{) 100} \\
 \times 1 \overline{) 81} \\
 \hline
 822 \overline{) 1900} \\
 \times 2 \overline{) 1644} \\
 \hline
 8243 \overline{) 25600} \\
 \times 3 \overline{) 24729} \\
 \hline
 871...
 \end{array}
 \end{array}$$

Я не выписывал у числа 17 нули после запятой. В принципе, пока вы еще нетвердо владеете этим алгоритмом, нули выписывать полезно.

3. График дробно-линейной функции

Покажем, как строить график дробно-линейной функции, т.е. функции вида $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Можно считать, что $c \neq 0$ (иначе функция будет просто линейной). Кроме того, как будет видно ниже, если $ad - bc = 0$, то выражения в числителе и знаменателе будут пропорциональны и функция будет просто константой $\frac{a}{c}$ при $x \neq -\frac{d}{c}$. Теперь уже можно дать рецепт построения графика.

1) Проводится следующее преобразование:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+d) + b - \frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x - (-\frac{d}{c})}.$$

2) Пунктиром проводится вертикальная прямая (вертикальная асимптота графика) $x = -\frac{d}{c}$.

3) Пунктиром проводится горизонтальная прямая $y = \frac{a}{c}$ (горизонтальная асимптота графика).

4) На оси Ox отмечается точка $-\frac{b}{a}$, если $a \neq 0$. Искомый график пересекает ось Ox как раз в этой точке.

5) На оси Oy отмечается точка $\frac{b}{d}$, если $d \neq 0$. Искомый график пересекает ось Oy в этой точке.

6) В зависимости от знака выражения $bc - ad$ рисуется график функции, проходящий через отмеченные точки и имеющий заданные асимптоты (рис. 4 и 5). Если представлять себе пунктирные прямые как новые оси координат,

то при $bc - ad > 0$ график получается как у функции $y = \frac{1}{x}$, а при $bc - ad < 0$ — как у функции $y = -\frac{1}{x}$.

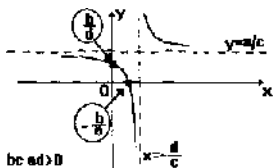


Рис. 4

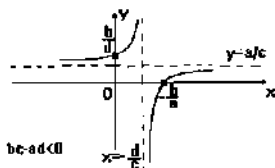


Рис. 5

4. Деление «уголком» многочлена на многочлен

Многочлены можно делить друг на друга «уголком», как целые числа. При этом если натуральное число a делится на натуральное число b , то результат деления — нахождение чисел q (частного) и r (остатка) таких, что $a = bq + r$, причем $0 \leq r < b$.

Точно такой же результат получается и при делении многочлена $a(x)$ на многочлен $b(x)$: получается многочлен $q(x)$ (частное) и многочлен $r(x)$ (остаток) таким образом, что

$$a(x) = b(x)q(x) + r(x),$$

и степень многочлена $r(x)$ строго меньше степени $b(x)$.

Я покажу, как это делается на примере деления многочлена $a(x) = x^4 + 6x^3 - 3x^2 - x + 1$ на многочлен $b(x) = x^2 - 2x + 3$.

Перво-наперво нужно наши многочлены расположить точно так же, как числа при делении:

$$\begin{array}{r} x^4 + 6x^3 - 3x^2 - x + 1 \mid x^2 - 2x + 3 \\ \hline \end{array}$$

Делим старший член делимого на старший член делителя — в данном случае нужно делить x^4 на x^2 (если бы мы делили многочлен $6x^3 + x^2 + 3x - 7$ на многочлен $2x - 5$, то нужно было бы делить $6x^3$ на $2x$). Полученное частное (в данном случае x^2 , а если бы рассматривался случай в скобках, то получилось бы $6x^3 : 2x = 3x^2$) нужно поставить в строку для результата, умножить это частное на делитель и записать результат (в нашем случае

получится $x^4 - 2x^3 + 3x^2$) по степеням под делимым:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 6x^3 - 3x^2 - x + 1 & x^2 - 2x + 3 \\ x^4 - 2x^3 + 3x^2 & x^2 \end{array}$$

Теперь точно так же, как когда делятся натуральные числа, надо поставить знак минус, провести горизонтальную черту и произвести вычитание:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 6x^3 - 3x^2 - x + 1 & x^2 - 2x + 3 \\ -x^4 - 2x^3 + 3x^2 & \\ \hline 8x^3 - 6x^2 \end{array}$$

Далее, приписываем к разности следующий член делимого (т.е. $-x$) и получаем многочлен $8x^3 - 6x^2 - x$. С ним производится точно такое же действие, как с делимым, а именно, его старший член $8x^3$ делится на старший член делителя x^2 и получается $8x$. Это значение приписывается со знаком $+$ в строку для частного и умножается на делитель. Получается многочлен $8x^3 - 16x^2 + 24x$, который пишется под (в данный момент) делимым $8x^3 - 6x^2 - x$, и производится вычитание.

После вычитания получаем многочлен $10x^2 - 25x$, к которому списывается со знаком плюс последний член делимого (т.е. число 1), и многочлен $10x^2 - 25x + 1$ делим на $x^2 - 2x + 3$.

Поделив старшие члены, получим 10, а после вычитания останется многочлен первой степени, к которому приписывать уже нечего:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 6x^3 - 3x^2 - x + 1 & x^2 - 2x + 3 \\ -x^4 - 2x^3 + 3x^2 & \\ \hline 8x^3 - 6x^2 - x & \\ -8x^3 - 16x^2 + 24x & \\ \hline 10x^2 - 25x + 1 & \\ -10x^2 - 20x + 30 & \\ \hline -5x - 29 & \end{array}$$

Значит,

$$x^4 + 6x^3 - 3x^2 - x + 1 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 + 8x + 10) - 5x - 29.$$

На самом деле, в задачах на вступительных экзаменах может возникнуть необходимость лишь в делении многочлена на двучлен вида $x - a$. Это связано с тем, что число a есть корень многочлена $p(x)$ тогда и только тогда, когда $p(x)$ делится нацело на $x - a$. (Для работающих на третьем уровне очень неплохим упражнением будет попытка самостоятельного доказательства названного утверждения, известного как следствие из теоремы Безу.)

Итак, если вы угадали, что многочлен $p(x)$ имеет корень a , вам нужно поделить его на $x - a$. Получится многочлен $q(x)$ меньшей степени такой, что

$$p(x) = (x - a)q(x).$$

Если мы угадаем корень b у многочлена $q(x)$, то надо разделить $q(x)$ на $x - b$, получить многочлен еще меньшей степени, и т.д. Если ничто не помогает угадывать корни, то в конце концов мы все их найдем и сможем представить $p(x)$ в виде произведения многочленов вида $x - a$ — такое представление требуется для применения метода интервалов.

В заключение приведу пример деления многочлена $p(x) = x - 2x^5 + 1$ на $x - 1$. Заметьте, что обязательно нужно представить многочлен $p(x)$ в каноническом виде, т.е. по убыванию степеней, причем приписать эти степени с нулевыми коэффициентами, если в исходном многочлене они отсутствуют:

$$\begin{array}{r}
 -2x^5 + 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + x + 1 \quad | \quad x - 1 \\
 \underline{-2x^5 + 2x^4} \\
 -2x^4 + 2x^3 \\
 \underline{-2x^4 + 2x^3} \\
 -2x^3 + 0 \cdot x^2 + x + 1 \\
 \underline{-2x^3 + 2x^2} \\
 -2x^2 + x + 1 \\
 \underline{-2x^2 + 2x} \\
 -x + 1 \\
 \underline{-x + 1} \\
 0
 \end{array}$$

Следовательно,

$$-2x^5 + x + 1 = (-2x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 1)(x - 1).$$

5. Метод неопределенных коэффициентов

Метод неопределенных коэффициентов мы поясним на примере.

Пусть даны уравнения $\begin{cases} x+y+z=13 \\ 7x+3y=-9 \end{cases}$, причем требуется отыскать $5x+y-2z$. Указанная система не определяет однозначно x, y и z . То же самое верно и для выражения $4x+y-2z$. Однако раз по условию задачи выражение $5x+y-2z$ можно найти, его можно представить как линейную комбинацию выражений $x+y+z$ и $7x+3y$, т.е. найдутся числа α и β такие, что $5x+y-2z = \alpha(x+y+z) + \beta(7x+3y)$. Как найти числа α и β ? Надо, раскрыв скобки, приравнять коэффициенты при x, y, z . Посмотрите, как это делается: $5x+y-2z = \alpha(x+y+z) + \beta(7x+3y) \iff 5x+y-2z = \alpha x + \alpha y + \alpha z + 7\beta x + 3\beta y \iff 5x+y-2z = (\alpha+7\beta)x + (\alpha+3\beta)y + \alpha z$.

А теперь, приравнявая коэффициенты при x, y, z , получаем систему

$$\begin{cases} \alpha + 7\beta = 5, \\ \alpha + 3\beta = 1, & \Longleftrightarrow \alpha = -2, \beta = 1. \\ \alpha = -2 \end{cases}$$

Значит, $5x + y - 2z = -2(x + y + z) + 1(7x + 3y) = -2 \cdot 13 + (-9) = -35$.

Эту задачу можно решить и обычным путем, а именно, из второго уравнения выразить x через y : $x = -\frac{1}{7}(3y + 9)$. Подставив это значение x в первое уравнение, сможем выразить и z через y :

$$-\frac{3}{7}y - \frac{9}{7} + y + z = 13 \Longleftrightarrow z = \frac{100 - 4y}{7}.$$

После этого нужно вычислять выражение $5x + y - 2z$, подставляя в него x и z , выраженные через y . При этом y сократится и получится -35 .

Однако если у вас даны выражения с большим числом переменных, то вычислять с помощью подстановки уже труднее, чем методом неопределенных коэффициентов. Давайте посмотрим для закрепления еще один пример с пятью переменными (можете попробовать решить его подстановкой).

Пусть известно, что $2a + 3b - c + d + e = 4$ и $-a + b + 2c - 3d - e = -3$. Надо найти выражение $9a + 11b - 6c + 7d + 5e$.

Запишем его с неопределенными коэффициентами α и β :

$$\begin{aligned} 9a + 11b - 6c + 7d + 5e &= \alpha(2a + 3b - c + d + e) + \beta(-a + b + 2c - 3d - e) = \\ &= 2\alpha a + 3\alpha b - \alpha c + \alpha d + \alpha e - \beta a + \beta b + 2\beta c - 3\beta d - \beta e = \\ &= (2\alpha - \beta)a + (3\alpha + \beta)b + (-\alpha + 2\beta)c + (\alpha - 3\beta)d + (\alpha - \beta)e. \end{aligned}$$

Теперь приравняем коэффициенты при a, b, c, d и e :

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 9, \\ 3\alpha + \beta = 11, \\ -\alpha + 2\beta = -6, \\ \alpha - 3\beta = 7, \\ \alpha - \beta = 5, \end{cases}$$

откуда $\alpha = 4$, $\beta = -1$ и, следовательно,

$$9a + 11b - 6c + 7d + 5e = 4(2a + 3b - c + d + e) - (-a + b + 2c - 3d - e) = 4 \cdot 4 - (-3) = 19.$$

Отмечу еще, что если система, составленная согласно описанному методу, несовместна (такое запросто может быть ввиду того, что уравнений в ней больше, чем неизвестных), то найти то линейное выражение, для которого она несовместна, невозможно (в том смысле, что оно может принимать бесконечно много различных значений).

6. Теоремы Чева и Менелая

Теорема (Менелая). Пусть прямая пересекает произвольный треугольник ABC , причем C_1 — точка ее пересечения со стороной AB , A_1 — точка ее пересечения со стороной BC , и B_1 — точка ее пересечения с продолжением стороны AC . Доказать, что тогда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Доказательство. Проведем через точку C прямую параллельно AB . Пусть K — точка ее пересечения с прямой B_1C_1 (см. рис. 1).

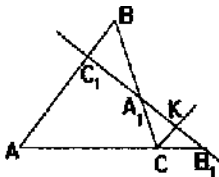


Рис. 1

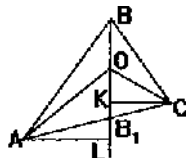


Рис. 2

Треугольники AC_1B_1 и CKB_1 подобны по первому признаку (ввиду того, что $\angle C_1AB_1 = \angle KCB_1$ и $\angle AC_1B_1 = \angle CKB_1$ как внешние односторонние при параллельных прямых AC_1, CK и секущих AB_1 и C_1B_1). Значит,

$$(2) \quad \frac{AC_1}{CK} = \frac{B_1A}{B_1C}.$$

Треугольники BC_1A_1 и CKA_1 также подобны по первому признаку (здесь легко отыскать внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и CK). Следовательно,

$$(3) \quad \frac{C_1B}{CK} = \frac{BA_1}{A_1C}.$$

Из равенства (2) находим, что $CK = \frac{AC_1 \cdot B_1C}{B_1A}$, а из равенства (3) следует, что $CK = \frac{C_1B \cdot A_1C}{BA_1}$. Отсюда имеем

$$\frac{AC_1 \cdot B_1C}{B_1A} = \frac{C_1B \cdot A_1C}{BA_1} \Leftrightarrow \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Имеет место также и обратная теорема.

Теорема (Менелая, обратная). Пусть дан треугольник ABC . Предположим, что точка C_1 лежит на стороне AB , точка A_1 лежит на стороне BC , а точка B_1 лежит на продолжении стороны AC , причем про эти точки известно, что

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Тогда эти точки лежат на одной прямой.

Доказательство. По-прежнему пользуемся рисунком 1. Заметим сначала, что не может быть $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} = 1$, так как согласно условию это выражение равно $\frac{BA_1}{C_1B} \neq 1$. Отсюда, очевидно, следует, что прямые A_1C_1 и AC не параллельны.

Проведем через точки C_1 и A_1 прямую. Она, как мы доказали, пересечет прямую AC в некоторой точке B_2 (на рисунке не изображена). Для точек A_1C_1 и B_2 верна прямая теорема Менелая, так что

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} = 1.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{CB_2}{B_2A} = \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{CB_1}{B_1A}.$$

Из этого равенства следует, что обе точки B_1 и B_2 лежат на продолжении отрезка AC за одну и ту же точку, ибо правее C данное отношение меньше единицы, а левее A оно строго больше 1. Пусть $CB_1 = x$, $CB_2 = y$, $AC = b$. Тогда, учитывая, что $B_1A = x + b$ и $B_2A = y + b$, перепишем полученное равенство в виде

$$\frac{x}{x+b} = \frac{y}{y+b} \iff xy + xb = xy + yb \iff x = y.$$

Конечно же, из равенства $CB_1 = CB_2$ следует, что $B_1 = B_2$, и мы доказали, что точка B_1 как совпадающая с B_2 лежит на прямой A_1C_1 .

Теорема доказана.

Теорема (Чевы). Предположим, что точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC , причем отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Доказать, что тогда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Доказательство. Обозначим через O точку пересечения трех заданных отрезков. Докажем, что $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{S_{BOC}}{S_{AOB}}$. Для этого посмотрим на рис. 2. Здесь CK и AL — перпендикуляры, опущенные из точек C и A на прямую

BB_1 . Треугольники AOB и BOC имеют общую сторону OB и высоты их равны соответственно AL и CK . Значит,

$$\frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{AL}{CK} = \frac{AB_1}{B_1C}.$$

Предпоследнее равенство имеет место ввиду подобия прямоугольных треугольников AB_1L и CB_1K по острому углу.

Аналогичным образом,

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{S_{AOC}}{S_{BOC}} \quad \text{и} \quad \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_{BOA}}{S_{AOC}}.$$

Перемножив эти три равенства, получим

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{S_{AOC}}{S_{BOC}} \cdot \frac{S_{AOB}}{S_{AOC}} \cdot \frac{S_{BOC}}{S_{AOB}} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Теорема (Чебы, обратная). Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC , причем

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Тогда отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть O — точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1 и прямая CO пересекает сторону AB в некоторой точке C_2 . Достаточно доказать, что $C_1 = C_2$.

Применим прямую теорему Чебы к точкам A_1, B_1 и C_2 :

$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Но тогда $\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{A_1C}{BA_1} \cdot \frac{B_1A}{B_1C} = \frac{AC_1}{C_1B}$. Значит, точки C_1 и C_2 делят отрезок AB в одном и том же отношении и потому совпадают (что доказывается так же, как в обратной теореме Менелая), а это как раз и требовалось доказать.

Часть II

ПОДГОТОВКА К ЭКЗАМЕНУ

Глава 1

Тригонометрия

Урок 1

Сведение к квадратным уравнениям

Все тригонометрические уравнения решаются сведением к одному из четырех простейших:

$$(1) \quad \sin x = a \iff \begin{cases} x = (-1)^n \arcsin a + n\pi, & n \in \mathbf{Z}, \text{ если } |a| \leq 1, \\ \emptyset, & \text{если } |a| > 1; \end{cases}$$

$$(2) \quad \cos x = a \iff \begin{cases} x = \pm \arccos a + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z}, \text{ если } |a| \leq 1, \\ \emptyset, & \text{если } |a| > 1; \end{cases}$$

$$(3) \quad \operatorname{tg} x = a \iff x = \operatorname{arctg} a + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z};$$

$$(4) \quad \operatorname{ctg} x = a \iff x = \operatorname{arcctg} a + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Вы уже, конечно, догадались, что справа от стрелок $\iff$ стоят решения соответствующих уравнений. Важно понимать, что каждая из записей решения дает не одно какое-нибудь x , а бесконечно много таких, получающихся подстановкой в данную формулу всевозможных целых n , т.е. $n \in \mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

Например, если мы для уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ запишем решение в общем виде, то получим $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, или, что то же самое,

$$\begin{aligned} x &= (-1)^0 \cdot \frac{\pi}{6} + 0 \cdot \pi = \frac{\pi}{6}; \\ x &= (-1)^1 \cdot \frac{\pi}{6} + 1 \cdot \pi = \frac{5}{6}\pi; \end{aligned}$$

$$x = (-1)^{-1} \cdot \frac{\pi}{6} + (-1) \cdot \pi = -\frac{7}{6}\pi;$$

$$x = (-1)^2 \cdot \frac{\pi}{6} + 2 \cdot \pi = \frac{13}{6}\pi;$$

$$x = (-1)^{(-2)} \cdot \frac{\pi}{6} + (-2) \cdot \pi = -\frac{11}{6}\pi,$$

и так далее.

Формулы (1)–(4) необходимо знать **наизусть**. Кроме того, *желательно* знать наизусть следующие частные случаи формул (1) и (2), записанные в более простом виде:

$$(5) \quad \sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$(6) \quad \sin x = 0 \iff x = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$(7) \quad \sin x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$(8) \quad \cos x = 1 \iff x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$(9) \quad \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$(10) \quad \cos x = -1 \iff x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Упражнения для уровня 1

- 1. Чему равен $\sin \frac{\pi}{3}$? $\sin \pi$? $\sin \frac{35}{6}\pi$?
- 2. Чему равен $\cos \frac{5}{6}\pi$? $\cos \frac{37}{3}\pi$? $\operatorname{tg} \frac{17}{3}\pi$? $\operatorname{ctg} \frac{17}{6}\pi$?
- 3. Выразите $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ через $\sin x$ и $\cos x$. При каких x эти функции определены?
- 4. Чему равны $\arcsin 1$, $\arcsin 0$, $\arcsin \frac{1}{2}$, $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$?
- 5. Чему равны $\arccos 1$, $\arccos 0$, $\arccos(-\frac{1}{2})$?
- 6. Решить уравнение $\operatorname{tg}(7x + 11) = 43$.
- 7. Решить уравнение $2\sqrt{2}\cos(x^8 + x^7 + 1) = 3$.
- 8. Рассмотрим два множества решений некоторого уравнения

$$A: \begin{aligned} x &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x &= \frac{3}{2}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad \text{и} \quad B: x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Совпадают ли эти множества?

- 9. Тот же вопрос для множеств

$$A: x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{и} \quad B: \begin{aligned} x &= \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x &= \frac{5}{6}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

- 10. В каких четвертях лежат углы $\frac{17}{3}\pi$, $\sqrt{11}\pi$, 47 , $\sqrt{47}$?

Упражнения для уровня 2

- 1. Что такое $\arcsin \frac{1}{3}$?
- 2. Какова область определения функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctg x$, $y = \operatorname{arccctg} x$?
- 3. Доказать, что при $|a| \leq 1$ решения уравнения $\sin x = a$ можно записать в виде

$$\begin{cases} x = \arcsin a + 2n\pi, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = \pi - \arcsin a + 2n\pi, & n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$
- 3. Решить уравнение $\sin(3 \cos x) = \frac{1}{2}$.
- 4. Решить уравнение $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 0$.
- 5. Какой знак имеет число $\cos \sqrt{3}$?
- 6. Пусть даны три множества решений каких-то уравнений

$$A: x = n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad B: x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad \text{и} \quad C: x = \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$
 Доказать, что $A \cup B = C$.
- 7. Решить неравенство $\sin x < \frac{1}{2}$.
- 8. Решить неравенство $\cos x \geq -\frac{1}{2}$.
- 9. Решить неравенство $\operatorname{tg} x < 11$.
- 10. Решить неравенство $\operatorname{ctg} x \geq 1$.

Упражнения для уровня 3

- 1. Доказать формулу (1).
- 2. Доказать формулу (2).
- 3. Доказать формулу (3).
- 4. Доказать формулу (4).
- 5. Для произвольного a решить неравенства $\sin x \geq a$, $\sin x < a$.
- 6. Для произвольного a решить неравенства $\cos x \geq a$, $\cos x < a$.
- 7. Для произвольного a решить неравенства $\operatorname{tg} x \geq a$, $\operatorname{tg} x < a$.
- 8. Для произвольного a решить неравенства $\operatorname{ctg} x \geq a$, $\operatorname{ctg} x < a$.
- 9. Решить уравнение $\sin(x^2 + x) = \frac{1}{2}$.
- 10. Дать определения $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\operatorname{arccctg} x$.

После того, как у вас не осталось секретов про простейшие уравнения, можно приступить к изучению методов сведения произвольных уравнений к простейшим. Первый и самый простой метод, который и составляет предмет настоящего урока называется **сведение к квадратному уравнению**.

Чтобы им овладеть, достаточно уметь решать квадратные уравнения и знать следующие тригонометрические формулы:

$$(11) \quad \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$(12) \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$(13) \quad \operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$(14) \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$(15) \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$(16) \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$(16) \quad \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$(17) \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(18) \quad \sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(19) \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$(20) \quad \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x, \quad \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

Сам метод состоит в том, что, пользуясь указанными формулами, надо преобразовать уравнение к такому виду, чтобы какую-то функцию (например, $\sin x$ или $\cos x$) или комбинацию функций можно было обозначить через y и получить при этом квадратное уравнение относительно y . После того как найдено y , получим либо более простое, либо простейшее тригонометрическое уравнение.

Теперь порешаем учебные задачи сегодняшнего урока. Во всех задачах опущена фраза «решить уравнение». Кроме того, если сразу после номера задачи

- нет ничего в квадратных скобках, то ее решают *все уровни*;
- стоит [2], то ее решают *уровни 2 и 3*;
- стоит [3], то ее решает *только 3-й уровень*.

Задачу **надо сначала попытаться решить самому**, и только потом, если не получается, смотреть решение и подсказки. При этом **решить** означает написать условие, после него — обоснованное решение, после него на отдельной строке — слово «Ответ:» и выписать все ответы после двоеточия.

Даже если вы уверены в своем решении и ответ «сошелся», **все равно просматривайте внимательно мое решение**. Если не обнаружатся ошибки, то на первых уроках обращайте большое внимание на оформление. Добивайтесь, чтобы мое и ваше оформления задач совпадали.

► **Задача 1.** $4 - \cos^2 x = 4 \sin x$.

Решение. Вместо $\cos^2 x$ подставим $1 - \sin^2 x$. Получим

$$4 - (1 - \sin^2 x) = 4 \sin x \iff 3 + \sin^2 x = 4 \sin x \iff \sin^2 x - 4 \sin x + 3 = 0.$$

Если положить $y = \sin x$, получим квадратное уравнение $y^2 - 4y + 3 = 0$. Оно имеет корни 1 и 3. Значит, исходное уравнение эквивалентно совокупности

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin x = 3. \end{cases}$$

Поскольку $\sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, а $\sin x = 3 \iff x \in \emptyset$, получаем

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 2.** $5 - 2 \cos x = 5\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } 5 - 2 \cos x &= 5\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \iff 5 - 2(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}) = 5\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \iff \\ 3 + 4 \sin^2 \frac{x}{2} &= 5\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \iff 4 \sin^2 \frac{x}{2} - 5\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} + 3 = 0 \iff \\ \iff \begin{cases} 4y^2 - 5\sqrt{2}y + 3 = 0, \\ y = \sin \frac{x}{2} \end{cases} &\iff \begin{cases} \sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin \frac{x}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{cases} \iff \sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ так как } \frac{3\sqrt{2}}{4} > 1. \end{aligned}$$

Последнее проверяется возведением числа $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ в квадрат, который равен $\frac{18}{16} > 1$.

Итак, $\frac{x}{2} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z} \iff x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 3.** $\cos^4 x = \cos 2x$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \text{ и } \cos^4 x = ((\cos^2 x)^2), \text{ следовательно, } \cos^4 x = \\ \cos 2x &\iff \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = \cos 2x \iff \frac{1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x}{4} = \cos 2x \iff \\ \begin{cases} 1 + 2y + y^2 = 4y \\ y = \cos 2x \end{cases} &\iff \cos 2x = 1 \iff 2x = 2n\pi, n \in \mathbf{Z} \iff x = n\pi, n \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $x = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

Замечание. Если у вас другое решение (например, с приведением к биквадратному уравнению), убедитесь, что ответы совпадают.

► **Задача 4.** $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - \frac{1}{2}$.

Решение. Заметим, что $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} 4 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$. Подставим значение этого выражения в исходное уравнение:

$$1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \sin 2x - \frac{1}{2} \iff \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} y^2 = y - \frac{1}{2} \\ y = \sin 2x \end{cases} \iff \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -3 \end{cases} \iff$$

$$\sin 2x = 1 \iff 2x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \iff x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. ◀

► **Задача 5.** $1 - \sin x = \cos x - \sin 2x$.

Решение. Подстановка здесь несколько необычна. Исходное уравнение эквивалентно такому:

$$1 + \sin 2x = \sin x + \cos x.$$

Теперь, заменив единицу на $\sin^2 x + \cos^2 x$ и $\sin 2x$ на $2 \sin x \cos x$, получим

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = \sin x + \cos x,$$

что эквивалентно $(\sin x + \cos x)^2 = \sin x + \cos x$; следовательно, можно обозначить $\sin x + \cos x$ через y . Получим уравнение $y^2 = y \iff \begin{cases} y=0 \\ y=1 \end{cases}$. Значит, исходное уравнение эквивалентно совокупности

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = 0, \\ \sin x + \cos x = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0, \\ \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что $\begin{cases} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \iff \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = n\pi, n \in \mathbb{Z} \\ x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi, x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. ◀

► **Задача 6 [2].** $\frac{\sin x + \cos x}{\cos x} + 3 \sin 2x = \cos^2 2x + \operatorname{tg} x$.

Решение. В этой задаче $\cos x$ стоит в знаменателе, поэтому надо отметить сразу где-нибудь в верхнем углу листа, что ОДЗ (т.е. Область Допустимых Значений) x состоит из таких x , что $\cos x \neq 0$. Теперь, заметив, что

$$\frac{\sin x + \cos x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x} = \operatorname{tg} x + 1,$$

перепишем уравнение в виде

$$1 + \operatorname{tg} x + 3 \sin 2x = \cos^2 2x + \operatorname{tg} x \iff 1 + 3 \sin 2x = \cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x.$$

Отсюда $\sin 2x = 0$ или $\sin 2x = -3$. Ясно, что надо решить лишь уравнение $\sin 2x = 0$, и не просто решить его, а отобрать из его решений те, для которых $\cos x \neq 0$. Это можно сделать, например, так: семейство точек $x = \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$, являющееся решением уравнения $\sin 2x = 0$, надо изобразить на тригонометрическом круге.

Напомним, что углы *положительные* измеряются от положительной полуоси Ox поворотом ее против часовой стрелки. При этом угол поворота задается точкой пересечения повернутого луча с окружностью единичного радиуса с центром в начале координат — эта окружность и именуется обычно тригонометрическим кругом. Надо заметить, что точка на круге задает бесконечно много углов, отличающихся друг от друга на $2n\pi$, где n — целое число. Например, точка $(1, 0)$ задает углы $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \dots$ (радиан), точка $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ задает углы вида $\frac{\pi}{4} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, и вообще, любая точка пересечения луча, наклоненного под углом φ к оси Ox с окружностью, задает все углы вида $\varphi + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. Точно так же углы *отрицательные* задаются поворотом того же луча от полуоси Ox по часовой стрелке.

Вернемся к решению нашей задачи. Пусть $n = 0$. Тогда $x_0 = 0$ — отметим эту точку на круге (ясно, что это точка $(0, 0)$). Если $n = 1$, то $x_1 = \frac{\pi}{2}$ — отметим и ее. Если $n = 2$, то $x_2 = \pi$, и при n равном 3 получаем $x_3 = \frac{3\pi}{2}$. Если же мы положим $n = 4$, то получим точку 2π , совпадающую на круге с точкой x_0 ; при дальнейшем изменении n будут пробегаться все те же точки x_0, x_1, x_2, x_3 (сделайте сами соответствующий рисунок, пожалуйста). Нетрудно убедиться в том, что и отрицательные значения числа n не дадут новых точек на круге.

Тем самым, решение уравнения $\sin 2x = 0$, которое мы записали в виде $x = \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$, можно представить и так:

$$\begin{cases} x = 2n\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \\ x = \pi + 2n\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \end{cases}, n \in \mathbf{Z}.$$

Ясно, что серия $2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, порождается точкой x_0 , серия $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ — точкой x_1 , и так далее.

Теперь отметим на круге крестиками решения уравнения $\cos x = 0$. Они задаются серией $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. При $n = 0$ и $n = 1$ получаем точки $y_0 = \frac{\pi}{2}$ и $y_1 = \frac{3\pi}{2}$ — они, как легко убедиться, представляют все решения уравнения $\cos x = 0$. Мы видим, что на круге точки y_0, y_1 совпали с точками x_1, x_3 соответственно. Это означает, что серии, задаваемые точками x_1 и x_3 , не входят в ОДЗ, и ответ задачи состоит из серий, порождаемых точками x_0 и x_2 .

Ответ: $x = 2n\pi$, $x = \pi + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 7 [2].** $\frac{1}{\cos x} - \cos x = \operatorname{tg} x$.

Решение. ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. Преобразуем наше уравнение:

$$\frac{1}{\cos x} - \cos x = \operatorname{tg} x \iff \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} \iff \sin^2 x = \sin x \iff \sin x = 0 \text{ или } \sin x = 1.$$

Но если $\sin x = 1$, то $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 0 = \cos x$, т.е. ни одно x такое, что $\sin x = 1$, не входит в ОДЗ. Если же $\sin x = 0$, то $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1$, т.е. $\cos x = \pm 1 \neq 0$, и в ответ войдут все решения уравнения $\sin x = 0$. Тот же самый ответ можно было бы получить, работая с кругом как в предыдущей задаче.

Ответ: $x = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 8.** $2\sqrt{3}\sin^2 \frac{x}{2} + 2 = 2\sin^2 x + \sqrt{3}$.

Решение. Подставив в исходное уравнение $\frac{1-\cos x}{2}$ вместо $\sin^2 \frac{x}{2}$, получим $2\sqrt{3}\frac{1-\cos x}{2} + 2 = 2(1 - \cos^2 x) + \sqrt{3} \iff \sqrt{3} - \sqrt{3}\cos x + 2 = 2 - 2\cos^2 x + \sqrt{3} \iff 2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0 \iff \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbf{Z} \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z} \end{cases}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 9.** $\frac{1-3\sin^2 x}{\sin^2 x} = 5 \operatorname{ctg} x$.

Решение. $\frac{1-3\sin^2 x}{\sin^2 x} = 5 \operatorname{ctg} x \iff \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{3\sin^2 x}{\sin^2 x} = 5 \operatorname{ctg} x \iff \frac{1}{\sin^2 x} - 3 = 5 \operatorname{ctg} x \iff (1 + \operatorname{ctg}^2 x) - 3 = 5 \operatorname{ctg} x \iff \operatorname{ctg}^2 x - 5 \operatorname{ctg} x - 2 = 0 \iff \operatorname{ctg} x = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$

Ответ: $x = \operatorname{arccctg} \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 10 [3].** $1 + \cos(x^2 + 1) = \sin^2(x^2 + 1)$.

Решение. Воспользовавшись формулой $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$, легко найдем, что $\cos(x^2 + 1) = 0$, или $\cos(x^2 + 1) = -1$, откуда $x^2 + 1 = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, или $x^2 + 1 = \pi + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. Отсюда $\begin{cases} x^2 = \frac{\pi}{2} - 1 + n\pi, n \in \mathbf{Z} \\ x^2 = \pi - 1 + 2n\pi, n \in \mathbf{Z} \end{cases}$.

Каждое из уравнений последней совокупности имеет решение только при таких n , которые делают правые части этих уравнений положительными. Например, при $n = 0$ правые части равны соответственно $\frac{\pi}{2} - 1$ и $\pi - 1$, т.е. положительны, так как $\pi > 3$. Ясно, что если $n > 0$, то правые части могут лишь увеличиться, так что все $n \geq 0$ годятся. Если же $n \leq -1$, то правые части не превосходят соответственно чисел $-\frac{\pi}{2} - 1$ и $-\pi - 1$, т.е. отрицательны. Отсюда получаем

Ответ: $x = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2} - 1 + n\pi}$, $x = \pm \sqrt{\pi - 1 + n\pi}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. ◀

► **Задача 11** [3]. $2 \sin x \cos^2 x + \cos^4 x = 2 \sin x + \cos 2x + \cos^2 x$.

Решение. Прибавим $\sin^2 x$ к обеим частям уравнения. Слева получим полный квадрат выражения $\sin x + \cos^2 x$, а справа заменим $\sin^2 x + \cos^2 x$ на 1. Получим уравнение $(\sin x + \cos^2 x)^2 = 1 + 2 \sin x + 2 \cos^2 x - 1$, которое эквивалентно совокупности $\begin{cases} y^2 = 2y \\ y = \sin x + \cos^2 x \end{cases}$.

Уравнение $\sin x + \cos^2 x = 2$ приводится к виду $\sin^2 x - \sin x + 1 = 0$ и, следовательно, не имеет решений (у соответствующего квадратного уравнения отрицателен дискриминант). Уравнение $\sin x + \cos^2 x = 0$ эквивалентно уравнению $\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$, откуда $\sin x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ или $\sin x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Из $\sqrt{5} > 2$ следует, что $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$.

Ответ: $x = (-1)^n \arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 12** [3]. $\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} = \frac{3}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^4 x}$.

Решение. $\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} = \frac{3}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^4 x} \iff$

$$\iff \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^4 x} = \frac{3}{\cos^2 x} + 3 \operatorname{tg} x \iff$$

$$\iff \left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x} \right)^2 = 3(1 + \operatorname{tg}^2 x) + 3 \operatorname{tg} x \iff$$

$$\iff (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1)^2 = 3(1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x).$$

Отсюда получаем $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1 = 0 \iff \emptyset$, или $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1 = 3 \iff \operatorname{tg} x = 1, \operatorname{tg} x = -2$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $x = -\arctg 2 + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 13** [3]. $\operatorname{tg}^2 x + c \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x + 3c \operatorname{tg} x + 4 = 0$.

Решение. Пусть $y = \operatorname{tg} x + c \operatorname{tg} x$. Тогда $y^2 = \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x c \operatorname{tg} x + c \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 x + c \operatorname{tg}^2 x + 2$. Значит, $\operatorname{tg}^2 x + c \operatorname{tg}^2 x = y^2 - 2$ и наше уравнение принимает вид $y^2 - 2 + 3y + 4 = 0$, откуда $y = -1, y = -2$. Мы получаем два уравнения:

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -1 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -2.$$

Первое из них не имеет решений, а второе эквивалентно $\operatorname{tg} x = -1$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

Наш первый урок успешно завершён. Теперь посмотрите на ваши записки и поставьте себе оценку по следующим критериям:

- вы решили **не менее 6 задач** вашего уровня, *не подглядывая ни в решения ни в формулы*, — оценка 5.
- вы решили **не менее 7 задач** вашего уровня, *подсматривая только в формулы*, — оценка 4,5.

- вы решили от 4 до 6 задач вашего уровня, подсматривая только формулы, — оценка 4.
 - вы решили 3 задачи, не смотря в решения, и с первого взгляда поняли как решать все остальные задачи вашего уровня, — оценка 3,5.
 - вы, не напрягаясь, поняли все решения, хотя сами не смогли решить 3 задачи, — оценка 3.
 - решения трудно понять, или вы не сумели понять их все — оценка 2.
- В этом случае попытайтесь выучить все формулы (1)–(20) **наизусть** и потом повторить попытку разобрать решения.

Домашнее задание

- ▶ 1. $1 + \cos \frac{x}{2} + \cos x = 0$
- ▶ 2. $1 - \sin \frac{x}{2} = \cos x$
- ▶ 3. $2 \sin^2 x + \cos 4x = 0$
- ▶ 4. $\sin 4x + 2 \cos^2 x = 1$
- ▶ 5. $5 \sin x - 4 \operatorname{ctg} x = 0$
- ▶ 6. $3 \cos x + 2 \operatorname{tg} x = 0$
- ▶ 7. $1 + 4 \cos x = \cos 2x$
- ▶ 8. $2 \cos^2 x + 5 \sin x + 1 = 0$
- ▶ 9. $\cos 2x + 3\sqrt{2} \sin x - 3 = 0$
- ▶ 10. $2 \cos 2x + 4 \cos x = \sin^2 x$
- ▶ 11. $2 \cos 2x + \sin 3x = 2$
- ▶ 12. $\frac{7}{4} \cos \frac{x}{4} = \cos^3 \frac{x}{4} + \sin \frac{x}{2}$
- ▶ 13. $\cos 4x + 4 \sin^2 x = 1 + 2 \sin^2 2x$
- ▶ 14. $4 - 6 \cos x = 3 \sin^2 x - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$
- ▶ 15. $5 + 2 \sin 2x - 5 \cos x = 5 \sin x$
- ▶ 16 [2]. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$
- ▶ 17. $\cos 4x + 8 \sin^2 x - 2 = 6 \cos 2x - 8 \cos^4 x$
- ▶ 18. $4 - 3 \cos 4x = 10 \sin x \cos x$
- ▶ 19 [2]. $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16} \cos^2 2x$
- ▶ 20. $\frac{6-5 \sin^2 x}{\cos^2 x} = 5 \operatorname{tg} x$
- ▶ 21 [2]. $\sin 4x = (1 + \sqrt{2})(\sin 2x + \cos 2x - 1)$
- ▶ 22. $\frac{1}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \operatorname{ctg} x + 3$
- ▶ 23. $\cos(10x + 12) + 4\sqrt{2} \sin(5x + 6) = 4$

Урок 2

Группировка и разложение на множители

Проверьте, пожалуйста, свое домашнее задание к уроку 1 (см. §1 гл.1 ч.3). Приступайте к работе над этим уроком только в случае положительной оценки. Если у вас «двойка», внимательно прочтите решения всех задач первого урока еще раз.

Второй метод решения тригонометрических уравнений называется «группировка и разложение на множители». Уже в этом уроке мы столкнемся с тем, что данная задача не обязательно решается каким-либо одним методом. Те методы, которые мы изучим, помогают последовательно сводить задачу к все более простой, пока в итоге не получится одно из простейших уравнений. В частности, под разложением на множители понимается такое разложение, что выражение, равное нулю, представляется в виде произведения нескольких сомножителей. После этого каждый из них приравняется к нулю, и, следовательно, уравнение становится проще.

К сожалению, рецептов на все случаи жизни здесь дать невозможно. Если есть конкретное уравнение, то нужно комбинировать его члены всевозможными способами, используя формулы

$$(1) \quad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

$$(2) \quad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2),$$

$$(3) \quad \operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y},$$

$$(4) \quad a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2,$$

$$(5) \quad a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab,$$

$$(6) \quad \left(a \pm \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} \pm 2,$$

пока не удастся разложить. Но, в общем-то, успех здесь никому не гарантирован. Тем не менее, чем больше опыта в решении подобных задач, тем вероятность успеха выше.

► **Задача 1.** $2 \cos 2x = \sqrt{6}(\cos x - \sin x)$.

Решение. Мы знаем, что $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$. Подставив это значение $\cos 2x$ в наше уравнение и перенеся все в левую

часть, получим: $2(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - \sqrt{6}(\cos x - \sin x) = 0 \iff$
 $(\cos x - \sin x)(2(\cos x + \sin x) - \sqrt{6}) = 0 \iff \begin{cases} \cos x - \sin x = 0 \\ 2(\cos x + \sin x) - \sqrt{6} = 0 \end{cases}$. Далее все просто.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 2.** $2\sin^3 x - \cos 2x - \sin x = 0$.

Решение. $2\sin^3 x - \cos 2x - \sin x = 0 \iff \sin x(2\sin^2 x - 1) - (1 - 2\sin^2 x) = 0 \iff$
 $0 \iff (2\sin^2 x - 1)(\sin x + 1) = 0 \iff (1 - 2\sin^2 x)(\sin x + 1) = 0 \iff$
 $\cos 2x(\sin x + 1) = 0 \iff \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin x + 1 = 0 \end{cases}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 3.** $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$.

Решение. Преобразуем выражение, стоящее в левой части уравнения:
 $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) = (\sin x + \cos x)(1 - \frac{1}{2} \sin 2x)$. Значит, наше уравнение приводится к виду

$$(\sin x + \cos x - 1)(1 - \frac{1}{2} \sin 2x) = 0 \iff \begin{cases} \sin x + \cos x = 1, \\ \sin 2x = 2. \end{cases}$$

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 4 [2].** $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = \sin x$.

Решение. Отметим сначала, что ОДЗ данного уравнения состоит из таких x , что $\cos x \neq 0$ и $\cos 2x \neq 0$. Далее,

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = \sin x \Leftrightarrow -\frac{\sin x}{\cos x \cos 2x} = \sin x \Leftrightarrow \sin x \left(1 + \frac{1}{\cos x \cos 2x} \right) = 0.$$

Нам необходимо решить уравнение $\sin x = 0$ и отобрать решения, входящие в ОДЗ. Но если $x = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, то $\cos x = \pm 1 \neq 0$ и $\cos 2x = 1$ (нарисуйте все это на круге!), так что все такие x входят в ОДЗ.

Далее, $1 + \frac{1}{\cos x \cos 2x} = 0 \iff \cos x \cos 2x = -1$. Значит, как $\cos x$, так и $\cos 2x$ не равны нулю (ведь их произведение равно $-1 \neq 0$).

Заметим, что $|\cos x| \leq 1$ и $|\cos 2x| \leq 1$, причем если хотя бы одно из этих чисел по модулю строго меньше единицы, то и их произведение тоже строго меньше единицы, будучи произведением числа, меньшего по модулю чем 1, на число, не превосходящее 1. Значит, $|\cos x| = 1$ и $|\cos 2x| = 1$ и последнее уравнение распадается на две системы:

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos 2x = -1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \cos x = -1, \\ \cos 2x = 1. \end{cases}$$

Но если $\cos x = \pm 1$, то $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1$, откуда следует, что первая система решений не имеет, а вторая эквивалентна уравнению $\cos x = -1$, все решения которого входят в серию $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. ◀

► **Задача 5** [2]. $2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 4x$.

Решение. Наше уравнение эквивалентно уравнению

$$(7) \quad \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 4x - \operatorname{tg} x \iff \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} = \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 4x}.$$

Решив уравнение $\sin 3x = 0$, получаем $x = \frac{n\pi}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. Отметим точки на круге, представляющие эту серию. Это будут $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

Точки на круге, не входящие в ОДЗ, будут

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}.$$

Напомним, что для того, чтобы их найти, надо записать решения уравнений $\cos x = 0$, $\cos 2x = 0$, $\cos 4x = 0$ в виде серий $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$, и придавать числу n значения $0, 1, 2, \dots$, пока точки из каждой серии не начнут повторяться. В результате первая серия даст две точки, вторая — четыре, а третья — восемь. Мы видим, что все решения уравнения $\sin 3x = 0$ входят в ОДЗ.

Полезно в тот момент, когда получена часть окончательного ответа, а еще предстоят длительные поиски других частей, обвести найденный кусок ответа в рамочку, чтобы потом, при выписывании полного ответа, легче было его искать:

$$x = \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

В дальнейшем любое выражение, молчаливо выписанное в рамочку, будет означать, что это готовый кусок ответа.

Чтобы закончить решение исходного уравнения, сократим уравнение (7) на $\sin 3x$.

Получим

$$\frac{1}{\cos x \cos 2x} = \frac{1}{\cos x \cos 4x} \iff \cos 2x = \cos 4x \iff 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0,$$

откуда $\cos 2x = 1$ или $\cos 2x = -\frac{1}{2}$. Любое решение последних двух уравнений входит в ОДЗ, так как $\cos 4x = \cos 2x \neq 0$, а $\cos x = 0 \Rightarrow \cos 2x = -1$, т.е. и $\cos x \neq 0$.

Ответ: $x = \frac{n\pi}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. ◀

► **Задача 6.** $5(\sin x + \cos x) + \sin 3x - \cos 3x = 2\sqrt{2}(2 + \sin 2x)$.

Решение. Здесь нужно не побояться четко проделать длинные выкладки:

$$5(\sin x + \cos x) + \sin 3x - \cos 3x = 2\sqrt{2}(2 + \sin 2x)$$

$$\Downarrow$$

$$5(\sin x + \cos x) + 3\sin x - 4\sin^3 x - 4\cos^3 x + 3\cos x = 2\sqrt{2}(2 + 2\sin x \cos x)$$

$$\Downarrow$$

$$(\sin x + \cos x)(5 + 3 - 4(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x)) = 4\sqrt{2}(1 + \sin x \cos x)$$

$$\Downarrow$$

$$4(\sin x + \cos x)(1 + \sin x \cos x) = 4\sqrt{2}(1 + \sin x \cos x).$$

Поскольку всегда $1 + \sin x \cos x > 0$ (докажите сами!), последнее уравнение равносильно уравнению $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \iff x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$. ◀

► **Задача 7** [2]. $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 16 \cos 2x$.

Решение. Заметив, что $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, преобразуем наше уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 16 \cos 2x &\iff \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\cos^2 x \sin^2 x} = 16 \cos 2x \iff \\ &\iff \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} = 16 \cos 2x. \end{aligned}$$

Если $\cos 2x = 0 \iff x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$, то $\sin x \neq 0 \neq \cos x$, так как для таких x синус и косинус равны по модулю $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Итак, $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}}$.

Решим уравнение

$$\frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} = 16 \iff \cos^2 x \sin^2 x = \frac{1}{16}.$$

Отсюда видно, что $\sin x \neq 0 \neq \cos x$, если x удовлетворяет последнему уравнению. Оно эквивалентно $\sin^2 2x = \frac{1}{4} \iff \sin 2x = \pm \frac{1}{2}$. Дальше ясно.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$. ◀

► **Задача 8.** $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$.

Решение. Мы уже знаем из задачи 5 урока 1, что $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$. Воспользовавшись тем, что $\cos 2x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$, вынесем за скобки выражение $(\cos x + \sin x)$:

$$(\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x + 1 + \cos x - \sin x) = 0 \iff (\sin x + \cos x)(2 \cos x + 1) = 0.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi, x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$. ◀

► **Задача 9** [3]. $2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + 2 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = 0$.

Решение. $2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + 2 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = 0 \iff 2 \operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg} 3x) + \operatorname{tg} 2x(1 + \operatorname{tg} 3x) = 0 \iff (2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x)(\operatorname{tg} 3x + 1) = 0$. Решив уравнение

$$(*) \quad \operatorname{tg} 3x + 1 = 0 \iff x = -\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

выясним, какие его корни входят в ОДЗ. На круге корни уравнения (*) представлены шестью точками: $\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}, \frac{19\pi}{12}$ и $\frac{23\pi}{12}$, причем в ОДЗ не входят элементы множества $\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$, на котором не определены либо $\operatorname{tg} x$, либо $\operatorname{tg} 2x$ — соответствующие решения (*) у нас подчеркнуты. Собирая решения (*), оставшиеся неподчеркнуты, записываем кусок ответа: $x = \frac{7\pi}{12} + n\pi, \frac{11\pi}{12} + n\pi, \frac{19\pi}{12} + n\pi, \frac{23\pi}{12} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Решаем уравнение $2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 0$. Воспользуемся формулой $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ и вынесем за скобки $\operatorname{tg} x$: $\operatorname{tg} x \left(2 + \frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \right) = 0$. Если $\operatorname{tg} x = 0$, то определены $\operatorname{tg} 2x$ и $\operatorname{tg} 3x$, так что получаем еще кусок ответа: $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Остается решить уравнение $1 + \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0 \iff \frac{2 - \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0 \iff \operatorname{tg} x = \pm \sqrt{2}$. Здесь можно молчаливо считать очевидным, что все такие x входят в ОДЗ, поскольку они «плохо» выражаются (т.е. не совпадают с рациональными частями числа π).

Ответ: $x = \frac{7\pi}{12} + n\pi, x = \frac{11\pi}{12} + n\pi, x = \frac{19\pi}{12} + n\pi, x = \frac{23\pi}{12} + n\pi, x = \pm \arctg \sqrt{2} + n\pi, x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$. ◀

► **Задача 10** [3]. $\frac{\operatorname{tg} t}{\cos^2 5t} - \frac{\operatorname{tg} 5t}{\cos^2 t} = 0$.

Решение. Приведем уравнение к общему знаменателю:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} t \cos^2 t - \operatorname{tg} 5t \cos^2 5t}{\cos^2 5t \cos^2 t} = 0 &\iff \frac{\sin t \cos t - \sin 5t \cos 5t}{\cos^2 5t \cos^2 t} = 0 \iff \\ &\iff \frac{1}{2} \frac{\sin 2t - \sin 10t}{\cos^2 5t \cos^2 t} = 0 \iff -\frac{\sin 4t \cos 6t}{\cos^2 t \cos^2 5t} = 0. \end{aligned}$$

Нарисуем на круге точки, не входящие в ОДЗ, — это будут

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{7\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, \frac{13\pi}{10}, \frac{17\pi}{10}, \frac{19\pi}{10}.$$

Точки, дающие решение уравнения $\sin 4t \cos 6t = 0$, — это

$$0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}.$$

Подчеркнуты те точки, которые надо отбросить. Мы видим, что все решения уравнения $\cos 6t = 0$ входят в ОДЗ — отсюда получаем

Ответ: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{6}, x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$. ◀

Наш урок закончен. Если у вас первый уровень и вы — сами решили четыре задачи — оценка 5;

- сами решили три задачи — оценка 4;
- решили две задачи и поняли все мои решения — оценка 3;
- подглядывали формулы не менее двух раз, то оценка уменьшается на 1 балл;
- решили менее двух задач или чего-то не поняли в тексте решений — оценка 2. В этом случае надо, не решая домашнего задания, перейти к третьему уроку, а потом вернуться к этому.

Если у вас второй уровень и вы

- сами решили 7 задач — оценка 5;
- сами решили 5 задач — оценка 4;
- сами решили 3 задачи и в одной получили правильный ответ, забыв о проверке, а также поняли все мои решения — оценка 3;
- подглядывали формулы не менее двух раз, то оценка уменьшается на один балл;
- чего-нибудь не поняли из моих решений или решили не более трех задач — оценка 2. В этом случае, не решая домашнего задания, перейдите к третьему уроку, а после него вернитесь к этому.

Если ваш уровень третий и вы

- сами решили 8 задач — оценка 5;
- сами решили 6 задач — оценка 4;
- сами решили 4 задачи — оценка 3;
- не менее двух раз подглядывали формулы, вычтите из оценки 1 балл;
- сами решили менее 4 задач или не смогли разобрать решение хотя бы одной не получившейся задачи — оценка 2. В этом случае, не решая домашнего задания, перейдите к уроку 3, а после него вернитесь к данному уроку.

Домашнее задание

- ▶ 1. $\sin x(3 \sin 2x \sin^3 x + 12 \sin 2x \sin x - 16 \cos x) + 2 \sin 4x = 0$
- ▶ 2. $3 \cos 4x + 2 \cos 2x(10 \cos^4 x + 3 \cos^2 x + \sin^2 x) + 3 = 0$
- ▶ 3. $(1 + 2 \sin x) \sin x = \sin 2x + \cos x$
- ▶ 4. $\sin x + \sin 2x + (1 + 2 \cos x) \cos x = 0$
- ▶ 5 [3]. $6 \operatorname{tg} x + 5 \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$
- ▶ 6. $\sin 3x \cos x = \frac{3}{2} \operatorname{tg} x$
- ▶ 7. $\cos x + \sin x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$
- ▶ 8 [3]. $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = 2 \sin \frac{\pi}{4}$
- ▶ 9. $2(\sin^3 x + \cos^3 x) = 3 \sin 2x(\sin x + \cos x)$
- ▶ 10. $\sin 2x(\operatorname{tg}^2 x + 3) = 4(\cos 2x - 1)$

- 11. $16 \sin x - \sin 2x = 1 - \cos 2x$
- 12 [3]. $4 \sin x + 2 \cos x = 2 + 3 \operatorname{tg} x$
- 13 [2]. $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2} \sin 2x$
- 14. $3 \operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x + 4 \operatorname{ctg} x + 3 \operatorname{ctg}^2 x + 2 = 0$
- 15. $\sqrt{3}(\cos 2x + 1) = 2 \cos x(2 - \cos 2x)$
- 16. $2(\cos x - 1) \sin 2x = 3 \sin x$
- 17 [3]. $3 \sin x \cos x + 4 \sin x = 4 - 3 \cos^2 x + \cos x$
- 18. $2 \sin x \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} x = \sin x + 3 \cos x + 3$
- 19 [2]. $2 \sin x - 4 \cos x - \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - 2 \cos x \operatorname{ctg} x - 2$
- 20. $1 - 5 \sin x = 5 \operatorname{ctg} x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}$

Урок 3

Сведение к однородным уравнениям

Начнем с проверочного теста-разминки, показывающего, насколько вы готовы к данному уроку. Он (и критерии его оценки) одинаков для всех уровней. Итак, **никуда не подглядывая**, ответьте на следующие вопросы, записывая их номера и ставя ответ сразу после номера.

1. Выразите $\sin^2 x$ через $\cos 2x$.
2. $\cos(\alpha - \beta) = ?$
3. $\cos x = -1 \iff ?$
4. $\sin y + \cos y = ?$
5. $1 + \operatorname{ctg}^2 x = ?$
6. $\sin 3x = ?$
7. $\operatorname{tg} \frac{17}{3}\pi = ?$
8. $\arccos(-\frac{1}{2}) = ?$
9. $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = ?$
10. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = ?$
11. $a^3 - b^3 = ?$
12. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \iff ?$
13. $\sin 7x = \frac{3}{2\sqrt{2}} \iff ?$
14. $\cos 3x = ?$
15. в какой четверти лежит угол $\sqrt{7}$ радиан?
16. при каких x определена функция $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$?
17. $\cos \pi = ?$
18. $1 + \sin 2x = ?$
19. $\cos 2x = ?$ (написать четыре различных формулы).
20. $\cos x = -\frac{1}{2} \iff ?$

Теперь, пожалуйста, сверьтесь с ответами. Если правильных ответов у вас меньше десяти, **вы к уроку не готовы**; повторите формулы и упражнения урока 1. Если вы прошли этот тест, читайте дальше.

Третий метод упрощения тригонометрических уравнений — сведение их к однородным уравнениям, т.е. к одному из уравнений вида

$$(1) \quad A \sin x + B \cos x = 0,$$

$$(2) \quad A \sin^2 x + B \sin x \cos x + C \cos^2 x = 0$$

— здесь A , B и C — какие-то числа.

Продemonстрируем сначала, как решать уравнения вида (2). Если оба числа A, B равны нулю, то все просто. Пусть, например, $A \neq 0$. Предположим, что $\cos x = 0$. Подставим это значение косинуса в уравнение (2). Получим

$$A \sin^2 x + B \sin x \cdot 0 + C \cdot 0 = 0 \iff A \sin^2 x = 0 \iff \sin x = 0,$$

чего не может быть, так как $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Значит, $\cos x \neq 0$ и можно разделить (2) на $\cos^2 x$. Получим уравнение $A \operatorname{tg}^2 x + B \operatorname{tg} x + C = 0$ — дальше ясно. Точно так же при помощи деления на $\cos x$ или $\sin x$ решается уравнение (1).

Отметим, что при решении подобной задачи на экзамене **обязательно приводить полное доказательство** того, что $\cos x \neq 0$ или $\sin x \neq 0$.

К уравнению (2) сводятся уравнения вида

$$P \sin^2 x + Q \cos^2 x + R \sin 2x + S \cos 2x + T \sin x \cos x + U = 0$$

посредством формул $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

► **Задача 1.** $12 \sin^2 x + 3 \sin 2x - 2 \cos^2 x = 2$.

Решение. Заменяем $3 \sin 2x$ на $6 \sin x \cos x$ и число 2 на $2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x$. Приведя подобные члены, получим уравнение $10 \sin^2 x + 6 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x = 0$. Пусть $\cos x = 0$. Подставив это значение косинуса в предыдущее уравнение, получим $10 \sin^2 x = 0 \iff \sin x = 0$ — противоречие с тем, что $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Значит, $\cos x \neq 0$ и можно разделить уравнение на $\cos^2 x$. Получим $10 \operatorname{tg}^2 x + 6 \operatorname{tg} x - 4 = 0$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, $x = \operatorname{arctg} \frac{2}{5} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. ◀

► **Задача 2.** $4 \cos^2 \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \sin x + 5 \sin^2 \frac{x}{2} = 3$.

Решение. Заменим $\frac{3}{2} \sin x$ на $3 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, а число 3 — на $3 \sin^2 \frac{x}{2} + 3 \cos^2 \frac{x}{2}$. После упрощений получим

$$\cos^2 \frac{x}{2} + 3 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} + 2 \sin^2 \frac{x}{2} \iff 2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0 \iff \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $x = -2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. ◀

► **Задача 3.** $\sin^2 x - \sqrt{2} \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 1$.

Решение:

$$\begin{aligned} \sin^2 x - \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) &= 1 \iff \\ \iff \sin^2 x - \sqrt{2} \left(\cos 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) &= 1 \iff \\ \iff \sin^2 x - \cos 2x - \sin 2x &= 1 \iff \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0 \iff \\ \iff \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Ответ: $x = \operatorname{arctg}(1 \pm \sqrt{3}) + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. ◀

► **Задача 4.** $\sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) + 3 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 3$.

Решение. Воспользуемся формулой синуса разности для первого слагаемого и тем, что

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1 + \cos 2\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{2} = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)}{2} = \frac{1 - \sin 2x}{2}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos 2x - \cos \frac{\pi}{3} \sin 2x \right) + \frac{3}{2} (1 - \sin 2x) &= 3 \iff \\ \iff \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \sin 2x &= 3 \iff \\ \iff 3 \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x - 3 \sin 2x - 3 &= 0 \iff \\ \iff \sin 2x (3 + \sqrt{3}) + 3(1 - \cos 2x) &= 0 \iff \\ 2 \sin x \cos x (3 + \sqrt{3}) + 6 \sin^2 x &= 0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение эквивалентно совокупности

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ (3 + \sqrt{3}) \cos x + 3 \sin x = 0. \end{cases}$$

С первым уравнением все ясно, а второе эквивалентно уравнению $3 \operatorname{tg} x + 3 + \sqrt{3} = 0$.

Ответ: $x = n\pi$, $x = -\operatorname{arctg} \frac{3+\sqrt{3}}{3} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. ◀

► **Задача 5.** $5 \sin x - 2 \cos x = 0$.

Решение. Вы не забыли о том, что перед тем как поделить уравнение на выражение, содержащее переменную, надо доказать, что это выражение никогда не обращается в нуль? Мы это опускали в предыдущих задачах для краткости, но в экзаменационном решении этого делать нельзя!

Итак, пусть $\cos x = 0$. Тогда $5 \sin x - 2 \cdot 0 = 0 \iff \sin x = 0$, чего не может быть ввиду $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Значит, можно поделить уравнение на $\cos x$. Мы получим уравнение $5 \operatorname{tg} x - 2 = 0$.

Ответ: $x = \operatorname{arctg} \frac{2}{5} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. ◀

► **Задача 6.** $5 \sin x - 2 \cos x = 1$.

Решение. Воспользовавшись формулами

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}, \quad \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}, \quad 1 = \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2},$$

приведем наше уравнение к виду

$$10 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 3 \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = 0.$$

Дальше все ясно.

Ответ: $x = 2 \operatorname{arctg}(-5 \pm \sqrt{28}) + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$. ◀

► **Задача 7.** $\cos^6 x + \sin^6 x - \cos^2 2x = \frac{1}{16}$.

Решение. Рассматривая выражение $\sin^6 x + \cos^6 x$ как сумму кубов, преобразуем его к виду

$$\begin{aligned} (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x) &= \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x. \end{aligned}$$

Значит, наше уравнение равносильно следующему:

$$\begin{aligned} 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x - \cos^2 2x &= \frac{1}{16} \iff 1 - \cos^2 2x - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{1}{16} \iff \\ \sin^2 2x - \frac{3}{4} \sin^2 2x &= \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Значит, $\frac{1}{4} \sin^2 2x = \frac{1}{16}$, и далее решение легко закончить.

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$. ◀

► **Задача 8.** $\cos 2x - \sin^3 x \cos x + 1 = \sin^2 x + \sin x \cos^3 x$.

Решение. Перенесем все члены уравнения в левую часть: $\cos 2x - (\sin^3 x \cos x + \sin x \cos^3 x) + 1 - \sin^2 x = 0 \iff \cos^2 x - \sin^2 x - \sin x \cos x (\cos^2 x + \sin^2 x) + \cos^2 x = 0 \iff 2 \cos^2 x - \sin x \cos x - \sin^2 x = 0$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + n\pi, x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. ◀

► **Задача 9** [2]. $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2 \cos x - \sin x} = \cos 2x$.

Решение. Поскольку $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)$ и $\cos 2x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$, наше уравнение легко приводится к следующему виду:

$$(\cos x + \sin x) \left(\frac{1 - \sin x \cos x}{2 \cos x - \sin x} - \cos x + \sin x \right) = 0.$$

Докажем, что все решения уравнения $\cos x + \sin x = 0$ входят в ОДЗ. Действительно, если $\sin x + \cos x = 0$, то $\sin x = -\cos x$. Нам надо проверить, что $2 \cos x - \sin x \neq 0$. Но если $2 \cos x - \sin x = 0$, то, учитывая, что $\sin x = -\cos x$, получаем, что $2 \cos x - (-\cos x) = 0 \iff 3 \cos x = 0 \iff \cos x = 0$ и $\sin x = -\cos x = 0$, чего не может быть по основному тригонометрическому тождеству. Полученное противоречие доказывает, что можно обвести в рамочку решения уравнения

$$\sin x + \cos x = 0 \iff \boxed{x = -\frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}}.$$

Нам осталось решить уравнение

$$\frac{1 - \sin x \cos x}{2 \cos x - \sin x} - \cos x + \sin x = 0.$$

Приведем его к общему знаменателю:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sin x \cos x - \sin^2 x - 2 \cos^2 x + 3 \sin x \cos x}{2 \cos x - \sin x} &= 0 \\ \updownarrow \\ \frac{2 \sin x \cos x - \cos^2 x}{2 \cos x - \sin x} &= 0. \end{aligned}$$

Докажем, что все решения уравнения $2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$ входят в ОДЗ. В самом деле, если $2 \cos x - \sin x = 0$, то $\sin x = 2 \cos x$, и, подставив в уравнение, получаем $2 \cos x \cos x - \cos^2 x = 0 \iff \cos x = 0$. Но тогда и $\sin x = 2 \cos x = 0$ — противоречие с $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Дальнейшее ясно.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x = \arctg \frac{1}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. ◀

► **Задача 10** [2]. $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x} = 6 \cos 2x + 4 \sin 2x$.

Решение. Преобразуем выражение, стоящее в левой части:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x} &= \frac{\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}}{\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \operatorname{tg} x} = \frac{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}}{\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}} = \\ &= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1}{\cos 2x}. \end{aligned}$$

У нас получается уравнение

$$\frac{1}{\cos 2x} = 6 \cos 2x + 4 \sin 2x.$$

После приведения к общему знаменателю оно примет вид

$$\frac{6 \cos^2 2x + 4 \sin 2x \cos 2x - 1}{\cos 2x} = 0 \Leftrightarrow \frac{5 \cos^2 2x + 4 \sin 2x \cos 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x} = 0.$$

Точно так же, как в задаче 9, доказывается, что все решения уравнения $5 \cos^2 2x + 4 \sin 2x \cos 2x - \sin^2 2x = 0$ входят в ОДЗ.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$, $x = \frac{1}{2} \arctg \frac{1}{5} + \frac{n\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$. ◀

Третий урок закончен. Для всех уровней оценка ставится следующим образом:

- решено 50% задач — тройка;
- решено 75% задач — четверка;
- решено 90% задач — пятерка.

Домашнее задание

- ▶ 1. $3 \cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0$
- ▶ 2. $5 \sin x - 2 \cos x = \frac{\sqrt{29}}{2}$
- ▶ 3. $28 \sin^2 x + 3 \sin 2x - 2 = 5 \cos^2 x$
- ▶ 4. $4 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 3$
- ▶ 5. $5 \sin^2 x - \cos^2 x = 4 + 4 \sin x \cos x$
- ▶ 6. $(1 + \operatorname{tg}^2 x) \sin x - \operatorname{tg}^2 x + 1 = 0$
- ▶ 7. $2 \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{5}$
- ▶ 8. $\sin x - 3 \cos x = \frac{1}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}$
- ▶ 9. $\sin^2 x - 5 \cos^2 x + 1 = \sin 2x - 2 \cos 2x$
- ▶ 10. $2 \sin(3x - 2) + 3 \cos(3x - 2) = \sqrt{13}$
- ▶ 11. $2 \sin 4x + 16 \sin^3 x \cos x + 3 \cos 2x - 5 = 0$
- ▶ 12. $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 7x = 1$
- ▶ 13. $\sin 3x + 4 \sin^3 x + 4 \cos x = 5$
- ▶ 14 [3]. $\sin^5 x + \cos^5 x = 1$
- ▶ 15 [2]. $3 \operatorname{tg} 3x - \operatorname{ctg} 2x = 4 \operatorname{tg} x$
- ▶ 16. $\operatorname{ctg} x - 2 \cos 2x = 1$
- ▶ 17. $\operatorname{tg}^2 x + \cos 4x = 0$
- ▶ 18 [2]. $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos x}{1 - \sin x}$
- ▶ 19 [3]. $4 \operatorname{tg} 4x - 4 \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 4x$
- ▶ 20 [3]. $\cos(2^x) - 2 \operatorname{tg}^2(2^{x-1}) + 2 = 0$

Урок 4

Преобразование сумм в произведения и произведений в суммы

Задачи, которые мы рассмотрим на этом уроке, можно назвать задачами, которые решаются случайно. Это означает, что они придуманы таким образом, что практически любое изменение формулировки делает задачу нерешаемой. Например, может быть так, что при надлежащем преобразовании сокращается $\sin 17x$ и остается простое уравнение. Однако если мы заменим где-нибудь $17x$ на $16x$, то решить исходное уравнение будет невозможно.

Такая ситуация чаще всего возникает в задачах, где нужно применять формулы преобразования сумм в произведения и наоборот. Вот формулы, которые мы с вами должны знать в совершенстве:

$$(1) \quad \sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$$

$$(2) \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

$$(3) \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$$

$$(4) \quad \sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

$$(5) \quad \sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x + y) + \sin(x - y))$$

$$(6) \quad \cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x + y) + \cos(x - y))$$

Применять их надо, когда тригонометрические функции берутся от аргумента большой кратности (т.е. от $5x$, $8x$ и т.п.). При этом единственная надежда решающего состоит в том, что все плохое сократится рано или поздно.

► **Задача 1.** $\sin x + \sin 3x = 4 \cos^3 x$.

Решение. Применим формулу (1):

$$\sin x + \sin 3x = 2 \sin \frac{x + 3x}{2} \cos \frac{x - 3x}{2} = 2 \sin 2x \cos x.$$

Подставляя это значение $\sin x + \sin 3x$ в исходное уравнение и вынося $\cos x$ за скобки, получим $\cos x(\sin 2x - 2 \cos^2 x) = 0 \iff \cos^2 x(\sin x - \cos x) = 0$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 2.** $\cos^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{8} + x\right) = \frac{1}{2}$.

Решение. Представим разность квадратов как произведение разности косинусов на их сумму и воспользуемся формулами (2) и (3):

$$\begin{aligned} \cos^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{8} + x\right) &= \frac{1}{2} \\ \Updownarrow \\ \left(\cos\left(\frac{\pi}{8} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{8} + x\right)\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{8} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{8} + x\right)\right) &= \frac{1}{2} \\ \Updownarrow \\ -4 \sin \frac{\frac{\pi}{8} - x + \frac{\pi}{8} + x}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{8} - x - \frac{\pi}{8} - x}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{8} - x + \frac{\pi}{8} + x}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{8} - x - \frac{\pi}{8} - x}{2} &= \frac{1}{2} \\ \Updownarrow \\ 2 \sin \frac{\pi}{8} \sin x (2 \cos \frac{\pi}{8} \cos x) &= \frac{1}{2} \\ \Updownarrow \\ 2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} (2 \sin x \cos x) = \frac{1}{2} &\iff \sin \frac{\pi}{4} (\sin 2x) = \frac{1}{2} \iff \sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 3.** $\cos 3x \cos 4x + \sin 2x \sin 5x = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x)$.

Решение. Из формул (4) и (6) следует, что $\cos 3x \cos 4x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 7x)$ и $\sin 2x \sin 5x = \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos 7x)$. Значит, наше уравнение эквивалентно следующему: $\cos x + \cos 7x + \cos 3x - \cos 7x = \cos 2x + \cos 4x \iff \cos x + \cos 3x = \cos 2x + \cos 4x \iff 2 \cos x \cos 2x = 2 \cos 3x \cos x \iff \cos x(\cos 2x - \cos 3x) = 0 \iff \cos x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{5x}{2} = 0$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $2n\pi$, $\frac{2}{5}n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 4** [2]. $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$.

Решение. Заменяем тангенс и котангенсы их выражениями через синусы и косинусы:

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\sin 3x} &= \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \iff \frac{\sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x}{\sin x \sin 3x} = \\ &= \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \iff \frac{\sin 4x}{\sin x \sin 3x} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}. \end{aligned}$$

Заметим, что в синусе от $4x$ «сидит» синус от $2x$, и произведем соответствующее вынесение за скобки:

$$\sin 2x \left(\frac{2 \cos 2x}{\sin x \sin 3x} - \frac{1}{\cos 2x} \right) = 0.$$

Уравнение $\sin 2x = 0$ эквивалентно совокупности $\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases}$. Легко видеть, что в ОДЗ входят лишь решения уравнения $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Решим уравнение

$$\frac{2 \cos 2x}{\sin x \sin 3x} - \frac{1}{\cos 2x} = 0.$$

После приведения к общему знаменателю левой части и приравнивания числителя к нулю, получим уравнение $2 \cos^2 2x - \sin x \sin 3x = 0 \iff 2 \cos^2 2x - \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) = 0 \iff 4 \cos^2 2x - \cos 2x + 2 \cos^2 2x - 1 = 0 \iff 6 \cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0 \iff \begin{cases} \cos 2x = \frac{1}{2} \\ \cos 2x = -\frac{1}{3} \end{cases}$.

Докажем, что все решения полученной совокупности принадлежат ОДЗ. То, что $\cos 2x \neq 0$, совсем ясно. Далее, множество таких x , что $\sin x = 0$, лежит в множестве таких x , что $\sin 3x = 0 \iff \sin x(3 - 4 \sin^2 x) = 0$. Значит, достаточно доказать, что $\sin x \neq 0$ и $\sin^2 x \neq \frac{3}{4}$. Но если $\sin x = 0, \frac{3}{4}$, то $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = 1, -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$, что и требовалось доказать.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + n\pi, \pm \frac{\pi}{6} + n\pi, \pm \frac{1}{2} \arccos(-\frac{1}{3}) + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. ◀

► **Задача 5.** $\sin 2x \sin 6x \cos 4x + \frac{1}{4} \cos 12x = 0$.

Решение. Заменим $\sin 2x \sin 6x$ на $\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x)$ в данном уравнении. После умножения на 4 получим, что

$$2 \cos^2 4x - 2 \cos 4x \cos 8x + \cos 12x = 0 \iff 2 \cos^2 4x - \cos 12x - \cos 4x + \cos 12x = 0 \iff 2 \cos^4 x - \cos 4x = 0.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}, x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$. ◀

► **Задача 6.** $4 \sin 5x \cos 5x (\cos^4 x - \sin^4 x) = \sin 4x$.

Решение. Поскольку $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos 2x$, наше уравнение равносильно следующему:

$$\begin{aligned} 4 \sin 5x \cos 5x \cos 2x &= \sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x \iff \\ \iff \cos 2x(2 \sin 5x \cos 5x - \sin 2x) &= 0 \iff \\ \iff \cos 2x(\sin 10x - \sin 2x) &= 0 \iff \cos 2x \sin 4x \cos 6x = 0. \end{aligned}$$

Ответ: $x = \frac{n\pi}{4}, x = \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$. ◀

► **Задача 7.** $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{8} \cos 15x$.

Решение. Предположим, что $\sin x = 0 \iff x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Тогда $\cos x = \pm 1, \cos 2x = \cos 4x = \cos 8x = 1, \cos 15x = \pm 1$. Значит, левая часть

уравнения равна по модулю единице, тогда как правая не превосходит $\frac{1}{8}$. Мы доказали тем самым, что если x удовлетворяет нашему уравнению, то $\sin x \neq 0$. Следовательно, оно эквивалентно выписанному ниже.

$$\begin{aligned} \frac{\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x}{\sin x} &= \frac{1}{8} \cos 15x \iff \\ \iff \frac{1}{\sin x} \cdot 4 \cdot \underbrace{2 \sin x \cos x}_{=\sin 2x} \cos 2x \cos 4x \cos 8x &= \cos 15x \iff \\ \iff \frac{1}{\sin x} \cdot 2 \cdot \underbrace{2 \sin 2x \cos 2x}_{=\sin 4x} \cos 4x \cos 8x &= \cos 15x \iff \\ \iff \frac{2 \sin 4x \cos 4x \cos 8x}{\sin x} = \cos 15x &\iff \frac{\sin 8x \cos 8x}{\sin x} = \cos 15x \iff \\ \iff \frac{\sin 16x - 2 \sin x \cos 15x}{\sin x} = 0 &\iff \\ \iff \frac{\sin 16x - \sin 16x + \sin 14x}{\sin x} &\iff \begin{cases} \sin 14x = 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $x = \frac{n\pi}{14}$, $n \neq 14l$, $n, l \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 8.** $2 \cos 13x + 3 \cos 3x + 3 \cos 5x - 8 \cos x \cos^3 4x = 0$.

Решение. Здесь уже сразу не видно, что и как нужно преобразовывать. Воспользуемся тем, что $\cos 3x + \cos 5x = 2 \cos x \cos 4x$ и вынесем в последних двух слагаемых за скобки выражение $2 \cos x \cos 4x$. Получится уравнение

$$2 \cos 13x + 2 \cos x \cos 4x (3 - 4 \cos^2 4x) = 0.$$

Заметив, что $\cos 4x (3 - 4 \cos^2 4x) = -\cos 12x$, перепишем его в виде

$$\begin{aligned} 2 \cos 13x - 2 \cos x \cos 12x &= 0 \iff 2 \cos 13x - \cos 11x - \cos 13x = 0 \iff \\ &\iff \cos 13x - \cos 11x = 0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение, очевидно, равносильно уравнению $\sin x \sin 12x = 0$.

Ответ: $\frac{n\pi}{12}$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 9.** $\cos x \cos 2x \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 2x$.

Решение. Конечно, прежде всего надо заметить, что в синусе двойного угла «сидит» косинус и вынести пологий за скобки. Получим уравнение $\cos x (\cos 2x \sin 3x - \frac{1}{2} \sin x) = 0 \iff \cos x (\frac{1}{2} \sin 5x + \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \sin x) = 0 \iff \cos x \sin 5x = 0$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x = \frac{n\pi}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 10 [2].** $\frac{1}{\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 2x} - \frac{1}{\operatorname{ctg} 5x + \operatorname{ctg} 2x} = \operatorname{tg} 3x$.

Решение. Поскольку

$$\operatorname{ctg} 5x + \operatorname{ctg} 2x = \frac{\cos 5x}{\sin 5x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos 5x \sin 2x + \sin 5x \cos 2x}{\sin 2x \sin 5x} = \frac{\sin 7x}{\sin 5x \sin 2x}$$

и $\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 7x}{\cos 5x \cos 2x}$, наше уравнение приобретает вид

$$\frac{\sin 5x \sin 2x}{\sin 7x} - \frac{\cos 5x \cos 2x}{\sin 7x} = \operatorname{tg} 3x \iff \frac{\cos 7x}{\sin 7x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x}.$$

В области допустимых значений это уравнение эквивалентно следующему: $\cos 3x \cos 7x = \sin 3x \sin 7x \iff \cos 3x \cos 7x - \sin 3x \sin 7x = 0 \iff \cos 10x = 0$.

Теперь надо выяснить, что из решения уравнения $\cos 10x = 0$ входит в ОДЗ, состоящее из таких x , что $\sin 7x \neq 0$, $\cos 5x \neq 0$, $\cos 2x \neq 0$, $\sin 5x \neq 0$, $\sin 2x \neq 0$.

Если $\sin 2x = 0 \iff x = \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, то $\cos 10x = \cos(5n\pi) \neq 0$; если $\sin 5x = 0 \iff x = \frac{n\pi}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$, то $\cos 10x = \cos(2n\pi) = 1 \neq 0$. Если $\cos 5x = 0$, то $\cos 10x = 2\cos^2 5x - 1 = -1 \neq 0$. Это рассуждение доказывает, что если $\cos 10x = 0$, то $\cos 5x \neq 0$, $\sin 5x \neq 0$, $\sin 2x \neq 0$. Докажем, что и $\sin 7x \neq 0$. Пусть $\sin 7x = 0$. Тогда $x = \frac{n\pi}{7}$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. Если $\cos 10x = 0$, то $x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Итак,

$$\frac{n\pi}{7} = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10} \iff 20n = 7 + 14k = 7(1 + 2k).$$

Последнее равенство, тем не менее, выполняться не может, поскольку слева стоит четное число, а справа — произведение двух нечетных, т.е. нечетное. Полученное противоречие показывает, что и $\sin 7x \neq 0$.

Осталось разобраться с косинусом двойного угла. Это, в принципе, можно было бы сделать на круге, нарисовав двадцать представителей серии $\frac{\pi}{20} + \frac{13\pi}{10}$, $n \in \mathbb{Z}$, и вычеркнув из них четырех представителей серии $\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$. Мы сделаем это аналитически. Пусть для некоторых целых k, n имеем равенство

$$\frac{\pi}{20} + \frac{n\pi}{10} = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \iff 1 + 2n = 5 + 10k \iff n = 5k + 2.$$

Отсюда и получаем

Ответ: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{n\pi}{10}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 5k + 2$ ни для какого $k \in \mathbb{Z}$. ◀

Наш урок окончен. Оценка здесь для всех уровней по стандартным критериям:

- 50% верно решенных задач — тройка;
- 75% верно решенных задач — четверка;
- 90% верно решенных задач — пятерка.

Напомню, что на классной работе можно подсматривать в те формулы, которые были введены на данном уроке.

Домашнее задание

- 1. $\sin y + \cos 3y = 1 - 2 \sin^2 y + \sin 2y$
- 2. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$
- 3. $\sin 3x + \sin x + 2 \cos x = \sin 2x + 2 \cos^2 x$
- 4. $\frac{2}{\sqrt{3}}(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x) = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x - 2$
- 5 [2]. $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} + 2 \operatorname{tg} x = 0$
- 6. $3 - \operatorname{tg}^2 \frac{10}{3}\pi \cos(4(x - \frac{7}{2}\pi)) + \frac{8}{\cos \frac{5}{4}\pi} \sin(\frac{5\pi}{2} - 2x) = 0$
- 7 [2]. $\sin^4 x + \sin^4(x + \frac{\pi}{4}) + \sin^4(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{9}{8}$
- 8. $2 \sin^2 x + \sin(x^2) = 1$
- 9. $3 + 2 \sin 3x \sin x = 3 \cos 2x$
- 10. $\cos 5x \cos 4x + \cos 4x \cos 3x - \cos^2 2x \cos x = 0$
- 11. $2 \sin 3x + \cos x \cos 2x = (\cos x + \cos 3x)(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} 2x)$
- 12. $6 \sin x + 6 \cos 2x = \sin 2x \cos x + 6 \cos^2 x$
- 13 [2]. $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} \cos x) = \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} \sin x)$
- 14 [2]. $\cos(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} x) = \sin(\frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} x)$
- 15. $\sin x \cos x \sin 3x - \cos 3x \sin^2 x = 6 \operatorname{ctg} x$
- 16 [3]. При каких a уравнение

$$4 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = a^2 + \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x$$

имеет решения? Найти их.

- 17. $3 \cos(2\pi(5x + 3)^2) - 7 = 4 \cos(\pi(5x + 3)^2)$
- 18. $\sin(x + \frac{\pi}{4}) + \cos(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$
- 19. $9 \cos 3x \cos 5x + 7 = 9 \cos 3x \cos x + 12 \cos 4x$
- 20. $6 \cos 5x \cos 7x + \frac{1}{3} = \cos 2x(8 \cos 4x - 1) + 2 \cos 6x$
- 21. $11 + 12 \sin x + 4 \cos^2(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\pi) = \cos 2x$
- 22 [2]. $\sin(\pi \cos x) = \cos(\pi \sin x)$
- 23. $\cos 7x + \cos x = 4 \cos 4x$
- 24. $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$
- 25. $\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{2 - \sin x} = 0$
- 26. $\cos x + \sin(2x + \frac{\pi}{6}) - \sin(2x - \frac{\pi}{6}) + 1 = \sqrt{3}(1 + \cos 2x)$
- 27. $\cos(x + \frac{\pi}{3}) + \sin(x + \frac{\pi}{6}) - \cos 2x = 1$
- 28. $2 \cos \frac{x}{2} \sin 3x = \cos \frac{x}{2}$
- 29 [2]. $\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{ctg} 5x$
- 30. $\cos \frac{3}{2}x \cos \frac{x}{2} + \cos x = \frac{1}{2}$
- 31. $4 \sin 3x \sin x + 2 \cos 2x + 1 = 0$
- 32. $\sin(x + \frac{\pi}{4}) \cos(4x - \frac{\pi}{4}) = \cos x \cos 2x$

► 33. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 6x\right) = \cos 3x \cos 2x$

► 34. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 7x\right) + \sin 7x = 6 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right)$

Урок 5

Метод вспомогательного аргумента

Названный метод состоит в преобразовании выражения $a \sin x \pm b \cos x$ к виду $\sqrt{a^2 + b^2} \sin(x \pm \varphi)$ или, что то же самое, в доказательстве, того, что существует такое φ , что имеет место равенство

$$(1) \quad a \sin x \pm b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x \pm \varphi).$$

Использование этого равенства часто позволяет существенно упростить задачу. Отметим сразу, что этот материал не входит в школьную программу, поэтому если придется пользоваться им на письменном экзамене, *необходимо делать это с доказательством*, так как в противном случае велик шанс, что решение не засчитают.

Итак, пусть мы имеем выражение $a \sin x \pm b \cos x$, где $a > 0, b > 0$. Мы сейчас выпишем цепочку равенств, которая для комиссии является полным доказательством равенства (1), т.е. ничего больше для обоснования (1) не требуется. Для вас я дам подробные пояснения каждого из равенств цепочки. Впрочем, те, кто работает на первом уровне и обладают достаточно хорошей памятью для того, чтобы запомнить названную цепочку наизусть, пояснений могут не читать.

Вот обещанная цепочка:

$$\begin{aligned} a \sin x \pm b \cos x &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin x \cos \varphi \pm \cos x \sin \varphi) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x \pm \varphi), \end{aligned}$$

где $\varphi = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Пояснения: первое равенство выполняется просто потому, что если вне-сти $\sqrt{a^2 + b^2}$ под скобки, оно сократится со знаменателем первого и второго слагаемых и получится левая часть формулы (1); для того чтобы понять второе равенство, заметим, что мы заменили $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ на $\cos \varphi$, а выражение $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ на $\sin \varphi$.

Напомним, что $\arcsin t$ есть такое число α , что $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ и $\sin \alpha = t$. Значит, прямо из определения арксинуса следует, что $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и,

тем самым, вторая замена выполнена обоснованно. Заметим далее, что $\cos \varphi \geq 0$, так как $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Кроме того,

$$\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi = 1 - \frac{b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$$

и, значит, $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ввиду того, что $a > 0$ — мы установили второе равенство. Третье сразу вытекает из формулы синуса суммы-разности (см. урок 1, формулу (11)).

Формула (1), наконец, доказана. Отмечу еще раз, что если вы решите применять ее в письменной работе, то для доказательства достаточно выписать вышеприведенную цепочку без всяких пояснений.

► **Задача 1.** $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 2$.

Решение. Запишем нашу цепочку для данного конкретного случая:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \sin x - \cos x &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1}} \cos x \right) = \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right) = \\ &= 2 \left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

Тем самым, наше уравнение эквивалентно следующему:

$$2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 2 \iff \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 1.$$

Ответ: $x = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 2.** $5 \sin x = 3 - 2 \cos x$.

Решение. Поскольку

$$5 \sin x + 2 \cos x = \sqrt{29} \left(\frac{5}{\sqrt{29}} \sin x + \frac{2}{\sqrt{29}} \cos x \right) = \sqrt{29} \sin \left(x + \arcsin \frac{2}{\sqrt{29}} \right),$$

получаем уравнение $\sqrt{29} \sin \left(x + \arcsin \frac{2}{\sqrt{29}} \right) = 3$, и дальше все ясно.

Ответ: $x = -\arcsin \frac{2}{\sqrt{29}} + (-1)^n \arcsin \frac{3}{\sqrt{29}} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 3.** $\sqrt{2} \sin x + \cos x = \frac{7}{4}$.

Решение. Применяя формулу (1), получаем уравнение

$$\sqrt{3} \sin \left(x + \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{7}{4} \iff \sin \left(x + \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{7}{4\sqrt{3}}.$$

Возведением в квадрат убеждаемся, что $\frac{7}{4\sqrt{3}} > 1$.

Ответ: $\emptyset$. ◀

► **Задача 4.** $\sin 11x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 7x + \frac{1}{2} \cos 7x = 0$.

Решение. Поскольку $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 7x + \frac{1}{2} \cos 7x = \sin(7x + \frac{\pi}{6})$, исходное уравнение эквивалентно тому, что

$$\sin 11x + \sin\left(7x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \iff \sin\left(9x + \frac{\pi}{12}\right) \cos\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = 0.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{108} + \frac{n\pi}{9}, \frac{7\pi}{24} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$. ◀

► **Задача 5.** $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$.

Решение. Перенесем все члены с $8x$ в левую часть, а с переменной $6x$ — в правую.

$$\sin 8x - \sqrt{3} \cos 8x = \sqrt{3} \sin 6x + \cos 6x \iff 2 \sin\left(8x - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(6x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Значит, $\sin\left(8x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(6x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \iff \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(7x - \frac{\pi}{12}\right) = 0$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + n\pi, x = \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{7}, n \in \mathbb{Z}$. ◀

► **Задача 6.** $4 \cos x = \sqrt{3} \operatorname{ctg} x + 1$.

Решение. Запишем наше уравнение, заменив $\operatorname{ctg} x$ на $\frac{\cos x}{\sin x}$:

$$\begin{aligned} 4 \cos x = \sqrt{3} \frac{\cos x}{\sin x} + 1 &\iff \frac{4 \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos x - \sin x}{\sin x} = 0 \iff \\ &\iff \frac{2 \sin 2x - 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin x} = 0. \end{aligned}$$

Преобразовывая числитель с помощью формулы разности синусов, получаем систему, эквивалентную исходному уравнению:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$$

Если $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 0$, то $x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$, — ясно, что вся эта серия входит в ОДЗ. Если $\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 0$, то $x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2}{3}n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Представители этой серии — точки $\frac{2}{9}\pi, \frac{8}{9}\pi, \frac{14}{9}\pi$ на тригонометрическом круге. Ни одна из них не совпадает с точкой 0 или π , так что и вторая серия целиком входит в ОДЗ.

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi, x = \frac{2}{9}\pi + \frac{2}{3}n\pi, n \in \mathbb{Z}$. ◀

► **Задача 7.** $(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \sin 3x = 2$.

Решение. $(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \sin 3x = 2 \iff 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin 3x = 2 \iff \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin 3x = 1$.

Каждый из сомножителей нашего произведения по модулю не превосходит единицу. При этом если хотя бы один из них по модулю окажется строго меньше единицы, то его произведение на другой сомножитель будет по модулю строго меньше единицы (ибо модуль произведения равен

произведению модулей!). Значит, вышеприведенное произведение может равняться единице если и только если модули обоих сомножителей равны единице. Тем самым, имеем два случая:

$$1) \begin{cases} \sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1, \\ \sin 3x = 1. \end{cases}$$

Решение уравнения $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1$ представляется на круге единственной точкой $\frac{\pi}{6}$, которая удовлетворяет и второму уравнению. Значит, серия $\boxed{\frac{\pi}{6} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}}$ есть кусок ответа.

2) $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = -1 = \sin 3x$. Аналогичным образом заключаем, что серия $-\frac{5}{6}\pi + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$, есть последняя часть ответа.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi, x = -\frac{5}{6}\pi + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 8** [2]. $\cos 3x + \cos \frac{5}{2}x = 2$.

Решение. Из того, что $\cos 3x \leq 1$ и $\cos \frac{5}{2}x \leq 1$, следует, что левая часть не превосходит двух при любом x , и равенство может достигаться только при $\cos 3x = 1 = \cos \frac{5}{2}x$.

Решение уравнения $\cos 3x = 1$ состоит из точек вида $\frac{2}{3}n\pi, n \in \mathbf{Z}$, а уравнение $\cos \frac{5}{2}x = 1$ имеет решения $x = \frac{4}{5}k\pi, k \in \mathbf{Z}$. Значит, числа k и n должны быть такими, что

$$\frac{2}{3}n\pi = \frac{4}{5}k\pi \iff \frac{2}{3}n = \frac{4}{5}k \iff 5n = 6k.$$

Раз $6k$ делится на 5, то и k делится на 5, т.е. $k = 5l$. Следовательно, $5n = 6 \cdot 5l \iff n = 6l$. Теперь видно, что для получения ответа необходимо либо вместо k подставить $5l$ в серию $x = \frac{4}{5}k\pi, k \in \mathbf{Z}$, либо подставить $6l$ вместо n в серию $\frac{2}{3}n\pi, n \in \mathbf{Z}$.

В любом случае мы получим один и тот же

Ответ: $x = 4l\pi, l \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 9** [2]. $\sin^7 x + \cos^6 x = 1$.

Решение. Заметим, что $\sin^7 x \leq \sin^2 x$ и $\cos^6 x \leq \cos^2 x$ для любых x . Сложив эти неравенства, получим, что

$$\sin^7 x + \cos^6 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

для любого x , причем если $\sin^7 x < \sin^2 x$ или $\cos^6 x < \cos^2 x$, то левая часть исходного уравнения строго меньше единицы (ибо строгое неравенство, сложенное с нестрогим, дает строгое).

Значит, наше уравнение эквивалентно системе $\begin{cases} \sin^7 x = \sin^2 x \\ \cos^6 x = \cos^2 x \end{cases}$. Из первого уравнения имеем $\sin x = 0, 1$, из второго — $\cos x = 0, \pm 1$. Дальше все просто.

Ответ: $x = n\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 10** [2]. $\sin^2 x + 4 \cos^2 x - 2 \sin 2x + \sin x - 2 \cos x = 2$.

Решение. Заметим, что

$$\sin^2 x + 4 \cos^2 x - 2 \sin 2x = \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = (\sin x - 2 \cos x)^2.$$

Полагая $y = \sin x - 2 \cos x$, получим уравнение $y^2 + y - 2 = 0 \iff y = 1, -2$.
Учитывая, что $y = \sqrt{5} \sin(x - \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}})$, получаем

Ответ: $\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} + (-1)^n \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + n\pi$, $\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} + (-1)^{n+1} \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. ◀

Урок закончен. Оценка выставляется стандартно для всех уровней.

Домашнее задание

- ▶ 1. $\cos 2x = \sqrt{3} \sin 2x - 1$
- ▶ 2. $2 \sin x + 7 \cos x = \frac{\sqrt{53}}{2}$
- ▶ 3. $\sqrt{3} \sin 2x + 2 \sin^2 x - 1 = 2 \cos x$
- ▶ 4. $3 \sin x + 4 \cos x = 5$
- ▶ 5. $\sin x + \cos x = \frac{3}{2}$
- ▶ 6. $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{3}$
- ▶ 7. $\cos 2x = 1 - 2 \sin x + \sqrt{3} \sin 2x$
- ▶ 8. $3 \operatorname{tg} x = 4 + \frac{5}{\cos x}$
- ▶ 9. $(\sin x - \sqrt{3} \cos x) \sin 3x = 2$
- ▶ 10. $(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \sin 4x = 2$
- ▶ 11. $\cos 2x - \sin 2x = 1 - \sin x - \cos x$
- ▶ 12. $(\cos x - 2 \sin x - 2)(1 - \sin x) = \cos^2 x$
- ▶ 13. $\sqrt{3} \cos x + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x}$
- ▶ 14. $4 \sin^2 x = \sin 2x + 2 \sin x + 5 \cos x + 5$
- ▶ 15 [2]. $\sin \frac{3}{2}x + \cos \frac{x}{2}(\sin x + 3) = 1 + \sin x - \sin \frac{x}{2}$
- ▶ 16 [2]. $\sin x - \sin 15x \cos x = \frac{3}{2}$
- ▶ 17 [3]. $\sin 3x - 2 \sin 18x \sin x = 3\sqrt{2} - \cos 3x + 2 \cos x$
- ▶ 18 [3]. $2\sqrt{3} \sin 5x - \sqrt{3} \sin x = \cos 24x \cos x + 2 \cos 5x - 6$
- ▶ 19 [3]. Для каждого a решить уравнение $\sin(x - a) = \sin x + \sin a$
- ▶ 20 [3]. Для каждого a решить уравнение

$$4 \cos x \sin a + 2 \sin x \cos a - 3 \cos a = 2\sqrt{7}.$$

Урок 6 [2]

Системы тригонометрических уравнений

Решение систем тригонометрических уравнений чаще всего сводится к решению алгебраических систем относительно $\cos x$, $\operatorname{tg} y$, $\cos(x+y)$, $\sin(x+y)$ и т.п.

Например, если мы привели исходную систему к системе вида

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ \cos(x-y) = 1, \end{cases}$$

то она эквивалентна линейной системе

$$(1) \quad \begin{cases} x+y = n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}, \\ x-y = 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$

откуда легко найти, что

$$(2) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}(n+2k)\pi \\ y = \frac{1}{2}(n-2k)\pi \end{cases}, \quad n, k \in \mathbf{Z}.$$

Здесь нужно особо отметить, что *совершенно необходимо писать разные целочисленные параметры* при решении независимых простейших уравнений, т.е. в системе (1) числа n и k должны быть обозначены разными буквами. Если бы мы использовали одну и ту же букву, было бы потеряно бесконечное множество решений, а именно, множество таких пар (x, y) , задаваемых уравнениями (2), что в их определении $n \neq k$.

Еще одна идея, которая может использоваться при решении систем, — это выражение одного переменного через другое и подстановка в другое уравнение. Это можно сделать только в том случае, когда выразить одну переменную через другую можно достаточно просто.

Например, если мы нашли, что $x = y + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ и хотим подставить вместо x его выражение через y в $\cos x$, то придется рассмотреть два случая:

1) n нечетно, т.е. $n = 2k + 1$ для некоторого $k \in \mathbf{Z}$; тогда $\cos x = \cos(y + \pi + 2k\pi) = \cos(y + \pi) = -\cos y$.

2) n четно, т.е. $n = 2k$ для некоторого $k \in \mathbf{Z}$; тогда $\cos x = \cos(y + 2k\pi) = \cos y$.

Если же трудно понять, как будут себя вести тригонометрические функции при подстановке, лучше ее не применять.

► **Задача 1.**
$$\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$$

Решение. Если сложить и вычесть уравнения системы, то получится система, эквивалентная исходной. Итак,

$$\begin{cases} \sin x \cos y + \cos x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x \cos y - \cos x \sin y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin(x+y) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin(x-y) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x+y = (-1)^n \frac{\pi}{3} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x-y = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \iff \begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}(n+k)\pi, \\ y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}(n-k)\pi, \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:
$$\begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}(n+k)\pi, \\ y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}(n-k)\pi \end{cases}, \quad n, k \in \mathbb{Z}. \quad \blacktriangleleft$$

► **Задача 2.**
$$\begin{cases} \cos(x-y) = 2 \cos(x+y), \\ \cos x \cos y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Решение. Мы знаем, что $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$. Значит, наша система принимает вид

$$\begin{cases} \cos(x-y) = 2 \cos(x+y), \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) = \frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(x-y) = 1, \\ \cos(x+y) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ:
$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + (n+k)\pi, \\ y = \pm \frac{\pi}{6} + (n-k)\pi \end{cases}, \quad k, n \in \mathbb{Z}. \quad \blacktriangleleft$$

► **Задача 3.**
$$\begin{cases} 4 \sin y - 6\sqrt{2} \cos x = 5 + 4 \cos^2 y, \\ \cos 2x = 0. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем второе уравнение: $\cos 2x = 0 \iff 2 \cos^2 x - 1 = 0 \iff \cos^2 x = \frac{1}{2} \iff \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Рассмотрим два случая: $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Пусть $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда, подставив это значение в первое уравнение, получим

$$4 \sin y - 6 = 5 + 4 \cos^2 y \iff 4 \sin^2 y + 4 \sin y - 15 = 0 \iff$$

$$\sin y = \frac{3}{2} \quad \text{или} \quad \sin y = -\frac{5}{2},$$

так что в этом случае первое уравнение и, следовательно, система решений не имеют.

Если $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, то первое уравнение приобретает вид

$$4 \sin y + 6 = 5 + 4 \cos^2 y \iff 4 \sin^2 y + 4 \sin y - 3 = 0 \iff \sin y = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\begin{cases} x = \pm \frac{3}{4}\pi + 2n\pi, & n \in \mathbf{Z}, \\ y = (-1)^k \frac{\pi}{8} + k\pi, & k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$ ◀

► **Задача 4.** $\begin{cases} \cos x \sqrt{\cos y} = 0, \\ \cos 2x - 2 \cos^2 y + 2 = 0. \end{cases}$

Решение. Первое уравнение эквивалентно тому, что либо $\cos x = 0$, $\cos y \geq 0$, либо $\cos y = 0$.

Если $\cos x = 0$, то $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = -1$, и второе уравнение принимает вид $-1 - 2 \cos^2 y + 2 = 0 \iff \cos^2 y = \frac{1}{2} \iff \cos y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, так как согласно ОДЗ $\cos y \geq 0$.

Итак, имеем кусок ответа $\boxed{\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + n\pi \\ y = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}, k, n \in \mathbf{Z}}.$

Если $\cos y = 0$, то, подставляя это значение во второе уравнение, получим $\cos 2x + 2 = 0 \iff \emptyset$.

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + n\pi \\ y = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}, k, n \in \mathbf{Z}.$ ◀

► **Задача 5.** $\begin{cases} \cos x \cos y = -\frac{1}{4}, \\ \operatorname{tg} y = \operatorname{ctg} x \end{cases}$

Решение. Запомним, что ОДЗ состоит из таких пар (x, y) , что $\cos y \neq 0$, $\sin x \neq 0$, преобразуем второе уравнение к виду

$$\sin x \sin y = \cos x \cos y.$$

Значит, наша система эквивалентна следующей (из нее же, кстати, видно, что проверка на ОДЗ не нужна, так как из первого ее уравнения следует, что $\cos x \neq 0$, а из второго — что $\sin x \neq 0$):

$$\begin{cases} \cos x \cos y = -\frac{1}{4}, \\ \sin x \sin y = -\frac{1}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(x - y) = -\frac{1}{2}, \\ \cos(x + y) = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + (\frac{n}{2} + k)\pi, \\ y = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + (k - \frac{n}{2})\pi, \end{cases} n, k \in \mathbf{Z}.$ ◀

► **Задача 6.** $\begin{cases} \sin x = \sin y, \\ \cos x = \sin 2y. \end{cases}$

Решение. Переносим в каждом из уравнений системы все в левую часть и пользуясь формулами преобразования разности синусов в произведение,

получим, что $\begin{cases} \sin x = \sin y, \\ \cos x = \sin 2y \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x - \sin y = 0, \\ \sin(\frac{\pi}{2} - x) - \sin 2y = 0 \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} = 0, \\ \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} - y) \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} + y) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, наша система распадается на четыре:

$$(3) \quad \begin{cases} \sin \frac{x+y}{2} = 0, \\ \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} - y) = 0, \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \sin \frac{x-y}{2} = 0, \\ \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} + y) = 0, \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} \cos \frac{x+y}{2} = 0, \\ \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} + y) = 0, \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = 0, \\ \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} - y) = 0. \end{cases}$$

Ясно, что система (3) равносильна следующей:

$$\begin{cases} x - y = 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} - y = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}(2n - k)\pi \\ y = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}(n + k)\pi \end{cases}, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Точно так же просто решаются системы (4)–(6).

Ответ:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}(2n - k)\pi \\ y = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}(n + k)\pi \end{cases}, \quad n, k \in \mathbb{Z}, \\ & \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + (4n + 2k)\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + (2n + 2k)\pi \end{cases}, \quad k, n \in \mathbb{Z}, \\ & \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}(2n - k)\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}(n + k)\pi \end{cases}, \quad k, n \in \mathbb{Z}, \\ & \begin{cases} x = \frac{3}{2}\pi + 2(2n + k)\pi \\ y = -\frac{\pi}{2} - 2(n + k)\pi \end{cases}, \quad k, n \in \mathbb{Z}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

► **Задача 7.**
$$\begin{cases} \cos x + 3 \sin x = 2 \cos y, \\ \cos y + 3 \sin y = 2 \cos x. \end{cases}$$

Решение. Если мы заменим первое уравнение суммой, а второе — разностью уравнений системы, то, очевидно, получим систему, эквивалентную исходной. Итак,

$$\begin{cases} \cos x + \cos y + 3(\sin x + \sin y) = 2(\cos x + \cos y), \\ \cos x - \cos y + 3(\sin x - \sin y) = 2(\cos y - \cos x) \end{cases}$$

⇕

$$\begin{cases} \cos x + \cos y - 3(\sin x + \sin y) = 0, \\ \cos x - \cos y + \sin x - \sin y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & \Updownarrow \\
 & \begin{cases} 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - 6 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 0, \\ -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2} + 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} = 0 \end{cases} \\
 & \Updownarrow \\
 & \begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} (\cos \frac{x+y}{2} - 3 \sin \frac{x+y}{2}) = 0, \\ \sin \frac{x-y}{2} (\sin \frac{x+y}{2} - \cos \frac{x+y}{2}) = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Теперь ясно, что и эта система распадается на четыре:

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & \begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = 0, \\ \sin \frac{x-y}{2} = 0, \end{cases} \\
 (8) \quad & \begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = 0, \\ \sin \frac{x+y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} = 0, \end{cases} \\
 (9) \quad & \begin{cases} \cos \frac{x+y}{2} - 3 \sin \frac{x+y}{2} = 0, \\ \sin \frac{x-y}{2} = 0, \end{cases} \\
 (10) \quad & \begin{cases} \cos \frac{x+y}{2} - 3 \sin \frac{x+y}{2} = 0, \\ \sin \frac{x+y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Синус и косинус не могут одновременно равняться нулю — отсюда следует, что система (7) не имеет решений. Первое уравнение системы (10) эквивалентно $\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = \frac{1}{3}$, а второе равносильно тому, что $\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = 1$, откуда видно, что и система (10) не имеет решений. Далее,

$$\begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = 0, \\ \sin \frac{x+y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = \pi + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x + y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Отсюда уже легко находятся x и y :

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}\pi + (n+k)\pi, \\ y = -\frac{\pi}{4} + (k-n)\pi, \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Система (9), очевидно, эквивалентна тому, что

$$\begin{cases} x - y = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x + y = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Дальше все просто.

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{3}{4}\pi + (n+k)\pi, \\ y = -\frac{\pi}{4} + (k-n)\pi, \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}, \quad \begin{cases} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + (n+k)\pi, \\ y = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + (n-k)\pi, \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}.$

► **Задача 8.** $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \sin 2x = \sin 2y, \\ 2 \sin y \cos(x+y) + \sin x = 0. \end{cases}$

Решение. Поскольку $2 \sin y \cos(x+y) = \sin(x+2y) - \sin x$, первое уравнение равносильно тому, что $\sin(x+2y) = 0 \iff x+2y = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \iff 2y = n\pi - x, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Подставим выражение, полученное для $2y$, в первое уравнение:

$$\operatorname{tg} x + \sin 2x = \sin(n\pi - x) = \sin(n\pi) \cos x - \cos(n\pi) \sin x = -\cos(n\pi) \sin x.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x + \sin 2x + \cos(n\pi) \sin x &= 0 \iff \sin x \left(\frac{1}{\cos x} + 2 \cos x + \cos(n\pi) \right) = 0 \\ &\iff \sin x \frac{2 \cos^2 x + \cos(n\pi) \cos x + 1}{\cos x} = 0. \end{aligned}$$

Дискриминант числителя дроби равен $\cos^2(n\pi) - 8 = -7 < 0$, так что последнее уравнение равносильно тому, что $\sin x = 0$ (ОДЗ не оказывает здесь влияния на ответ, так как $\sin x = 0 \implies \cos x \neq 0$).

Ответ: $\begin{cases} x = k\pi \\ y = \frac{1}{2}(n - k)\pi \end{cases}, \quad n, k \in \mathbb{Z}. \quad \blacktriangleleft$

► **Задача 9 [3].** $\begin{cases} 2 \cos(2x + y) = \cos y, \\ 2 \cos(x + 2y) = \cos x. \end{cases}$

Решение. Сложив и вычтя наши уравнения, получим систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} 2(\cos(2x + y) + \cos(x + 2y)) = \cos x + \cos y, \\ 2(\cos(x + 2y) - \cos(2x + y)) = \cos x - \cos y \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 4 \cos \frac{3}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y) = 2 \cos \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}, \\ 4 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{3}{2}(x + y) = -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}. \end{cases}$$

Опять наша система распалась на четыре более простых:

$$(11) \quad \begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = 0, \\ \sin \frac{x-y}{2} = 0, \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = 0, \\ 2 \sin \frac{3}{2}(x + y) + \sin \frac{x+y}{2} = 0, \end{cases}$$

$$(13) \quad \begin{cases} \sin \frac{x-y}{2} = 0, \\ 2 \cos \frac{3}{2}(x + y) - \cos \frac{x+y}{2} = 0, \end{cases}$$

$$(14) \quad \begin{cases} 2 \sin \frac{3}{2}(x + y) + \sin \frac{x+y}{2} = 0, \\ 2 \cos \frac{3}{2}(x + y) - \cos \frac{x+y}{2} = 0. \end{cases}$$

Ясно, что система (11) не имеет решений. Докажем то же самое и про систему (14). Обозначим $\frac{1}{2}(x+y)$ через t и воспользуемся формулами для синуса и косинуса тройного угла. Получим, что

$$\begin{cases} 2(3 \sin t - 4 \sin^3 t) + \sin t = 0, \\ 2(4 \cos^3 t - 3 \cos t) - \cos t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 7 \sin t - 8 \sin^3 t = 0, \\ 8 \cos^3 t - 7 \cos t = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения либо $\sin t = 0$, либо $\sin^2 t = \frac{7}{8}$. Если $\sin t = 0$, то $\cos t = \pm 1$ и второе уравнение не может выполняться. Если $\sin^2 t = \frac{7}{8}$, то $\cos^2 t = \frac{1}{8} \neq 0$, тогда как из второго уравнения либо $\cos t = 0$, либо $\cos^2 t = \frac{7}{8}$; мы доказали, что система (14) не имеет решений.

Займемся системой (12). Первое ее уравнение равносильно $x - y = \pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, а второе эквивалентно либо $\sin(x+y) = 0 \iff x+y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, либо $\sin(x+y) = \pm \sqrt{\frac{7}{8}} \iff x+y = (-1)^k \arcsin(\pm \sqrt{\frac{7}{8}}) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Отсюда уже легко найти x и y . Система (13) решается совершенно аналогично.

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin(\pm \sqrt{\frac{7}{8}}) + (n + \frac{k}{2})\pi \\ y = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin(\pm \sqrt{\frac{7}{8}}) + (\frac{k}{2} - n)\pi \end{cases}, \quad n, k \in \mathbb{Z},$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + (n + \frac{k}{2})\pi \\ y = -\frac{\pi}{2} + (\frac{k}{2} - n)\pi \end{cases}, \quad n, k \in \mathbb{Z},$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + (n + k)\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + (k - n)\pi \end{cases}, \quad n, k \in \mathbb{Z},$$

$$\begin{cases} x = \pm \arccos(\pm \sqrt{\frac{7}{8}}) + (2k + n)\pi \\ y = \pm \arccos(\pm \sqrt{\frac{7}{8}}) + (2k - n)\pi \end{cases}, \quad n, k \in \mathbb{Z}. \quad \blacktriangleleft$$

► **Задача 10** [3]. $\begin{cases} 4 \sin(3x + 2y) + \sin x = 0, \\ 4 \sin(2x + 3y) + \sin y = 0. \end{cases}$

Решение. Точно так же, как в предыдущей задаче, надо сложить и вычесть уравнения этой системы. Получим равносильную ей систему

$$\begin{cases} 4(\sin(3x + 2y) + \sin(2x + 3y)) + \sin x + \sin y = 0, \\ 4(\sin(3x + 2y) - \sin(2x + 3y)) + \sin x - \sin y = 0 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 8 \sin \frac{5}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y) + 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 0, \\ 8 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{5}{2}(x+y) + 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} (4 \sin \frac{5}{2}(x+y) + \sin \frac{x+y}{2}) = 0, \\ \sin \frac{x-y}{2} (4 \cos \frac{5}{2}(x+y) + \cos \frac{x+y}{2}) = 0. \end{cases}$$

И вновь наша система разбивается на четыре более простых:

$$(15) \quad \begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = 0, \\ \sin \frac{x-y}{2} = 0, \end{cases}$$

$$(16) \quad \begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = 0, \\ 4 \cos \frac{5}{2}(x+y) + \cos \frac{x+y}{2} = 0, \end{cases}$$

$$(17) \quad \begin{cases} 4 \sin \frac{5}{2}(x+y) + \sin \frac{x+y}{2} = 0, \\ \sin \frac{x-y}{2} = 0, \end{cases}$$

$$(18) \quad \begin{cases} 4 \sin \frac{5}{2}(x+y) + \sin \frac{x+y}{2} = 0, \\ 4 \cos \frac{5}{2}(x+y) + \cos \frac{x+y}{2} = 0. \end{cases}$$

Конечно же, система (15) решений не имеет. Докажем то же самое про систему (18). Обозначим $\frac{x+y}{2}$ через t . Нам потребуется решить уравнения $4 \cos 5t + \cos t = 0$ и $4 \sin 5t + \sin t = 0$. Займемся первым из них. Имеем

$$\begin{aligned} \cos 5t &= \cos t \cos 4t - \sin t \sin 4t = \cos t \cos 4t - 2 \sin t \sin 2t \cos 2t = \\ &= \cos t \cos 4t - 4 \sin^2 t \cos t \cos 2t = \cos t (\cos 4t - 2(1 - \cos 2t) \cos 2t) = \\ &= \cos t (4 \cos^2 2t - 2 \cos 2t - 1). \end{aligned}$$

Следовательно, $4 \cos 5t + \cos t = 0 \iff \cos t (16 \cos^2 2t - 8 \cos 2t - 3) = 0$. Тем самым, либо $\cos t = 0$, либо $\cos 2t = -\frac{1}{4}$, либо $\cos 2t = \frac{3}{4}$. Последние два равенства выполняются тогда и только тогда, когда $\cos^2 t = \frac{3}{8}$ или $\cos^2 t = \frac{7}{8}$.

Аналогично $4 \sin 5t + \sin t = 0 \iff \sin t = 0$ или $\sin^2 t = \frac{3}{8}$ или $\sin^2 t = \frac{7}{8}$.

Если $\sin t = 0$, то $\cos^2 t = 1 \neq 0, \frac{7}{8}, \frac{3}{8}$. Если $\sin^2 t = \frac{3}{8}$, то $\cos^2 t = \frac{5}{8} \neq 0, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}$. И, наконец, если $\sin^2 t = \frac{7}{8}$, то $\cos^2 t = \frac{1}{8} \neq 0, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}$. Тем самым завершено доказательство того, что система (18) не имеет решений.

Для того, чтобы решить систему (16), заметим, что второе ее уравнение уже упрощено и эквивалентно тому, что либо $\cos \frac{x+y}{2} = 0$, либо $\cos \frac{x+y}{2} = \pm \sqrt{\frac{3}{8}}$, либо $\cos \frac{x+y}{2} = \pm \sqrt{\frac{7}{8}}$.

Теперь уже легко завершить решение (16). Система (17) решается аналогично.

Ответ:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x = \pi + (k+l)\pi \\ y = \pi + (l-k)\pi \end{cases}, \quad k, l \in \mathbf{Z}, \\
 & \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \pm \arccos(\pm \sqrt{\frac{3}{8}}) + (2l+k)\pi \\ y = -\frac{\pi}{2} \pm \arccos(\pm \sqrt{\frac{3}{8}}) + (2l-k)\pi \end{cases}, \quad k, l \in \mathbf{Z}, \\
 & \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \pm \arccos(\pm \sqrt{\frac{7}{8}}) + (2l+k)\pi \\ y = -\frac{\pi}{2} \pm \arccos(\pm \sqrt{\frac{7}{8}}) + (2l-k)\pi \end{cases}, \quad k, l \in \mathbf{Z}, \\
 & \begin{cases} x = (k+l)\pi \\ y = (l-k)\pi \end{cases}, \quad k, l \in \mathbf{Z}, \\
 & \begin{cases} x = (-1)^k \arcsin(\pm \sqrt{\frac{3}{8}}) + (l+k)\pi \\ y = (-1)^k \arcsin(\pm \sqrt{\frac{3}{8}}) + (k-l)\pi \end{cases}, \quad k, l \in \mathbf{Z}, \\
 & \begin{cases} x = (-1)^k \arcsin(\pm \sqrt{\frac{7}{8}}) + (l+k)\pi \\ y = (-1)^k \arcsin(\pm \sqrt{\frac{7}{8}}) + (k-l)\pi \end{cases}, \quad k, l \in \mathbf{Z}. \quad \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

Наш урок закончен. Оценка выставляется стандартным образом. При этом если вам пришлось подглядывать формулы, снизьте ее на балл.

Домашнее задание

- 1. $\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} z = 3 \\ \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z = 6 \\ x + y + z = \pi \end{cases}$
- 2. $\begin{cases} \sin x = \sin 2y \\ \cos x = \sin y \end{cases}$
- 3. $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = 3 \\ |x - y| = \frac{\pi}{3} \end{cases}$
- 4. $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{3}{4} \\ x + y = \frac{\pi}{3} \end{cases}$
- 5. $\begin{cases} 4 \operatorname{tg} 3y = 3 \operatorname{tg} 2x \\ 2 \sin x \cos(x - y) = \sin y \end{cases}$
- 6. $\begin{cases} \operatorname{ctg} x + \sin 2y = \sin 2x \\ 2 \sin y \sin(x + y) = \cos x \end{cases}$

- 7. $\begin{cases} \sin x + \sec y = 2 \\ \sin x \cdot \sec y = \frac{1}{2} \end{cases}$
- 8. $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2}-2}{2} \end{cases}$
- 9. $\begin{cases} \sin x \cos(x+y) + \sin(x+y) = 3 \cos(x+y) \\ 4 \sin x = 5 \operatorname{ctg}(x+y) \end{cases}$
- 10. $\begin{cases} \sin(2x + \sin^2 y) = 0 \\ x - 3 \sin^2 y = -2 \end{cases}$
- 11. $\begin{cases} \sin x + \operatorname{tg} y = 0 \\ \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 1 \end{cases}$
- 12. $\begin{cases} 2\sqrt{3} \cos x + 6 \sin y = 3 + 12 \sin^2 x \\ 4\sqrt{3} \cos x + 2 \sin y = 7 \end{cases}$
- 13. $\begin{cases} 2(5 + 2\sqrt{6}) \sin x + 2 \cos y = 2\sqrt{2} \cos 2x - 5\sqrt{2} - 3\sqrt{3} \\ 2(3 + \sqrt{6}) \sin x + 2 \cos y + 3\sqrt{2} + \sqrt{3} = 0 \end{cases}$
- 14. $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4} \\ 3 \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} y \end{cases}$
- 15. $\begin{cases} \sin x \cos y = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = 1 \end{cases}$
- 16. $\begin{cases} \sqrt{\sin x} \cdot \cos y = 0 \\ 2 \sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0 \end{cases}$
- 17. $\begin{cases} \sqrt{\cos 2x} \cdot \cos y = 0 \\ 2 \sin^2 x - \cos(2y - \frac{\pi}{3}) = 0 \end{cases}$

Все следующие задачи относятся к третьему уровню. Их надо решить для произвольного параметра a . Это означает, что надо указать все a , для которых уравнение имеет решение, и при таких a найти все решения.

- 18 [3]. $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{5}{6} \sin a \\ \cos x \cos y = \frac{5}{6} \cos a \end{cases}$
- 19 [3]. $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{1}{2} \\ \sec^2 x + \sec^2 y = \frac{8}{3-a} \end{cases}$
- 20 [3]. $\begin{cases} \sin x \cos y = a^2 \\ \sin y \cos x = a \end{cases}$
- 21 [3]. Решить систему $\begin{cases} a \cos(2x + y) = \cos y \\ a \cos(x + 2y) = \cos x \end{cases}$ при всех $a > 1$.

Урок 7 [3]

Обратные тригонометрические функции

Обратные тригонометрические функции — это $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\operatorname{arccotg} x$. В принципе, для того, чтобы решить любую задачу про них, достаточно очень твердо, как порой говорят, «железно», знать их определения, не забывая никакой самой малой малости. Проверьте себя для начала — напишите определения этих функций, не заглядывая на следующую страницу, где они все даны, и потом сверьтесь с этим текстом. Сразу замечу, что самое маленькое отличие делает ваше определение неверным. Не огорчайтесь, если таким оно и оказалось. Ничего страшного — моя богатая репетиторская практика показывает, что подавляющее большинство школьников (в том числе и те, кто потом блестяще сдает математику) не могут точно определить эти функции.

Для того, чтобы как-то заполнить эту страницу и дать определения на следующей, порассуждаю немножко об этом явлении. Не то, конечно же, странно, что в средних школах бывшего Союза математике обучают плохо. Станным является тот факт, что определенные виды школьного материала неплохо знают даже троечники, причем есть масса тем, которые прескверно знают отличники и медалисты; более того, во всех регионах страны те темы, которые школьники знают хорошо, и те, что они знают плохо, **совпадают**.

Я, пожалуй, даже назову эти темы: пусть, скажем, их будет по пять штук того и другого типа, хотя, конечно же тем, которые все знают плохо, значительно больше.

Итак, почти все школьники неплохо

- 1) решают квадратные уравнения;
- 2) решают биквадратные уравнения;
- 3) выполняют действия с дробями;
- 4) знают теорему Пифагора и теорему косинусов;
- 5) знают приближенные значения некоторых констант (π , $\sqrt{2}$, g и др.).

Практически все они отвратительно

- 1) знают синусы и косинусы простейших углов (таких как $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ и др.);
- 2) вычисляют производные;
- 3) представляют себе, что такое модуль числа;
- 4) решают текстовые задачи;

5) представляют себе, что такое прогрессии.

Заметьте, что я специально выбрал для той и другой группы темы попроще — со сложными тут все ясно. На мой взгляд, было бы интересно понять, почему и в Молдове, и в Узбекистане школьников как хорошо, так и плохо обучают одним и тем же темам. Возможно, тут сказывается унификация школьных программ по всему бывшему Союзу, но, думаю, одним этим названное явление не объясняется. Ведь все школьники учатся по одному учебнику, в котором все, в общем-то, правильно объяснено и написано, и учителя на разъяснение названных простых тем тратят по плану примерно одно и то же время. Но, тем не менее, одни ученики понимают и запоминают, а другое дружно нет. Может, учебник плох и что-то изложено непонятно, но что же, все учителя настолько **одинаково** плохи, что не могут этого разъяснить?

Думаю, здесь есть еще много работы для психологов и педагогов.

Ну вот, страница давно закончилась, и пора приступать к определениям.

Итак, $y = \arcsin x \equiv$ (этот значок заменяет русскую фразу «означает по определению, что») $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и $\sin y = x$.

Далее,

$$y = \arccos x \equiv y \in [0, \pi] \quad \text{и} \quad \cos y = x,$$

$$y = \arctg x \equiv y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \quad \text{и} \quad \tg y = x,$$

$$y = \text{arcctg } x \equiv y \in (0, \pi) \quad \text{и} \quad \text{ctg } y = x.$$

Чтобы было понятней, первое из определений постараюсь «разжевать» настолько, насколько это возможно.

Оно утверждает, что число (а не угол!) y является арксинусом числа x если и только если y лежит на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (а это, в свою очередь, равносильно тому, что одновременно $-\frac{\pi}{2} \leq x$ и $x \leq \frac{\pi}{2}$) и $\sin y = x$.

Пока это не будет понято «душой», решать задачи бестолку, и вы будете время от времени произносить абсурдные утверждения типа «арксинус нуля равен пи-эн».

Продemonстрируем на задачах, как применяются эти определения.

► **Задача 1.** $\sin(\arccos(-\frac{1}{4})) = ?$

Решение. Пусть $y = \arccos(-\frac{1}{4})$. Тогда $y \in [0, \pi]$ и $\cos y = -\frac{1}{4}$. На отрезке $[0, \pi]$ синус неотрицателен, так что $\sin y \geq 0$. Из того, что $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, и положительности синуса следует, что

$$\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y}.$$

Вспомнив теперь, что $\cos y = -\frac{1}{4}$, получаем, что (искомое)

$$\sin y = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{4}$. ◀

► **Задача 2.** $\cos(\operatorname{arctg}(-2)) = ?$

Решение. Снова пусть $y = \operatorname{arctg}(-2)$. Это равносильно тому, что $y \in (0, \pi)$ и $\operatorname{ctg} y = -2$. Из отрицательности котангенса следует, что на самом деле про y можно утверждать, что $y \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Значит, $\cos y < 0$ (советую взглянуть на тригонометрический круг и убедиться, что косинус во второй четверти отрицателен). Кроме того,

$$1 + \operatorname{ctg}^2 y = \frac{1}{\sin^2 y} \Rightarrow \sin^2 y = \frac{1}{1 + (-2)^2} = \frac{1}{5}$$

и, значит, $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos y = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

Ответ: $-\frac{2}{\sqrt{5}}$. ◀

► **Задача 3.** $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{7}{23} = ?$

Решение. Можно считать известным, что арктангенс есть возрастающая функция. Значит, $\operatorname{arctg} \frac{1}{4} < \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ и $\operatorname{arctg} \frac{7}{23} < \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, откуда $y = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{7}{23} < 2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$. Ясно, что $y > 0$. Подсчитаем, чему равен тангенс y .

$$\operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{4}) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{7}{23})}{1 - \operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{4}) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{7}{23})} = \frac{\frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{7}{23}}{1 - \frac{8}{15 \cdot 23}} = 1.$$

Раз $\operatorname{tg} y = 1$, имеем $y = \frac{\pi}{4} + n\pi$ для некоторого $n \in \mathbf{Z}$. Подставим значение y в неравенство $0 < y < \frac{3}{4}\pi$:

$$0 < \frac{\pi}{4} + n\pi < \frac{3\pi}{4} \iff -\frac{\pi}{4} < n\pi < \frac{\pi}{2} \iff -\frac{1}{4} < n < \frac{1}{2} \iff n = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$. ◀

► **Задача 4.** $\arcsin(\sin 14) = ?$

Решение. Пусть $y = \arcsin(\sin 14)$. Тогда $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и $\sin y = \sin 14 \iff \sin y - \sin 14 = 0 \iff \sin(\frac{y}{2} - 7) \cos(\frac{y}{2} + 7) = 0 \iff \begin{cases} y=14+2n\pi \\ y=\pi-14+2n\pi \end{cases}$ для некоторого $n \in \mathbf{Z}$.

Предположим, что найдется такое n , что $-\frac{\pi}{2} \leq \pi - 14 + 2n\pi \leq \frac{\pi}{2}$. Если $n = 0$, то $\pi - 14 < 4 - 14 = -10 < -\frac{\pi}{2}$. Понятно, что ни одно $n < 0$ не годится. Пусть $n = 1$. Тогда по-прежнему $\pi - 14 + 2\pi < 12 - 14 = -2 < -\frac{\pi}{2}$. Пусть $n = 2$. Тогда $\pi - 14 + 4\pi > \frac{\pi}{2} \iff 5\pi - \frac{\pi}{2} > 14 \iff 9\pi > 28$. Последнее неравенство верно, поскольку $\pi > 3,13 > \frac{28}{9}$. Тем более, любое $n > 2$ не годится.

Следовательно, обязательно будет $y = 14 + 2n\pi$. Непосредственным подбором убеждаемся, что $n = -2$ годится. Как догадаться, что нужно взять именно такое n ? Для этого нужно прикинуть, каким должно быть n , считая, что число π равно то ли трем, то ли четырем. Кроме того, если число $y = 14 + 2n\pi$ попадает на отрезок от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то оно лежит в промежутке от -2 до 2 и ясно, что надо проверять лишь те n , которые лежат от -3 до -2 , так как при $n = -4$ имеем $14 + 2n\pi = 14 - 8\pi < -10$, а если $n = -1$, то $14 + 2n\pi = 14 - 2\pi > 4$.

Ответ: $14 - 4\pi$. ◀

► **Задача 5.** Доказать, что для любого $x \in [-1, 1]$ имеем

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Наше равенство эквивалентно тому, что $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$. Обозначим выражение $\frac{\pi}{2} - \arccos x$ через y . Для того, чтобы обосновать наше равенство, мы должны, согласно определению арксинуса, проверить, что $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и $\sin y = x$.

Но $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \arccos x \leq \frac{\pi}{2} \iff -\pi \leq -\arccos x \leq 0 \iff \pi \geq \arccos x \geq 0$, а последнее неравенство верно по определению арккосинуса. Мы доказали, что $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Кроме того, $\sin y = \sin(\frac{\pi}{2} - \arccos x) = \cos(\arccos x) = x$, и все доказано.

► **Задача 6.** Доказать, что $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

Решение. Запишем доказуемое равенство в виде $\arcsin x = -\arcsin(-x)$, обозначим выражение $\arcsin x = -\arcsin(-x)$ через y и докажем, что $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и $\sin y = x$.

В самом деле, $-\frac{\pi}{2} \leq -\arcsin(-x) \leq \frac{\pi}{2} \iff \frac{\pi}{2} \geq \arcsin(-x) \geq -\frac{\pi}{2}$, а последнее неравенство выполняется по определению арксинуса.

Наконец, $\sin(-\arcsin(-x)) = -\sin(\arcsin(-x)) = -(-x) = x$, и доказательство закончено.

► **Задача 7.** Доказать, что $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

Решение. Поскольку $\cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x$, остается проверить, что $0 \leq \pi - \arccos x \leq \pi \iff -\pi \leq -\arccos x \leq 0 \iff \pi \geq \arccos x \geq 0$. Последнее неравенство верно по определению арккосинуса, чем все и доказано.

► **Задача 8.** Решить уравнение $\sin(5 \operatorname{arctg} x) = 1$.

Решение. Исходное уравнение эквивалентно тому, что $5 \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, $\iff \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}n$, $n \in \mathbb{Z}$. Из определения арккотангенса следует, что $0 < \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}n < \pi \iff 0 < \frac{1}{10} + \frac{2n}{5} < 1 \iff -\frac{1}{4} < n < \frac{5}{2} \iff n = 0, 1, 2$. Последняя эквивалентность имеет место из-за того, что n целое.

Итак, наше уравнение эквивалентно совокупности трех:

$$\begin{cases} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{10}, \\ \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{arctg} x = \frac{9\pi}{10}. \end{cases}$$

Ответ: $x = 0$, $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{10}$, $\operatorname{ctg} \frac{9\pi}{10}$. ◀

► **Задача 9.** Решить уравнение $\arcsin x - \operatorname{arctg} x = 0$.

Решение. Заметим сразу, что ОДЗ нашего уравнения состоит из таких x , что $-1 \leq x \leq 1$, ибо только при таких x определена функция $\arcsin x$. Кроме того, арккотангенс всегда положителен. Значит, положителен и равный ему арксинус. Поэтому $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Но на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$ равенство чисел эквивалентно равенству их синусов. Следовательно,

$$\begin{aligned} \arcsin x = \operatorname{arctg} x &\Leftrightarrow x = \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2(\operatorname{arctg} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \\ &\Leftrightarrow x^4 + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}. \end{aligned}$$

Последняя эквивалентность выполняется, поскольку $x > 0$. Из того, что $x < 1$, следует, что $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Ответ: $x = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$. ◀

► **Задача 10.** $\operatorname{arctg}(2 + \cos x) - \operatorname{arctg}(1 + \cos x) = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Обозначим $1 + \cos x$ через y . Тогда наше уравнение эквивалентно $\operatorname{arctg}(1 + y) = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} y$. Отсюда следует, что $1 + y = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} y) = \frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow \frac{(1+y)y}{1-y} \Leftrightarrow y = 0, -1$. Проверкой убеждаемся, что каждое из значений y подходит в исходное уравнение. Учитывая, что $|\cos x| \leq 1$, получаем

Ответ: $x = \pi + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

Наш урок окончен. Оценка ставится стандартным образом. ◀

Домашнее задание

- 1. Доказать, что $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ для любых x .
- 2. Доказать, что $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ для любых x .
- 3. Доказать, что $\operatorname{arctg}(-x) = \pi - \operatorname{arctg} x$ для любых x .
- 4. Доказать, что $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ для любых x .
- 5. Доказать, что $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ для $x \in (-1, 1)$.

- 6. Доказать, что $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ для $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$.
- 7. Доказать, что $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$ для $x \neq 0$.
- 8. Доказать, что $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$ при $x, y \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.
- 9. Верно ли утверждение предыдущей задачи для любых $x, y \in [-1, 1]$?
- 10. Доказать, что $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$, если $x, y \in [0, 1)$.
- 11. Верно ли утверждение предыдущей задачи для любых x, y ?
- 12. Найти $\arcsin(\sin 10)$.
- 13. Найти $\arccos(\cos 10)$.
- 14. Найти $\operatorname{tg}^2(\frac{1}{2} \arccos \frac{2}{3})$.
- 15. Найти $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{6} + \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} \frac{3}{5} + \operatorname{arctg} \frac{5}{7}$.
- 16. Решить уравнение $2 \arcsin x + \arccos(1-x) = 0$.
- 17. Решить уравнение $\sin(3 \arccos x) = \frac{1}{2}$.
- 18. Решить уравнение $\arcsin^2 x + \arccos^2 x = \frac{5\pi^2}{36}$.

Глава 2

Простейшие уравнения и неравенства

Урок 8

Уравнения и неравенства с модулями

Для того, чтобы решить любую задачу с модулями, необходимо знать определение модуля числа a . Его можно дать, например, следующим способом:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a \leq 0. \end{cases}$$

Из этого определения видно, что модуль любого числа неотрицателен. Оно же показывает, как избавляться от модулей в алгебраических уравнениях. «В лоб» это делается так.

Пусть имеем уравнение $|f(x)| + g(x) = 0$, где $g(x)$ также может содержать выражения с модулями. Это уравнение эквивалентно совокупности двух систем

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -f(x) + g(x) = 0, \\ f(x) \leq 0. \end{cases}$$

Каждая из них даст свой кусок ответа. Если одна из систем содержит модули, то продолжим наш процесс избавления от них путем перехода к системам. В конце концов модулей совсем не останется, и, объединив решения систем, мы получим ответ. Теоретически, поступая так, мы сможем решить любое неравенство или уравнение с модулями. На практике, когда под модулями стоят простые выражения, это можно сделать существенно короче.

Необходимо отметить все нули подмодульных выражений на числовой прямой. Они разобьют прямую на лучи и промежутки, на которых все подмодульные выражения имеют постоянный знак. Надо определить этот

знак и раскрыть все модули, заменяя их подмодульными выражениями то ли со знаком плюс, то ли со знаком минус в зависимости от знака подмодульного выражения. Знак последнего можно, в принципе, определить, подставляя в него точку из промежутка, **не совпадающую ни с одним из концов данного промежутка**.

После этого нужно решить получившееся неравенство или уравнение (в котором уже нет модулей!) и выбрать решения, принадлежащие данному промежутку.

Пора уже на примерах показать как это делается.

► **Задача 1.** $|2x - 4| = 1$.

Решение. Модуль у нас один, и подмодульное выражение обращается в нуль при $x = 2$.

Случай 1. $x \leq 2$. Тогда $|2x - 4| = -2x + 4$ и получим уравнение $-2x + 4 = 1 \iff -2x = -3 \iff x = \frac{3}{2}$. Из того, что $\frac{3}{2} \leq 2$, следует, что $x = \frac{3}{2}$ есть кусок ответа; можно обвести его в рамочку: $\boxed{x = \frac{3}{2}}$.

Случай 2. $x \geq 2$. Тогда $|2x - 4| = 2x - 4$ и имеем уравнение $2x - 4 = 1 \iff 2x = 5 \iff x = \frac{5}{2}$. Так как $\frac{5}{2} \geq 2$, и $x = \frac{5}{2}$ годится.

Ответ: $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$. ◀

► **Задача 2.** $|x + 1| + |x + 2| = 2$.

Решение. Подмодульные выражения обращаются в нуль при $x = -1, -2$.

Случай 1. $x \leq -2$. Тогда $|x + 1| = -x - 1$ и $|x + 2| = -x - 2$. Имеем

$$-x - 1 - x - 2 = 2 \iff -2x = 5 \iff x = -\frac{5}{2} \leq -2 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{5}{2}}.$$

Случай 2. $-2 \leq x \leq -1$. Тогда $|x + 1| = -x - 1$, $|x + 2| = x + 2 \Rightarrow -x - 1 + x + 2 = 2 \iff 0 \cdot x = 1 \iff \emptyset$.

Случай 3. $x \geq -1$. Тогда $|x + 1| = x + 1$, $|x + 2| = x + 2 \Rightarrow x + 1 + x + 2 = 2 \iff 2x = -1 \iff x = -\frac{1}{2} > -1 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}$.

Ответ: $-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$. ◀

► **Задача 3.** $|x| + |x + 2| = 2$.

Решение. *Случай 1.* $x \leq -2$. Тогда $|x| = -x$, $|x + 2| = -x - 2 \Rightarrow -x - x - 2 = 2 \iff -2x = 4 \iff x = -2 \leq -2 \Rightarrow \boxed{x = -2}$.

Случай 2. $-2 \leq x \leq 0$. Тогда $|x| = -x$, $|x + 2| = x + 2 \Rightarrow -x + x + 2 = 2 \iff 0 \cdot x = 0$. Поскольку последнее равенство выполняется при любом вещественном x , а рассматриваются только x из промежутка $[-2, 0]$, все x из этого промежутка будут решениями, т.е. $\boxed{x \in [-2, 0]}$.

Случай 3. $x \geq 0$. Тогда $|x| = x$, $|x + 2| = x + 2 \Rightarrow x + x + 2 = 2 \iff x = 0 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$.

Ответ: $x \in [-2, 0]$. ◀

► **Задача 4.** $|x - 1| > \frac{3}{2} - 2x$.

Решение. Случай 1. $x \leq 1$. Тогда $|x - 1| = -x + 1 \Rightarrow -x + 1 > \frac{3}{2} - 2x \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$. Нарисуем картинку (см. рис. 1).

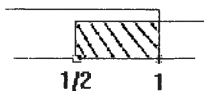


Рис. 1

Точка $\frac{1}{2}$ обозначена светлым прямоугольником, единица — черным. Это означает, что точка $\frac{1}{2}$ не включается. Пересечение промежутков $x > \frac{1}{2}$ и $x \leq 1$ заштриховано. Пересечение этих промежутков берется потому, что в случае 1 рассматриваются только $x \leq 1$. Кроме того, для этих x должно выполняться неравенство $x > \frac{1}{2}$. Значит, первый кусок нашего

ответа есть $x \in (\frac{1}{2}, 1]$.

Случай 2. $x \geq 1$. Тогда $|x - 1| = x - 1 \Rightarrow x - 1 > \frac{3}{2} - 2x \Leftrightarrow 3x > \frac{5}{2} \Leftrightarrow x > \frac{5}{6}$. Нарисовав соответствующую картинку, увидим, что второй кусок ответа есть $x \in [1, +\infty)$.

Ответ: $(\frac{1}{2}, +\infty)$. ◀

► **Задача 5.** $|3 - x| + |2x - 4| - |x + 1| > 2x + 4$.

Решение. Случай 1. $x \leq -1 \Rightarrow |x + 1| = -x - 1$, $|3 - x| = 3 - x$, $|2x - 4| = 4 - 2x$. Наше неравенство принимает вид $3 - x + 4 - 2x + x + 1 > 2x + 4 \Leftrightarrow x < 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1]$.

Случай 2. $-1 \leq x \leq 2$. Тогда $|x + 1| = x + 1$, $|2x - 4| = 4 - 2x$, $|3 - x| = 3 - x$. Получаем неравенство $-x - 1 + 4 - 2x + 3 - x > 2x + 4 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3} \Rightarrow x \in [-1, \frac{1}{3})$.

Случай 3. $2 \leq x \leq 3$. Тогда $|x + 1| = x + 1$, $|2x - 4| = 2x - 4$, $|3 - x| = 3 - x$. Получаем неравенство $-x - 1 + 2x - 4 + 3 - x > 2x + 4 \Leftrightarrow x < -3 \Rightarrow \emptyset$.

Случай 4. $x \geq 3$. Тогда $|x + 1| = x + 1$, $|2x - 4| = 2x - 4$, $|3 - x| = x - 3$. Наше неравенство принимает вид

$$x - 3 + 2x - 4 - x - 1 > 2x + 4 \Leftrightarrow 0 \cdot x > 12 \Leftrightarrow \emptyset.$$

Ответ: $x \in (-\infty, \frac{1}{3})$. ◀

► **Задача 6.** $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$.

Решение. Квадратный трехчлен, стоящий под модулем, обращается в нуль при $x = -1, 3$. При этом если $x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$, то трехчлен неотрицателен, а при $x \in [-1, 3]$ неположителен.

Случай 1. $x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$. Тогда $|x^2 - 2x - 3| = x^2 - 2x - 3$ и неравенство принимает вид

$x^2 - 2x - 3 < 3x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 5x < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 5)$. То, что последнее неравенство имеет в точности такие решения, как написано, можно понять, нарисовав (приблизительно и без соблюдения масштаба)

параболу $y = x^2 - 5x$. В рисунке достаточно отразить тот факт, что ветви параболы направлены вверх, а пересекает ось Ox она в точках 0 и 5 (см. рис. 2).

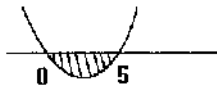


Рис. 2

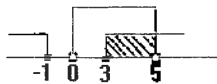


Рис. 3



Рис. 4

Теперь нужно пересечь интервал $(0, 5)$ с множеством $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$. (см. рис. 3). Получим, что наш кусок ответа есть $[3, 5]$.

Случай 2. $x \in [-1, 3]$. Тогда $|x^2 - 2x - 3| = -x^2 + 2x + 3$ и мы имеем неравенство $-x^2 + 2x + 3 < 3x - 3 \iff x^2 + x - 6 > 0 \iff x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$. Учитывая рассматриваемый случай (нарисуйте картинку сами!), получаем второй кусок ответа: $[2, 3]$.

Ответ: $(2, 5)$. ◀

► **Задача 7.** $|x^2 + 2x| - |2 - x| = |x^2 - x|$.

Решение. Нули подмодульных выражений состоят из точек $-2, 0, 1, 2$. При этом парабола $y = x^2 + 2x$ отрицательна в точности на интервале $(-2, 0)$, а парабола $y = x^2 - x$ — на интервале $(0, 1)$.

Случай 1. $x \leq -2$. Тогда $|x^2 + 2x| = x^2 + 2x$, $|2 - x| = 2 - x$, $|x^2 - x| = x^2 - x$ и наше уравнение принимает вид

$$x^2 + 2x + x - 2 = x^2 - x \iff x = \frac{1}{2} > -2 \Rightarrow \emptyset.$$

Случай 2. $x \in [-2, 0]$. Тогда $|x^2 + 2x| = -x^2 - 2x$, $|2 - x| = 2 - x$, $|x^2 - x| = x^2 - x$ и мы имеем

$$-x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x \iff 2x^2 = -2 \iff \emptyset.$$

Случай 3. $x \in [0, 1]$. Тогда $|x^2 + 2x| = x^2 + 2x$, $|2 - x| = 2 - x$, $|x^2 - x| = x - x^2$ и $x^2 + 2x + x - 2 = x - x^2 \iff x^2 + x - 1 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Легко проверяется, что только корень $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ лежит на отрезке $[0, 1]$. Значит,

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Случай 4. $x \in [1, 2]$. Тогда $|x^2 + 2x| = x^2 + 2x$, $|2 - x| = 2 - x$, $|x^2 - x| = x^2 - x$ и наше уравнение принимает вид $x^2 + 2x + x - 2 = x^2 - x \iff x = \frac{1}{2} \notin [1, 2] \Rightarrow \emptyset$.

Случай 5. $x \geq 2$. Тогда $|x^2 + 2x| = x^2 + 2x$, $|2 - x| = x - 2$, $|x^2 - x| = x^2 - x$ и наше уравнение принимает вид $x^2 + 2x - x + 2 = x^2 - x \iff x = -1 < 2 \Rightarrow \emptyset$.

Ответ: $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. ◀

► **Задача 8.** $|3 - |x - 2|| \leq 1$.

Решение. Когда есть модуль в модуле, начинать раскрытие надо со внутреннего.

Случай 1. $x \leq 2$. Тогда $|x - 2| = 2 - x$ и имеем

$$|3 - (2 - x)| \leq 1 \iff |1 + x| \leq 1.$$

Случай 1.1. $x \leq -1$. Тогда наше неравенство принимает вид $-x - 1 \leq 1 \iff x \geq -2$. Для получения ответа нарисует картинку учета обоих случаев и решения неравенства (см. рис. 4).

Следовательно, наш кусок ответа есть $\boxed{[-2, -1]}$.

Случай 1.2. $x \geq -1$. Тогда имеем неравенство $x + 1 \leq 1 \iff x \leq 0$. Нарисуйте картинку сами, чтобы убедиться, что наш кусок ответа есть в этом случае $\boxed{[-1, 0]}$.

Случай 2. $x \geq 2$. Тогда $|x - 2| = x - 2$ и имеем

$$|3 - x + 2| \leq 1 \iff |5 - x| \leq 1.$$

Случай 2.1. $x \leq 5$. Тогда наше неравенство будет иметь вид $5 - x \leq 1 \iff x \geq 4$. Следовательно, $\boxed{x \in [4, 5]}$.

Случай 2.2. $x \geq 5$. Тогда $x - 5 \leq 1 \iff x \leq 6$. Значит, $\boxed{x \in [5, 6]}$.

Ответ: $[-2, 0] \cup [4, 6]$. ◀

► **Задача 9.**
$$\begin{cases} |x + 1| + |y - 1| = 5, \\ |x + 1| = 4y - 4. \end{cases}$$

Решение. Подставив значение $|x + 1|$ из второго уравнения в первое, получим уравнение относительно y :

$$4y - 4 + |y - 1| = 5.$$

Если $y \geq 1$, то $4(y - 1) + (y - 1) = 5 \iff 5(y - 1) = 5 \iff \boxed{y = 2}$. Если $y \leq 1$, то $4(y - 1) - (y - 1) = 5 \iff y = \frac{8}{3} \iff \emptyset$.

Значит, $y = 2$ и $|x + 1| = 4 \iff x = 3, -5$.

Ответ: $(3, 2), (-5, 2)$. ◀

► **Задача 10.** $|\sin x| = \cos 2x$.

Решение. Пусть $\sin x = t$. Тогда $\cos 2x = 1 - 2t^2$ и уравнение принимает вид $|t| = 1 - 2t^2 \iff t = \pm \frac{1}{2}$.

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. ◀

Наш урок окончен. Оценка ставится стандартным образом.

Домашнее задание

- 1. $|x - 7| = 4$
- 2. $|19 - x| + 3 = 2\sqrt{2}$
- 3. $x + |x| = 0$
- 4. $|x - 1| + |x + 2| - 2x = 1$
- 5. $|x^2 - 4| + |9 - x^2| = 5$
- 6. $|x + 1| - |x| + 3|x - 1| - 2|x - 2| = |x + 2|$
- 7. $||2x - 1| - 5| + x = |6 - x|$
- 8. $||x| - 2| = 1$
- 9. $1 < |2x - 5| \leq 3$
- 10. $|3 - |x - 2|| \leq |x - 7|$
- 11. $|x - 1| - |x| + |2x + 3| = 2x + 4$
- 12. $|2x - x^2 - 3| = 1$
- 13. $|x^2 - 1| + x + 1 = 0$
- 14. $|x - x^2 - 1| = |2x - 3 + x^2|$
- 15. $|x^2 - 3| + 2x + 1 \geq 0$
- 16. $|x^2 + x - 2| > |1 + \frac{x}{5}|$
- 17. $|x^3 - 1| \leq x^2 + x + 1$
- 18. $\begin{cases} |x - 1| + |y - 5| = 1 \\ y = 5 + |x - 1| \end{cases}$
- 19. $\begin{cases} y - 2|x| + 3 = 0 \\ |y| + x - 3 = 0 \end{cases}$
- 20. $\begin{cases} |x^2 - 2x| + y = 1 \\ x^2 + |y| = 1 \end{cases}$

Урок 9

Рациональные уравнения и неравенства

Уравнения или неравенства называются рациональными, если левая и правая их части есть суммы отношений многочленов. Решаются они приведением к общему знаменателю, после которого надо разложить числитель и знаменатель на простейшие множители и применить метод интервалов.

Опишем вкратце, как разлагать многочлены на множители. Многочлен первой степени, т.е. вида $ax + b$, $a \neq 0$, преобразуется так: $ax + b = a(x - (-\frac{b}{a}))$. Если x_1, x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$,

то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Например, $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, $2x^2 - x - 1 = 2(x - 1)(x - (-\frac{1}{2}))$.

Если дан многочлен степени выше второй и известны его корни, то он раскладывается аналогично квадратному трехчлену. Например, если дан кубический многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$ с корнями x_1, x_2, x_3 , то $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Корни уравнений третьей и более высокой степени в общем случае находить не умеет никто на свете, в том числе и те, кто сидит в приемных комиссиях. (Отмечу мимоходом, что некоторые учащиеся физико-математических школ, которым рассказывали формулы Кардано для уравнений третьей степени и метод Феррари для уравнений четвертой степени, воображают, будто они умеют решать такие уравнения. Если они настаивают на этом, предложите им найти все корни многочлена $x^3 - 3x + 1$, причем для каждого корня должно быть свое выражение в радикалах. Вы очень быстро поймете, что они дают ответ типа «корень — это такое число a , что $a^3 - 3a + 1 = 0$ »; иногда такой ответ чуть-чуть более зашифрован, но считать его решением никак невозможно. Впрочем, всякий, кто глубоко освоил метод Кардано, действительно сможет решить те (и только те) уравнения третьей степени, которые имеют единственный корень. Но эти знания на вступительных экзаменах не потребуются).

Так вот, единственный способ бороться с уравнениями степени три и выше состоит в угадывании корней (обычно задачи так подбираются, чтобы корни можно было угадать). При этом надо перебрать только те целые числа, на которые без остатка делится свободный член уравнения. Если ни одно из них не является корнем, то (это совсем не школьная и довольно трудная теорема) целых корней нет и нужно решать задачу другим способом.

Например, у уравнения $x^3 - 2x^2 + 3x + 22 = 0$ нужно проверять лишь числа $\pm 1, \pm 2, \pm 11, \pm 22$. Попробуйте сами угадать его корень.

После того, как угадан корень a , надо поделить «уголком» наш многочлен на $x - a$. Он обязательно разделится нацело и надо будет найти корни частного. Деление «уголком» описано в Справочнике, гл. 3, §4 этой книги. Я не вынес этот метод в настоящий урок, поскольку во многих школах он преподается.

Предположим, что числитель и знаменатель уже разложены на множители. Я опишу метод интервалов на конкретном примере. Пусть мы пришли к неравенству

$$(1) \quad \frac{(x-3)^2(x-7)^3(x+1)}{(x-2)(x+4)^4} \geq 0$$

(обязательно должно быть $(x - 2)$, а не $2 - x$, именно $x - 7$, а не $7 - x$ и т.д. Этого всегда можно добиться, умножая неравенство на -1 и меняя одновременно его знак столько раз, сколько надо).

Отметим жирными точками нули числителя и прозрачными — нули знаменателя (см. рис. 1). Если бы неравенство (1) было строгим, нужно было бы все нули сделать прозрачными.

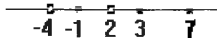


Рис. 1

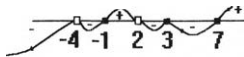


Рис. 2

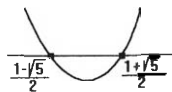


Рис. 3

После этого справа налево ведем змейку (рис. 2) по следующему правилу: она приходит сверху, меняет знак на нечетной степени и сохраняет на четной.

Теперь остается только выписать ответ: $x \in [-1, 2) \cup \{3\} \cup [7, +\infty)$. Важно не забыть $x = 3$.

► **Задача 1.** $x^2 - x - 1 > 0$.

Решение. Здесь можно решить неравенство методом интервалов, но проще нарисовать параболу (см. рис. 3). Заметьте, что для нас совершенно не важны точные характеристики параболы (где находится ось, пересечение с Oy и т.п.). Достаточно знать, что ветви ее направлены вверх и что она пересекает ось Ox в двух точках, совпадающих с ее корнями.

Корнями параболы являются числа $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Из рисунка видно, что она принимает положительные значения вне отрезка, соединяющего ее корни.

Ответ: $x \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$. ◀

► **Задача 2.** $x^3 + x^2 + 2x - 4 \leq 0$.

Решение. Легко угадывается корень $x = 1$. Теперь поделим исходный многочлен уголко на $x - 1$:

$$\begin{array}{r} -x^3 + x^2 + 2x - 4 \quad \left| \begin{array}{l} x-1 \\ x^2 + 2x + 4 \end{array} \right. \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ 2x^2 + 2x \\ \underline{-2x^2 - 2x} \\ 4x - 4 \\ \underline{-4x + 4} \\ 0 \end{array}$$

Значит, $x^3 + x^2 + 2x - 4 = (x - 1)(x^2 + 2x + 4)$, и исходное неравенство можно записать в виде $(x - 1)(x^2 + 2x + 4) \leq 0$. Дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + 2x + 4$ равен -12 , так что этот трехчлен положителен при любых x (нарисуйте сами соответствующую параболу). Поделив неравенство на строго положительное выражение $x^2 + 2x + 4$, получим эквивалентное неравенство $x - 1 \leq 0$ — здесь даже не нужен метод интервалов.

Ответ: $x \leq 1$. ◀

► **Задача 3.** $\frac{6x+12}{x^2+x-2} = x.$

Решение. Используя равенства $6x+12 = 6(x+2)$ и $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$, перепишем исходное уравнение в виде

$$\frac{6(x+2)}{(x-1)(x+2)} = x \iff \begin{cases} \frac{6}{x-1} = x \\ x \neq -2 \end{cases}.$$

Последняя система после приведения к общему знаменателю принимает вид

$$\begin{cases} \frac{x^2-x-6}{x-1} = 0, \\ x \neq -2, \end{cases}$$

откуда получаем

Ответ: $x = 3$. ◀

► **Задача 4.** $7\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9.$

Решение. Пусть $x + \frac{1}{x} = y$. Тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ и имеем уравнение

$$7y - 2(y^2 - 2) = 9 \iff 2y^2 - 7y + 5 = 0 \iff y = 1, \frac{5}{2}.$$

Уравнение $x + \frac{1}{x} = 1$ не имеет решений, уравнение $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ имеет корни $2, \frac{1}{2}$.

Ответ: $x = 2, \frac{1}{2}$. ◀

► **Задача 5** [2]. $\frac{24}{x^2+2x-8} - \frac{15}{x^2+2x-3} = 2.$

Решение. Приведение к общему знаменателю даст в числителе многочлен четвертой степени. Избежать этого можно, обозначив $x^2 + 2x - 8$ через y . Получим уравнение

$$\frac{24}{y} - \frac{15}{y+5} = 2,$$

что эквивалентно (при $y \neq 0, -5$) уравнению $24y + 120 - 15y = 2y^2 + 10y \iff 2y^2 + y - 120 = 0 \iff y = -8, \frac{15}{2}$. Значит, либо $x^2 + 2x - 8 = -8 \iff x = 0, -2$, либо $x^2 + 2x - 8 = \frac{15}{2} \iff x = \frac{-2 \pm \sqrt{66}}{2}$.

Ответ: $0, -2, \frac{-2 \pm \sqrt{66}}{2}$. ◀

► **Задача 6** [2]. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{10}{9}.$

Решение. Пусть $y = x+1$. Тогда $\frac{1}{(y-1)^2} + \frac{1}{(y+1)^2} = \frac{10}{9} \iff \frac{2y^2+2}{(y^2-1)^2} = \frac{10}{9} \iff 5y^4 - 19y^2 - 4 = 0 \iff y^2 = 4, -\frac{1}{5} \iff y = \pm 2$.

Ответ: $-3, 1$. ◀

► **Задача 7** [2]. $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55$.

Решение. Мы знаем, что $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$; обозначив $x^2 + 2x$ через y , получим уравнение $y^2 - y - 1 = 55 \iff y^2 - y - 56 = 0 \iff y = 8, -7$.
Дальше все просто.

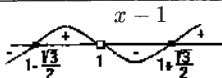
Ответ: $-4, 2$. ◀

► **Задача 8.** $x \geq \frac{x - \frac{1}{4}}{x - 1}$.

Решение. $x \geq \frac{x - \frac{1}{4}}{x - 1} \iff \frac{x^2 - 2x + \frac{1}{4}}{x - 1} \geq 0$, что эквивалентно неравенству

$$\frac{(x - (1 + \frac{\sqrt{3}}{2}))(x - (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}))}{x - 1} \geq 0.$$

Нарисуем картинку:



Ответ: $x \in [1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, 1) \cup [1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty)$. ◀

► **Задача 9.** $\frac{3}{x^2 + 2x + 4} < 1$.

Решение. После приведения к общему знаменателю получим неравенство

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 4} > 0 \iff \frac{(x + 1)^2}{(x + 1)^2 + 3} > 0.$$

Знаменатель строго положителен при всех x , а числитель неотрицателен и обращается в нуль только при $x = -1$.

Ответ: $x \neq -1$. ◀

► **Задача 10.** $\frac{x^2 + 3x + 4}{x^2 + 4x + 3} \leq x$.

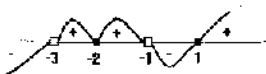
Решение. После приведения к общему знаменателю получим неравенство

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2 + 4x + 3} \geq 0.$$

Заметив, что $x = 1$ есть корень числителя, разложим его (и знаменатель) на множители:

$$\frac{(x - 1)(x + 2)^2}{(x + 1)(x + 3)} \geq 0.$$

Рисуем картинку:



Ответ: $x \in (-3, -1) \cup [1, +\infty)$. ◀

Наш урок окончен. Оценка выставляется стандартным образом.

Домашнее задание

$$\blacktriangleright 1. \frac{x^2}{x+2} + 1 = \frac{4}{x+2}$$

$$\blacktriangleright 2. \frac{3x-9}{x^2-2x-3} = 1$$

$$\blacktriangleright 3. \frac{x}{4x+1} > x+1$$

$$\blacktriangleright 4. \frac{x+7}{4(2-x)} < x+2$$

$$\blacktriangleright 5. \frac{x+3}{x+7} < x+1$$

$$\blacktriangleright 6. \frac{x+2}{x+2} > x-1$$

$$\blacktriangleright 7. x + \frac{1}{x+1} \leq -2$$

$$\blacktriangleright 8. \frac{4x-1}{x^2+x+1} < 1$$

$$\blacktriangleright 9. \frac{1}{x^2-4x+3} > \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$

$$\blacktriangleright 10. \frac{x-2}{4x^2-1} > 1-x$$

$$\blacktriangleright 11. \frac{1}{x^2-3x+2} > 1-2x$$

$$\blacktriangleright 12. \frac{x^2+x-6}{x^2+2x+4} \leq x+3$$

$$\blacktriangleright 13. \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} > \frac{3}{x+2}$$

$$\blacktriangleright 14. \frac{x+1}{x^2+x+1} - 2 \leq \frac{4}{x-1}$$

$$\blacktriangleright 15. \frac{1}{x^2-7x+12} \geq -1$$

$$\blacktriangleright 16. \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > 2$$

$$\blacktriangleright 17. x + \frac{4x^2+5x}{x^2-x-6} > \frac{9}{5x-15} + \frac{5x+1}{5x+10}$$

$$\blacktriangleright 18. \frac{1}{x^2-x} + 1 > \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$$

$$\blacktriangleright 19. x^2+1 > \frac{x^2-5}{x^2+2}$$

$$\blacktriangleright 20. x + \frac{1}{x} \leq 1$$

Урок 10

Уравнения и неравенства с радикалами

Под радикалами здесь понимаются корни квадратные. Задачи с кубическими радикалами практически не встречаются. Если такая задача даже будет дана, то ее нужно решать, просто уединяя радикалы и возводя все в куб. Это будет эквивалентным преобразованием. Куда более сложна ситуация с квадратными радикалами. Если у нас имеется выражение вида $\sqrt{f(x)}$, то оно определено только при $f(x) \geq 0$. Забывание этого обстоятельства приводит к приобретению лишних корней. В случае, когда мы имеем какое-то уравнение с небольшим числом корней, можно подставить их в уравнение и проверить, действительно ли все они годятся. Однако если корень имеет вид $x = \frac{\sqrt{17}-\sqrt{66}}{1+\sqrt{5}}$, подставлять его куда-то затрудни-

тельно. Совсем невозможно подставить бесконечное множество решений неравенства. Поэтому на каждом шаге необходимо производить эквивалентный переход. Даже при решении уравнений недостаточно проверять полученные корни на ОДЗ.

Проиллюстрируем это на следующем примере. Пусть $\sqrt{x} = x - 2$. После возведения уравнения в квадрат получим $x = x^2 - 4x + 4 \iff x^2 - 5x + 4 = 0 \iff x = 1, 4$. Оба числа 1 и 4 входят в ОДЗ уравнения, состоящую из неотрицательных x . Тем не менее 4 есть корень исходного уравнения, тогда как 1 таковым не является.

Приведем ряд эквивалентностей для освобождения от радикалов.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \sqrt{f(x)} = g(x) &\iff \begin{cases} f(x) = (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \\
 (2) \quad \sqrt{f(x)} \geq g(x) &\iff \begin{cases} f(x) \geq (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\
 (3) \quad \sqrt{f(x)} > g(x) &\iff \begin{cases} f(x) > (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\
 (4) \quad \sqrt{f(x)} < g(x) &\iff \begin{cases} f(x) < (g(x))^2 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \\
 (5) \quad \sqrt{f(x)} \leq g(x) &\iff \begin{cases} f(x) \leq (g(x))^2 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Напомним, что квадратные скобки означают, что каждая из систем, ими объединенных, решается отдельно и дает отдельную часть ответа, т.е. решения систем объединяются.

► **Задача 1.** $\sqrt{x+4} = x - 2$.

Решение. Наше уравнение эквивалентно системе $\begin{cases} x+4=(x-2)^2 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$. Первое уравнение ее имеет корни 0 и 5. Учитывая второе неравенство, получаем

Ответ: $x = 5$. ◀

► **Задача 2.** $\sqrt{2x - x^2 + 1} \geq 2x - 3$.

Решение. Формула (2) показывает, что надо рассмотреть две системы:

$$\begin{cases} 2x - x^2 + 1 \geq (2x - 3)^2, \\ 2x - 3 \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x - x^2 + 1 \geq 0, \\ 2x - 3 < 0. \end{cases}$$

Первая легко преобразуется к виду

$$\begin{cases} 5x^2 - 14x + 8 \leq 0, \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [\frac{4}{5}, 2], \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \iff \boxed{x \in [\frac{3}{2}, 2]}.$$

Первое неравенство второй системы приводится к виду $x^2 - 2x - 1 \leq 0 \iff x \in [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$. Учитывая второе неравенство, получаем $\boxed{x \in [1 - \sqrt{2}, 3/2]}$.

Ответ: $[1 - \sqrt{2}, 2]$. ◀

► **Задача 3.** $\sqrt{2x^2 + x} < 1 + 2x$.

Решение. Исходное неравенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} 2x^2 + x < (1 + 2x)^2, \\ 2x^2 + x \geq 0, \\ 2x + 1 \geq 0. \end{cases}$$

Второе ее неравенство равносильно $x(2x + 1) \geq 0$. Из третьего неравенства заключаем, что $2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$, так как во втором неравенстве неотрицательно произведение $x(2x + 1)$, второй сомножитель которого неотрицателен. Следовательно, второе и третье неравенства можно заменить одним: $x \geq 0$. Первое неравенство системы приводится к виду $(2x + 1)(x + 1) > 0$. Ясно, что оно справедливо при $x \geq 0$. Поучительно заметить здесь, как мало вычислений мы проделали, сокращая «по мелочам» себе работу. В принципе, все три неравенства можно было бы решить отдельно и, рисуя картинку, пересекать ответы. Однако чем больше вычислений делается, тем больше вероятность арифметической ошибки, которая может загубить всю задачу. Поэтому надо стремиться упрощать решение, если видно, как это сделать.

Ответ: $x \geq 0$. ◀

► **Задача 4.** $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \cdot (x^2 - 2x - 1) = 0$.

Решение. Данное уравнение не относится к числу стандартных. Поэтому первым делом нужно вычислить его ОДЗ. Оно определяется из неравенства $x^2 - 5x + 6 \geq 0 \iff x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$.

Теперь займемся непосредственно уравнением. Произведение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю.

Если $x^2 - 5x + 6 = 0 \iff x = 2, 3$, то все корни входят в ОДЗ — это ясно. Уравнение $x^2 - 2x - 1 = 0$ имеет корни $1 \pm \sqrt{2}$. Легко проверяется, что годится только корень $1 - \sqrt{2}$.

Ответ: $2, 3, 1 - \sqrt{2}$. ◀

► **Задача 5.** $(x - 3)\sqrt{(2 - x)(x - 5)} \geq 0$.

Решение. Область допустимых значений нашего неравенства состоит из тех x , которые принадлежат отрезку $[2, 5]$. Произведение двух чисел неотрицательно, если и только если они оба либо неотрицательны, либо неположительны.

$$\text{Пусть } \begin{cases} x - 3 \geq 0, \\ \sqrt{(2 - x)(x - 5)} \geq 0. \end{cases}$$

Корень квадратный всегда неотрицателен, так что в ОДЗ эта система эквивалентна неравенству $x - 3 \geq 0 \iff x \geq 3$. Учитывая ОДЗ, получаем первую часть ответа: $x \in [3, 5]$.

Второй случай дает систему

$$\begin{cases} x - 3 \leq 0, \\ \sqrt{(2 - x)(x - 5)} \leq 0. \end{cases}$$

Из неотрицательности корня квадратного следует, что второе неравенство может выполняться только при $\sqrt{(2 - x)(x - 5)} = 0 \iff x = 2, 5$. Учтя второе неравенство, получим

Ответ: $\{2\} \cup [3, 5]$. ◀

► **Задача 6.** $\sqrt{x + 5} - \sqrt{x} = 1$.

Решение. Область допустимых значений состоит из $x \geq 0$. Из того, что $x + 5 > x$, следует, что левая часть уравнения строго положительна. Следовательно, в ОДЗ оно эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned} (\sqrt{x + 5} - \sqrt{x})^2 &= 1 \Leftrightarrow x + 5 + x - 2\sqrt{x(x + 5)} = 1 \Leftrightarrow 2x + 4 = 2\sqrt{x(x + 5)} \\ &\Leftrightarrow x + 2 = \sqrt{x(x + 5)} \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 5x \Leftrightarrow x = 4. \end{aligned}$$

Предпоследняя эквивалентность также имеет место в ОДЗ, поэтому избавляясь от последнего радикала, мы не должны приписывать условие $x + 2 \geq 0$ — ведь в ОДЗ оно выполняется автоматически.

Наши выкладки для решения уравнения были бы еще проще, если бы мы заметили, что в ОДЗ

$$\begin{aligned} \sqrt{x + 5} - \sqrt{x} = 1 &\Leftrightarrow \sqrt{x + 5} = 1 + \sqrt{x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x + 5 = 1 + x + 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 4. \end{aligned}$$

Ответ: $x = 4$. ◀

► **Задача 7** [2]. $\sqrt{x} + \sqrt{x+3} = 6 - \sqrt{x+8}$.

Решение. Можно очень долго возиться с данным уравнением, избавляясь от радикалов и так, и эдак. Все время будет получаться уравнение четвертой степени. Если ничего другого в голову не приходит, надо угадывать его корни (а их надо угадать как минимум два!) и использовать деление «уголком».

Можно, однако, решить и так: записать уравнение в виде

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 6$$

и заметить, что левая часть его есть возрастающая функция, которая, тем самым, не может равняться шести в двух различных точках. Значит, корень, если он есть, единственен. Немного повозившись с ним, можно догадаться, что $x = 1$ есть его корень. Из сказанного выше следует, что других корней нет.

Ответ: $x = 1$. ◀

► **Задача 8.** $\frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4} - 3x + 16}{6 - x} > 1$.

Решение. После приведения к общему знаменателю неравенство принимает вид

$$\frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4} - 2x + 10}{6 - x} > 0.$$

Дробь больше нуля тогда и только тогда, когда и числитель и знаменатель либо оба больше нуля, либо оба меньше.

Пусть

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x - 4} - 2x + 10 > 0, \\ 6 - x > 0. \end{cases}$$

Решим отдельно неравенство $\sqrt{x^2 - 3x - 4} > 2x - 10$. Его решения складываются из решений систем

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 > (2x - 10)^2, \\ 2x - 10 \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0, \\ 2x - 10 < 0. \end{cases}$$

Их можно эквивалентным образом преобразовать к виду

$$\begin{cases} (x - 13/3)(x - 8) < 0, \\ x \geq 5 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} (x - 4)(x + 1) \geq 0, \\ x < 5, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty, -1] \cup [4, 8)$. Вспоминая, что $x < 6$, получаем первый кусок ответа: $x \in (-\infty, -1] \cup [4, 6)$.

В случае, когда $x > 6$, автоматически выполняется неравенство $2x - 10 > 0$ и потому $\sqrt{x^2 - 3x - 4} < 2x - 10 \iff x^2 - 3x - 4 < (2x - 10)^2 \iff x \in (-\infty, 13/3) \cup (8, +\infty)$. Значит, второй кусок ответа имеет вид $x \in (8, +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty, -1] \cup [4, 6) \cup (8, +\infty)$. ◀

► **Задача 9** [2]. $\sqrt{4x^2 - 20x + 1} + 5x = x^2 - 1$.

Решение. Просто уединить радикал и освободиться от него по формуле (1) невозможно — получается уравнение четвертой степени. Однако если мы запишем уравнение в виде $\sqrt{4(x^2 - 5x) + 1} = x^2 - 5x - 1$, то, обозначив $x^2 - 5x$ через y , приходим к уравнению $\sqrt{4y + 1} = y - 1 \iff y = 6$. Значит, $x^2 - 5x = 6$, и дальше все ясно.

Ответ: $-1, 6$. ◀

► **Задача 10.** $\frac{x^2 - 1}{\sqrt{13 - x^2}} \geq x - 1$.

Решение. Легко заметить, что выражение $x - 1$ присутствует как сомножитель и в левой, и в правой части. Вынесем его за скобку:

$$(x - 1) \left(\frac{x + 1}{\sqrt{13 - x^2}} - 1 \right) \geq 0 \iff (x - 1)(x + 1 - \sqrt{13 - x^2}) \geq 0.$$

Мы опустили знаменатель ввиду того, что в ОДЗ радикал, стоящий в знаменателе, обязан быть строго больше нуля.

Последнее неравенство эквивалентно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ x + 1 - \sqrt{13 - x^2} \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - 1 \leq 0, \\ x + 1 - \sqrt{13 - x^2} \leq 0. \end{cases}$$

Решим первую из них:

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ x + 1 - \sqrt{13 - x^2} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 1, \\ (x + 1)^2 \geq 13 - x^2 \\ 13 - x^2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leq x \leq \sqrt{13}, \\ x^2 + x - 6 \geq 0. \end{cases}$$

Следовательно, первая из систем эквивалентна тому, что $x \in [2, \sqrt{13})$.

Вторая система распадается на две:

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ (x + 1)^2 \leq 13 - x^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x \leq -1, \\ 13 - x^2 > 0, \end{cases}$$

решив которые, заключаем, что $-\sqrt{13} < x \leq 1$.

Ответ: $x \in (-\sqrt{13}, 1] \cup [2, \sqrt{13})$. ◀

Наш урок окончен. Оценку себе поставьте по стандартным критериям. Ниже дается большое домашнее задание. Задач здесь больше чем обычно, поскольку эта тема должна быть хорошо отработана и большинство задач такого типа вы должны решать автоматически и **без ошибок!**

Домашнее задание

- 1. $(x^2 - 4)\sqrt{x+1} = 0$
- 2. $\sqrt{2x-6} + \sqrt{x+4} = 5$
- 3. $\sqrt{2x+5} - \sqrt{3x-5} = 2$
- 4 [2]. $\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x} - \sqrt{x+8}$
- 5. $\sqrt{2x^2+8x+7} - x = 2$
- 6. $x + \sqrt{2x^2-7x+5} = 1$
- 7 [2]. $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-3}$
- 8. $\sqrt{x^2-3x+2} - 3 - x > 0$
- 9. $x + 4 \leq \sqrt{x+46}$
- 10. $x - 3 < \sqrt{x+27}$
- 11. $\sqrt{x^2+2x-3} < x$
- 12. $\sqrt{x^2-x-2} \leq x-1$
- 13. $x + 4 < \sqrt{-x^2-8x-12}$
- 14. $\frac{3-x}{\sqrt{15-x}} < 1$
- 15. $\frac{\sqrt{x+5}}{1-x} < 1$
- 16. $\frac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1$
- 17. $\sqrt{1-3x} - \sqrt{5+x} > 1$
- 18 [2]. $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geq \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$
- 19. $(x+1)\sqrt{x^2+x-2} = 2x+2$
- 20. $x\sqrt{36x+1261} = 18x^2-17x$
- 21. $\sqrt{(x-4)(5x+41)} < 2(2x-7)$
- 22. $\frac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x} < 1$
- 23. $\sqrt{x} \leq x-1$
- 24. $(x+2)\sqrt{x^2+7x+6} \geq 0$
- 25. $\sqrt{2x^2+x} > 1+2x$
- 26. $\sqrt{4-6x-x^2} = x+4$
- 27. $(x^2-18x+77)\sqrt{10-x} \geq 0$
- 28. $\frac{\sqrt{x^2+x-6}+3x+13}{x+5} > 1$
- 29. $x + \sqrt{x^2+x-6} > -1$
- 30. $2x-17 < \sqrt{81-x^2}$

Глава 3

Алгебраические системы

Урок 11

Системы уравнений и неравенств, возникающие из текстовых задач

Самый простой и естественный способ решения системы с любым числом неизвестных — выражение одного из неизвестных через остальные и подстановка этого выражения в другие уравнения. Число неизвестных таким образом уменьшается, и повторяя эту процедуру, мы в конце концов приходим к уравнению с одной неизвестной. Однако чаще всего этого так прямо сделать не удастся. Надо сперва как-то преобразовать систему к виду, для которого уже возможна подстановка.

Обычным делом в текстовых задачах является ситуация, когда переменных гораздо больше, чем уравнений. Тогда отыскать все переменные просто невозможно, да это и не требуется. Чаще всего бывает указана какая-то их комбинация (сумма, отношение, сумма квадратов и т.п.), которую мы должны найти. Здесь невозможно дать рецепт на все случаи жизни. Мы с вами будем просто набирать опыт решения подобных задач.

Следующие два метода применяются довольно часто. Постарайтесь хорошо их усвоить.

Если в процессе решения появилось уравнение вида $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, то мы можем легко выразить x через y .

Пусть, например, $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$. Решим это уравнение как квадратное относительно x , считая y известным:

$$x = \frac{-5y \pm \sqrt{25y^2 - 4 \cdot 6y^2}}{2} = \frac{-5y \pm y}{2} = 2y, 3y.$$

Значит, в частности, либо $x = 2y$, либо $x = 3y$, и $x^2 - 5xy + 6y^2 = (x - 2y)(x - 3y)$ — последнее равенство тоже может пригодиться.

- 1. Что можно сказать об x и y , если $x^2 + 2xy + 4y^2 = 0$?

Второй метод более сложный. Он называется **методом неопределенных коэффициентов**. Поясним его на примере.

Пусть даны уравнения $\begin{cases} x+y+z=13 \\ 7x+3y=-9 \end{cases}$, причем требуется отыскать $5x+y-2z$. Указанная система не определяет однозначно x , y и z . То же самое верно и для выражения $4x + y - 2z$. Однако раз по условию задачи выражение $5x + y - 2z$ можно найти, его можно представить как линейную комбинацию выражений $x + y + z$ и $7x + 3y$, т.е. найдутся числа α и β такие, что $5x + y - 2z = \alpha(x + y + z) + \beta(7x + 3y)$. Как найти числа α и β ? Надо, раскрыв скобки, приравнять коэффициенты при x, y, z . Посмотрите, как это делается:

$$\begin{aligned} 5x + y - 2z &= \alpha(x + y + z) + \beta(7x + 3y) \iff \\ \iff 5x + y - 2z &= \alpha x + \alpha y + \alpha z + 7\beta x + 3\beta y \iff \\ \iff 5x + y - 2z &= (\alpha + 7\beta)x + (\alpha + 3\beta)y + \alpha z. \end{aligned}$$

А теперь, приравняв коэффициенты при x, y, z , получаем систему

$$\begin{cases} \alpha + 7\beta = 5 \\ \alpha + 3\beta = 1 \\ \alpha = -2 \end{cases} \iff \alpha = -2, \beta = 1.$$

Значит, $5x + y - 2z = -2(x + y + z) + 1(7x + 3y) = -2 \cdot 13 + (-9) = -35$.

- 2. Что изменится, если мы решение задачи попробуем провести для поиска выражения $4x + y - 2z$?

Последнее замечание перед решением задач. Помните, что решение системы с двумя переменными есть **пара** чисел, с тремя — **тройка**, и т.д. Например, ответ, записанный в виде $x = 4, y = \pm 1$, вообще говоря, не имеет смысла. Надо писать $(4, 1), (4, -1)$ или $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$.

- **Задача 1.** $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 3x - 7y = -24. \end{cases}$

Решение. Из первого уравнения имеем $y = 1 - 2x$. Подставим во второе: $3x - 7(1 - 2x) = -24 \iff 3x - 7 + 14x = -24 \iff 17x = -17 \iff x = -1$, откуда $y = 3$.

Ответ: $(-1, 3)$. ◀

- **Задача 2.** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 12, \\ 2x - y + z = -1, \\ 3x + 7y - 2z = 5. \end{cases}$

Решение. Выразим x из первого уравнения: $x = 12 - 2y - 3z$. Произведем подстановку полученного x во второе и третье уравнения:

$$\begin{cases} 2(12 - 2y - 3z) - y + z = -1, \\ 3(12 - 2y - 3z) + 7y - 2z = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} y + z = 5, \\ y - 11z = -31. \end{cases}$$

Подставим $5 - z$ вместо y во второе уравнение:

$$5 - z - 11z = -31 \iff -12z = -36 \iff z = 3.$$

Наконец, $y = 5 - z = 2$ и $x = 12 - 2y - 3z = -1$.

Ответ: $(-1, 2, 3)$. ◀

► **Задача 3.**
$$\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ 6y - 4x = -2. \end{cases}$$

Решение. Подстановка приводит к равенству $0=0$. Убедившись в этом, нужно приглядеться внимательнее к системе и увидеть, что второе уравнение получено из первого умножением на -2 , т.е. просто эквивалентно первому. Значит, наша система эквивалентна одному уравнению $2x - 3y = 1$. Оно имеет бесконечно много решений. Некоторые абитуриенты, поняв это, пишут, что «все числа являются его решением». Это типичная ошибка при забывании того, что решения этого уравнения состоят из **пар** чисел (x, y) , и совершенно неправильно было бы сказать, что любая пара есть решение этого уравнения — возьмите хотя бы пару $(0, 0)$. Ответ можно записать, положив $x = t$, найдя y через t из уравнения и отметив, что когда t пробегает все числа, мы получаем всевозможные решения нашего уравнения.

Ответ: $(t, \frac{2t-1}{3})$, $t \in \mathbb{R}$. ◀

► **Задача 4.**
$$\begin{cases} 2x + 6y = 3, \\ 3x + 9y = 4. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения $x = \frac{3-6y}{2}$. Подставив x во второе уравнение, получим

$$3\frac{3-6y}{2} + 9y = 4 \iff \frac{9}{2} - 9y + 9y = 4 \iff 1/2 = 0 \iff \emptyset.$$

Ответ: $\emptyset$. ◀

► **Задача 5.** [2] Для любых a решить систему

$$\begin{cases} ax + y = 1, \\ 2x + (a+1)y = 2. \end{cases}$$

Решение. Выразим y через x из первого уравнения: $y = 1 - ax$. Подставим во второе:

$$2x + (a+1)(1-ax) = 2 \iff (a^2 + a - 2)x = a - 1 \iff (a+2)(a-1)x = a - 1.$$

Если $a \neq -2, 1$, то $x = \frac{1}{a+2}$, $y = 1 - ax = \frac{2}{a+2}$.

Если $a = -2$, то получаем уравнение $0 \cdot x = -3 \iff \emptyset$.

Если $a = 1$, то получаем уравнение $0 \cdot x = 0 \iff x = t, y = 1 - t, t \in \mathbb{R}$.

Ответ: Если $a \neq -2, 1$, то $(\frac{1}{a+2}, \frac{2}{a+2})$. ◀

Если $a = -2$, то $\emptyset$.

Если $a = 1$, то $(t, 1 - t), t \in \mathbb{R}$.

► **Задача 6.** Известно, что $x > 0, y > 0$ и $7x^2 - 13xy - 2y^2 = 0$. Найти $\frac{2x - 6y}{7x + 4y}$.

Решение. Из того, что $7x^2 - 13xy - 2y^2 = (7x + y)(x - 2y) = 0$, следует, что либо $7x + y = 0$, либо $x - 2y = 0$. Первое равенство невозможно из-за $x > 0, y > 0$, так что $x = 2y$.

Следовательно,
$$\frac{2x - 6y}{7x + 4y} = \frac{2 \cdot 2y - 6y}{7 \cdot 2y + 4y} = \frac{-2y}{18y} = -1/9.$$

Ответ: $-\frac{1}{9}$. ◀

► **Задача 7.** Известно, что $x > 0, y > 0, S > 0$ и $\begin{cases} \frac{S}{x} + 1 = \frac{S}{y}, \\ x + 2y = \frac{7}{6}S. \end{cases}$ Найти $\frac{x}{y}$.

Решение. Из того, что $S > 0$, следует, что второе уравнение можно поделить на S . Получим систему

$$\begin{cases} \frac{S}{x} + 1 = \frac{S}{y}, \\ \frac{x}{S} + \frac{2y}{S} = 7/6 \end{cases} \iff \begin{cases} a + 1 = b, \\ \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 7/6, \end{cases}$$

где $a = S/x, b = S/y$.

В первом уравнении b уже выражено через a . Произведем подстановку: $\frac{1}{a} + \frac{2}{a+1} = \frac{7}{6} \iff 3a + 1 = \frac{7}{6}a^2 + \frac{7}{6}a, a \neq 0, -1 \iff 7a^2 - 11a - 6 = 0, a \neq 0, -1 \iff a = 2, -\frac{3}{7}$.

Из положительности всех переменных следует, что $a = 2, b = 3$. Значит, $\frac{x}{y} = \frac{S/y}{S/x} = 3/2$.

Ответ: $\frac{3}{2}$. ◀

► **Задача 8.** Известно, что $x, y, z, t, S > 0$ и $\begin{cases} tx = (t - 2)y = (t - 5/2)z, \\ \frac{S}{x} - \frac{7}{2} = \frac{S}{z}. \end{cases}$ Найти $\frac{S}{x} - \frac{S}{y}$.

Решение. Из верхних равенств получаем, что $y = \frac{t}{t-2}x$ и $z = \frac{t}{t-5/2}x$.

Вторую строку перепишем в виде $\frac{S}{x} - \frac{S}{z} = \frac{7}{2}$ и подставим в нее z , выраженное через x и t . Получим, что

$$\frac{S}{x} - \frac{S}{\frac{t}{t-5/2}x} = \frac{S}{x} \left(1 - \frac{t-5/2}{t}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{S}{tx} = \frac{7}{2},$$

откуда $\frac{S}{tx} = \frac{7}{5}$.

В искомое выражение $\frac{S}{x} - \frac{S}{y}$ подставим y , выраженное через x и t . Получим, что

$$\frac{S}{x} - \frac{S}{y} = \frac{S}{x} - \frac{S}{\frac{t}{t-2}x} = \frac{S}{x} \left(1 - \frac{t-2}{t}\right) = 2 \cdot \frac{S}{tx} = 2 \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{5}.$$

Ответ: $\frac{14}{5}$. ◀

► **Задача 9.** Известно, что $\begin{cases} (x-y)(x+y) = z^2, \\ 4y^2 = 5 + 7z^2. \end{cases}$ Найти $2x^2 + 10y^2 - 23z^2$.

Решение. Перепишем систему в виде $\begin{cases} x^2 - y^2 - z^2 = 0 \\ 4y^2 - 7z^2 = 5 \end{cases}$ и воспользуемся методом неопределенных коэффициентов:

$$\begin{aligned} \alpha(x^2 - y^2 - z^2) + \beta(4y^2 - 7z^2) &= 2x^2 + 10y^2 - 23z^2 \iff \\ \iff \alpha x^2 + (4\beta - \alpha)y^2 - (7\beta + \alpha)z^2 &= 2x^2 + 10y^2 - 23z^2. \end{aligned}$$

Запишем систему равенств для коэффициентов:

$$\begin{cases} \alpha = 2, \\ 4\beta - \alpha = 10, \\ 7\beta + \alpha = 23 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 2, \\ \beta = 3. \end{cases}$$

Следовательно, $2x^2 + 10y^2 - 23z^2 = 2(x^2 - y^2 - z^2) + 3(4y^2 - 7z^2) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15$.

Ответ: 15. ◀

► **Задача 10.** Известно, что $x, y, z, t > 0$ и $\begin{cases} \frac{t}{x+2y+2z} = 1, \\ \frac{t}{z-3x} = \frac{1}{2}. \end{cases}$
Найти $\frac{t}{x+8y+9z}$.

Решение. Данная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} \frac{x+2y+2z}{t} = 1, \\ \frac{-3x+z}{t} = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a+2b+2c = 1, \\ -3a+c = 2, \end{cases}$$

где $a = \frac{x}{t}, b = \frac{y}{t}, c = \frac{z}{t}$.

Найдем $a+8b+9c$ (ясно, что искомая величина является обратной к ней):

$$a+8b+9c = \alpha(a+2b+2c) + \beta(-3a+c) = (\alpha-3\beta)a + 2\alpha b + (2\alpha+\beta)c,$$

откуда $\alpha = 4, \beta = 1$ и $a+8b+9c = 4(a+2b+2c) + (-3a+c) = 4 \cdot 1 + 2 = 6$.

Следовательно, $\frac{t}{x+8y+9z} = \frac{1}{a+8b+9c} = \frac{1}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{6}$. ◀

Урок закончен. Оценка выставляется стандартным образом.

Домашнее задание

- 1. $\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 7x+2y=-25 \end{cases}$
- 2. $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 2y-4x=5 \end{cases}$
- 3. $\begin{cases} 4x+6y=1 \\ 6x+9y=1,5 \end{cases}$
- 4. Решить систему для произвольного a : $\begin{cases} 2(a-1)x-2y=a-1 \\ 4x+(1-a)y=2 \end{cases}$.
- 5. $\begin{cases} x+y+z=4 \\ -2x-y+3z=1 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$
- 6. Известно, что $x > 0, y > 0$ и $x^2 + xy - 6y^2 = 0$. Найти $\frac{x+y}{x-y}$.
- 7. Найти все пары (x, y) , которые являются решениями уравнения $x^2 + xy + y^2 = 0$.
- 8. Известно, что $t, S > 0$ и $\begin{cases} 3vt+wt=S \\ 2vt=S \end{cases}$. Найти $\frac{v}{w}$.
- 9. Известно, что $x, y, z > 0$ и $\begin{cases} \frac{x}{2}+2=\frac{x}{y} \\ 12x=12y+z \end{cases}$. Найти $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$.
- 10. Известно, что $x, y, S > 0, x > y$ и $\begin{cases} \frac{x}{4}+\frac{S}{y}=6 \\ \frac{S}{x+y}=\frac{4}{3} \end{cases}$. Найти $\frac{S}{x-y}$.
- 11. Известно, что $v, w, S > 0$ и $\begin{cases} 5v+5(w-v)=S \\ \frac{v}{n-v}+\frac{S}{w+1}=\frac{S}{v} \end{cases}$. Верно ли, что $\frac{S}{v} \leq 12$?
- 12. Известно, что $\begin{cases} \frac{x}{x+y+z}=\frac{1}{4} \\ \frac{\frac{2p}{x}-\frac{2}{y}-t}{2x-y-z+t}=1 \end{cases}$. Найти $\frac{7x \cdot 4z+t}{p}$.
- 13. Известно, что $\begin{cases} \frac{a}{x+2y+3z}=2 \\ \frac{a}{x+3y-z}=3 \end{cases}$. Найти $\frac{a}{18y-x+5z}$.
- 14. Известно, что $\begin{cases} \frac{S}{x-y+2z+3w+t}=1 \\ \frac{x-y+\frac{S}{w}-w-2t}{2x-y+\frac{S}{w}-w-2t}=\frac{1}{2} \\ \frac{S}{-x+2y-z+2w+t}=\frac{1}{3} \end{cases}$. Найти $\frac{S}{6x-3y+3z-11w-8t}$.
- 15. Известно, что $x, y \neq 0, z > 0$ и $\begin{cases} \frac{\frac{3}{8}x+\frac{2}{5}z}{\frac{3}{8}x+\frac{4}{5}y}=\frac{3}{5} \\ \frac{\frac{3}{4}x+\frac{2}{3}z}{\frac{3}{4}x+\frac{4}{3}y}=\frac{3}{2} \end{cases}$. Найти $\frac{xz}{y^2}$.
- 16. Пусть $x, y > 0$ и $\begin{cases} \frac{x+y}{\frac{x}{5}+\frac{y}{3}}=\frac{40}{3} \\ 50 \cdot \frac{x+y}{\frac{x}{2}+\frac{y}{3}}=y \end{cases}$. Найти x и y .

Урок 12 [2]

Сложные системы уравнений

Под сложными системами уравнений я понимаю нестандартные алгебраические системы. Их уже нельзя разбить на типы и объяснить, как каждый из типов нужно решать. Подобные задачи даются для решения на четверку или на пятерку. Они рассчитаны на то, что абитуриент откроет новый для себя метод решения прямо на экзамене. Конечно же, если это произойдет, ему можно ставить высокую оценку.

Как мы будем бороться с такими задачами? На этом уроке я продемонстрирую вам некоторые методы, которые можно попробовать. Есть высокая вероятность, что хотя бы один из них да сработает. Причин тому две:

- в обычных школах их не изучают;
- придумывать задачи на новые методы несравненно труднее, чем их решать, так что «ключ» к решению многих задач разных лет часто один и тот же — экзаменаторы надеются (и не без оснований) на то, что для подавляющего большинства школьников метод решения соответствующей задачи будет неизвестен.

Методы, которые мы изучим на уроке, я попрошу вас хорошо запомнить, так же как и те, что примените (или откроете) в домашнем задании. На экзамене их надо все попробовать. Если ни один не подходит, комбинируйте, пытаясь упростить задачу любыми способами. В этой книге много подобных задач, так что вы сможете набраться достаточно опыта для того, чтобы найти решение. Но, в общем-то, надо понимать, что нахождение его уже никому не гарантировано — ни вам, ни мне, ни членам приемной комиссии. Однако конкурс есть конкурс и надо бороться. Итак, вперед!

► **Задача 1.**
$$\begin{cases} \frac{x^2+4y^2}{xy} = 5, \\ 2x^2 - y^2 = 31. \end{cases}$$

Решение. Первое, о чем вы должны подумать, это не сводится ли одно из уравнений к хорошему виду (позволяющему, например, хорошо выразить одно из неизвестных через другое). При этом выражение с радикалами типа $y = \pm\sqrt{2x^2 - 31}$, конечно же, хорошим не является. Однако легко заметить, что первое уравнение эквивалентно при $x \neq 0 \neq y$ уравнению

$$x^2 + 4y^2 = 5xy \iff x^2 - 5xy + 4y^2 = 0 \iff (x - 4y)(x - y) = 0,$$

следовательно, либо $x = y$, либо $x = 4y$. Теперь подстановка x во второе уравнение и решение его относительно y не вызывают никаких трудностей.

Ответ: $(\sqrt{31}, \sqrt{31}), (-\sqrt{31}, -\sqrt{31}), (4, 1), (-4, -1)$. ◀

► **Задача 2.**
$$\begin{cases} (x+y)^2 - z^2 = 4, \\ (y+z)^2 - x^2 = 2, \\ (z+x)^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

Решение. Эту задачу легче всего решат те, кто хорошо знает формулу квадрата суммы трех чисел: $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$. При этом ее надо узнавать справа налево, т.е. сложить все три уравнения системы, раскрыть скобки и убедиться, что слева стоит полный квадрат выражения $(x+y+z)$.

Справа будет число 9. Отсюда имеем два случая: $x+y+z = 3$ и $x+y+z = -3$.

1) $x+y+z = 3$.

Применим формулу разности квадратов к каждому из уравнений системы. Получим, что

$$\begin{cases} (x+y+z)(x+y-z) = 4, \\ (x+y+z)(-x+y+z) = 2, \\ (x+y+z)(x-y+z) = 3. \end{cases}$$

Подставив вместо $x+y+z$ число 3, будем иметь простую систему

$$\begin{cases} x+y-z = 4/3, \\ -x+y+z = 2/3, \\ x-y+z = 1, \end{cases}$$

которая легко решается: $\boxed{x=7/6, y=1, z=5/6}$.

2) $x+y+z = -3$.

Этот случай разбирается в точности так же, как и предыдущий, с заменой соответствующих знаков на минусы.

Ответ: $(\frac{7}{6}, 1, \frac{5}{6}), (-\frac{7}{6}, -1, -\frac{5}{6})$. ◀

► **Задача 3.**
$$\begin{cases} xy + 3y^2 - x + 4y - 7 = 0, \\ 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. Здесь тот случай, когда надо догадаться вычесть из второго уравнения удвоенное первое. После этой операции останется уравнение, зависящее только от y :

$$-5y^2 - 10y + 15 = 0 \iff y^2 + 2y - 3 = 0 \iff y = 1, -3.$$

Если подставить $y = 1$ в первое уравнение, увидим, что любое x годится, так как получается уравнение $0 \cdot x = 0$. Значит, первая часть ответа есть

$$\boxed{(t, 1), t \in \mathbf{R}}.$$

Если подставить $y = -3$, получим $x = 2$.

Ответ: $(t, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, $(2, -3)$. ◀

► **Задача 4.**
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 8y + 10 = 0, \\ 2x^2 - 7xy + 3y^2 + 13x - 4y - 7 = 0. \end{cases}$$

Решение. Системы такого вида в общем случае решить нельзя. Можно попытаться разложить одно из уравнений на линейные множители, решив его как квадратное относительно x , считая y известным. Это удастся в том случае, когда дискриминант будет полным квадратом как многочлен от y . Со вторым уравнением системы это не выйдет. Попробуем проделать такую операцию с первым уравнением: $x^2 - 2(y-1)x + 2y^2 - 8y + 10 = 0 \iff x = y - 1 \pm \sqrt{(y-1)^2 - 2y^2 + 8y - 10} = y - 1 \pm \sqrt{-y^2 + 6y - 9} = y - 1 \pm \sqrt{-(y-3)^2}$.

Отсюда видно, что выражение, стоящее под радикалом, отрицательно при $y \neq 3$, и, следовательно, решением первого уравнения может быть только такая пара (x, y) , что $y = 3$. Значит, $x = y - 1 = 2$; мы решили первое уравнение, никак не прибегая ко второму. Надо еще проверить, что пара $(2, 3)$ является решением второго уравнения (в противном случае система не будет иметь решений). Нетрудно убедиться, что это действительно так.

Ответ: $(2, 3)$. ◀

► **Задача 5.**
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9, \\ x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 189, \\ 3xz = 4y^2. \end{cases}$$

Решение. Пусть $a = x + 3z$, $b = 2y$, $c = 3xz$. Тогда с учетом того, что $x^2 + 9z^2 = (x + 3z)^2 - 6xz = a^2 - 2c$, система переписывается в виде

$$\begin{cases} a - b = 9, \\ a^2 - 2c + b^2 = 189, \\ c = b^2 \end{cases} \iff \begin{cases} b = a - 9, \\ a^2 - 2b^2 + b^2 = 189, \\ c = b^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a - b = 9, \\ a^2 - (a - 9)^2 = 189, \\ c = b^2. \end{cases}$$

Из второго уравнения легко находится, что $a = 15$. Из первого следует, что $b = 6$, а из последнего — что $c = 36$.

Из системы $\begin{cases} x+3z=15 \\ 3xz=36 \end{cases}$ тривиальным сведением к квадратному уравнению получаем, что либо $x = 3$, $z = 4$, либо $x = 12$, $z = 1$. Из первого уравнения находим, что в каждом из двух случаев $y = 3$.

Ответ: $(3, 3, 4)$, $(12, 3, 1)$. ◀

► **Задача 6.**
$$\begin{cases} \sqrt{-1-x} - \sqrt{2y-x} = 1, \\ \sqrt{1-2y} + \sqrt{2y-x} = 4. \end{cases}$$

Решение. Отметим сразу на всякий случай, что ОДЗ системы состоит из таких пар (x, y) , что $x \leq -1$, $y \leq 1/2$, $2y - x \geq 0$.

Пусть $\sqrt{-1-x} = a$, $\sqrt{2y-x} = b$. Тогда $1-2y = a^2 - b^2 + 2$ и систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} a - b = 1, \\ \sqrt{a^2 - b^2 + 2} + b = 4. \end{cases}$$

Подставим вместо a выражение $b+1$ во второе уравнение:

$$\begin{aligned} \sqrt{(b+1)^2 - b^2 + 2} + b = 4 &\iff \sqrt{2b+3} = 4-b \iff \\ &\iff \begin{cases} 2b+3 = (4-b)^2 \\ 4-b \geq 0 \end{cases} \iff b = 5 - \sqrt{12}. \end{aligned}$$

Отсюда $a = 6 - \sqrt{12}$, и уже легко находятся $x = -49 + 12\sqrt{12}$ и $y = -6 + \sqrt{12}$.

Ответ: $(-49 + 12\sqrt{12}, -6 + \sqrt{12})$. ◀

► **Задача 7.**
$$\begin{cases} (x+y)(x^2-y^2) = 16, \\ (x-y)(x^2+y^2) = 40. \end{cases}$$

Решение. Левые части уравнений не равны нулю (ибо равны либо 16, либо 40), так что можно поделить первое уравнение на второе. Получим, что

$$\frac{(x+y)(x^2-y^2)}{(x-y)(x^2+y^2)} = \frac{16}{40} \iff \frac{(x+y)(x+y)(x-y)}{(x-y)(x^2+y^2)} = \frac{2}{5}.$$

Последнее уравнение эквивалентно при $x \neq y$, $x \neq -y$, $x^2+y^2 \neq 0$ уравнению

$$\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = \frac{2}{5} \iff 2x^2 + 2y^2 = 5x^2 + 10xy + 5y^2 \iff 3x^2 + 10xy + 3y^2 = 0,$$

откуда либо $y = -3x$, либо $y = -x/3$.

Если $y = -3x$, то после подстановки в первое уравнение получаем

$$(x + (-3x))(x^2 - (-3x)^2) = 16 \iff 16x^3 = 16 \iff x = 1.$$

Значит, в этом случае получается решение $\boxed{(1, -3)}$.

Случай $y = -x/3$ рассматривается аналогично и дает $\boxed{(3, -1)}$.

Ответ: $(1, -3), (3, -1)$. ◀

► **Задача 8.**
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 102, \\ xy + x + y = 69. \end{cases}$$

Решение. Здесь хорошо работает стандартная замена: $x + y = a$, $xy = b$. Тогда $x^2 + y^2 = a^2 - 2b$ и получаем систему

$$\begin{cases} a^2 - 2b - a = 102, \\ a + b = 69 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 - 2(69 - a) - a = 102, \\ b = 69 - a \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + a - 240 = 0, \\ b = 69 - a. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем, что либо $a = -16$ и тогда $b = 85$, либо $a = 15$ и $b = 54$.

Система $\begin{cases} x+y=-16 \\ xy=85 \end{cases}$ решений не имеет, а из $\begin{cases} x+y=15 \\ xy=54 \end{cases}$ получаем два решения: $(6,9)$ и $(9,6)$.

Ответ: $(6,9), (9,6)$. ◀

► **Задача 9.**
$$\begin{cases} (x^2 + y^2)(x + y) = 15xy, \\ (x^4 + y^4)(x^2 + y^2) = 85x^2y^2. \end{cases}$$

Решение. Если $x = 0$, то, очевидно, и $y = 0$. Аналогично из $y = 0$ следует $x = 0$. Отметим, что $(0,0)$ есть решение нашей системы, и поищем все остальные решения. Мы только что доказали, что среди них нет нулевых. Перейдем к следствию нашей системы, возведя первое уравнение в квадрат. Получим $(x^2 + y^2)^2(x + y)^2 = 225x^2y^2$, откуда

$$\begin{aligned} \frac{(x^2 + y^2)^2(x + y)^2}{225} &= \frac{(x^4 + y^4)(x^2 + y^2)}{85} \iff \\ &\iff \frac{(x^2 + y^2)^2(x + y)^2}{45} = \frac{(x^4 + y^4)(x^2 + y^2)}{17}. \end{aligned}$$

После приведения к общему знаменателю получим уравнение

$$28x^4 - 34x^3y - 34x^2y^2 - 34xy^3 + 28y^4 = 0.$$

Мы договорились, что $y \neq 0$, так что можно поделить последнее уравнение на y^4 и обозначить x/y через t . Тогда

$$28t^4 - 34t^3 - 34t^2 - 34t + 28 = 0.$$

Здесь тот самый случай, когда уравнение четвертой степени можно решить, не угадывая корней. Поделим его на t^2 . Тогда

$$28\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) - 34\left(t + \frac{1}{t}\right) - 34 = 0.$$

Применим подстановку $z = t + \frac{1}{t}$. Тогда $t^2 + \frac{1}{t^2} = z^2 - 2$, и получаем уравнение

$$14z^2 - 17z - 45 = 0 \iff z = \frac{5}{2}, -\frac{9}{7}.$$

Уравнение $t + \frac{1}{t} = -\frac{9}{7}$ решений не имеет, а если $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$, то либо $t = 2$, либо $t = \frac{1}{2}$.

Вспомнив, что $t = x/y$, получим, что либо $y = 2x$, либо $y = \frac{x}{2}$. Подставляя полученные y в первое уравнение (и произведя проверку, необходимую вследствие неэквивалентности преобразований!), получаем

Ответ: $(2,4), (4,2), (0,0)$. ◀

► **Задача 10.**
$$\begin{cases} \sqrt{x + \frac{1}{y}} + \sqrt{y + \frac{1}{x}} = 2\sqrt{2}, \\ (x^2 + 1)y + (y^2 + 1)x = 4xy. \end{cases}$$

Решение. Согласно ОДЗ нашей системы обе переменные не могут принимать нулевые значения. Поэтому второе уравнение можно поделить на xy . Тогда

$$\frac{x^2 + 1}{x} + \frac{y^2 + 1}{y} = 4 \iff x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = 4.$$

Если теперь положить $a = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$ и $b = \sqrt{y + \frac{1}{y}}$, то наша система примет вид

$$\begin{cases} a + b = 2\sqrt{2}, \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases} \iff a = b = \sqrt{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2, \\ y + \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \iff x = y = 1.$$

Я опускаю легкое (например, подстановкой) решение последней системы.

Ответ: (1, 1). ◀

Наш урок окончен. Поставьте себе оценку следующим образом:

- если вы самостоятельно решили ≥ 4 задач, то оценка 5;
- если вы решили ≤ 3 задач, и поняли все мои решения — 4;
- если сами решили хотя бы одну задачу и поняли ≥ 7 решений — 3;
- все остальное — 2.

Даже если у вас двойка, попробуйте решить домашнее задание и переходите к следующему уроку. Это можно делать, так как тема данного урока «четверочная».

Домашнее задание

- 1.
$$\begin{cases} x + y + xy = 7 \\ x^2 + y^2 + xy = 13 \\ 2x^2 + xy - y^2 = 20 \end{cases}$$
- 2.
$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 7y^2 = 13 \\ 3x^2 + 5xy - 2y^2 = 20 \end{cases}$$
- 3.
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x^2 - y^2 + 3y = 0 \end{cases}$$
- 4.
$$\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 4y = 0 \\ x^2 + y^2 + z = 2 \end{cases}$$
- 5.
$$\begin{cases} x^2 + y + z^2 = 2 \\ x + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$

- 6. $\begin{cases} x^2 + 2yz = 1 \\ y^2 - 2zx = 2 \\ z^2 + 2xy = 1 \end{cases}$
- 7. $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ x + y^2 = 2 \end{cases}$
- 8. $\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10 \\ (x + y)(x - y) = 3 \end{cases}$
- 9. $\begin{cases} xy(x + y) = 20 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{4} \end{cases}$
- 10. $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17(x + y)^2 \\ xy = 2(x + y) \end{cases}$
- 11. $\begin{cases} x^2 + 3 = 2xy \\ 6x^2 - 11y^2 = 10 \end{cases}$
- 12. $\begin{cases} 2x = \frac{y}{1 + y^2} \\ 2y = \frac{x}{1 + x^2} \end{cases}$
- 13. $\begin{cases} \frac{2}{2x - y} + \frac{3}{x - 2y} = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{2x - y} - \frac{1}{x - 2y} = \frac{1}{18} \end{cases}$
- 14. $\begin{cases} x^3 - \sqrt{y} = 1 \\ 5x^6 - 8x^3\sqrt{y} + 2y = 2 \end{cases}$
- 15. $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2(y - 1) = \sqrt{10x^2 - xy - 2y^2} \end{cases}$
- 16. $\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0 \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0 \end{cases}$
- 17. $\begin{cases} y^2 - 4xy + 4y - 1 = 0 \\ 3x^2 - 2xy - 1 = 0 \end{cases}$
- 18. $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0 \end{cases}$

Глава 4

Текстовые задачи

Урок 13

Движение

Решение любой текстовой задачи (не только на движение) складывается из трех основных моментов:

- 1) удачного выбора неизвестных;
- 2) составления уравнений и формализации того, что требуется найти;
- 3) решения полученной системы уравнений и неравенств.

1) Практически всегда в задачах на движение выбор в качестве неизвестных величин расстояний и скоростей приводит к успеху. Если вы составили уравнения, а полученная система не решается, надо попробовать выбрать другие неизвестные. Ни в коем случае не пугайтесь того, что у вас слишком много неизвестных. Правильное составление системы превыше всего. Кроме того, обращайтесь особое внимание на единицы измерения — они в течение всего решения должны быть одинаковыми. Если это часы, то время должно на протяжении всей задачи выражаться в часах, а не в минутах, не должны в одном решении применяться километры и метры, и т.п.

2) Помните о том, что для превращения высказываний в тексте задачи в уравнения вашей системы **математических знаний вообще не надо** — необходим лишь здравый смысл. Практическое, заземленное мышление на уровне торговли на базаре гарантирует успех на 100%. Важно **обязательно** сформулировать при помощи ваших переменных, что вы обязаны найти, поскольку переменных может быть больше, чем уравнений, так что все их найти будет просто невозможно.

3) Решение систем, которые в таких случаях возникают, было рассмотрено на уроке 11. Отмечу здесь, что нужно все время помнить о том, что ищется. Кроме того, в текстовых задачах все величины, как правило,

положительны (ибо в природе скорости и расстояния положительны). Поэтому можно смело умножать, делить и возводить в квадрат получающиеся уравнения и неравенства, не делая необходимых в таких случаях оговорок.

- **Задача 1.** Если пароход и катер плывут по течению, то расстояние от A до B пароход покрывает в полтора раза быстрее, чем катер; при этом катер каждый час отстает от парохода на 8 км. Если они плывут против течения, то пароход идет от B до A в два раза быстрее (по времени, а не по скорости), чем катер. Найти скорости парохода и катера в стоячей воде.

Решение. Пусть x км/ч — скорость парохода в стоячей воде, y км/ч — скорость катера в стоячей воде, v км/ч — скорость течения и S км — расстояние от A до B .

Скорость парохода по течению составляет $x+v$ км/ч, катера — $y+v$ км/ч. Следовательно, путь в S км пароход пройдет за $\frac{S}{x+v}$ часов, а катер — за $\frac{S}{y+v}$ часов. По условию задачи время парохода будет в полтора раза меньше, чем время катера. Отсюда получаем первое уравнение: $1,5 \cdot \frac{S}{x+v} = \frac{S}{y+v}$.

Полезно по ходу решения задачи обводить уже готовые уравнения в рамочку, чтобы легко было их потом собирать в систему.

Далее, тот факт, что катер каждый час отстает от парохода на 8 км означает просто, что за один час пароход проходит на 8 км больше, чем катер. Пароход проходит за один час $1 \cdot (x+v)$ км, а катер — $1 \cdot (y+v)$ км. Отсюда получаем второе уравнение: $x+v = y+v+8$.

При ходе против течения скорость парохода есть $x-v$ км/ч, а катера — $y-v$ км/ч. Следовательно, пароход пройдет от A до B за $\frac{S}{x-v}$ ч, а катер — за $\frac{S}{y-v}$ ч. По условию задачи время парохода в два раза меньше времени катера, т.е. $2 \cdot \frac{S}{x-v} = \frac{S}{y-v}$.

Мы имеем систему

$$\begin{cases} 1,5 \cdot \frac{S}{x+v} = \frac{S}{y+v}, \\ x+v = y+v+8, \\ 2 \cdot \frac{S}{x-v} = \frac{S}{y-v}, \end{cases}$$

из которой надо найти x и y .

Сократив первое и третье уравнения на $S > 0$ и упростив второе, получим систему

$$\begin{cases} \frac{3}{2(x+v)} = \frac{1}{y+v}, \\ x = y+8, \\ \frac{2}{x-v} = \frac{1}{y-v} \end{cases} \iff \begin{cases} 3y+3v = 2x+2v, \\ x = y+8, \\ 2y-2v = x-v. \end{cases}$$

Последняя эквивалентность имеет место ввиду положительности всех переменных. Из получившейся линейной системы легко находим, что $x = 20$, $y = 12$.

Ответ: Скорость парохода — 20 км/ч, скорость катера — 12 км/ч. ◀

- **Задача 2.** Два туриста вышли из A в B одновременно, причем первый турист каждый километр пути проходит на 5 мин быстрее второго. Первый, пройдя $1/5$ часть пути, вернулся в A и, пробыв там 10 мин, снова пошел в B . При этом в B оба туриста пришли одновременно. Каково расстояние от A до B , если второй турист прошел его за 2,5 часов?

Решение. Пусть x км/ч — скорость 1-го туриста, y км/ч — скорость 2-го, S км — расстояние от A до B .

Первый турист проходит 1 км за $\frac{1}{x}$ часов, второй — за $\frac{1}{y}$ часов. По условию второй турист тратит на прохождение 1 км пути на $\frac{1}{12}$ часа больше, чем первый. Отсюда имеем первое уравнение: $\boxed{\frac{1}{x} + \frac{1}{12} = \frac{1}{y}}$. Вы не написали случайно 5 вместо $1/12$?

Далее, первый турист прошел $1/5$ часть пути за $\frac{S/5}{x}$ ч, вернулся в A за $\frac{S/5}{x}$ ч, т.к. прошел ту же самую $1/5$ часть пути в обратном направлении. После этого он пробыл в A $1/6$ часа и за $\frac{S}{x}$ часов пришел в B . Всего он потратил $\frac{2S}{5x} + \frac{1}{6} + \frac{S}{x}$ часов.

Второй турист шел в B S/y часов. По условию они пришли одновременно. Значит, имеем второе уравнение: $\boxed{\frac{2S}{5x} + \frac{1}{6} + \frac{S}{x} = \frac{S}{y}}$.

Тот факт, что второй турист прошел путь за 2,5 часа, дает третье уравнение: $\boxed{\frac{S}{y} = 2,5}$.

Имеем систему

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{12} = \frac{1}{y}, \\ \frac{2S}{5x} + \frac{1}{6} + \frac{S}{x} = \frac{S}{y}, \\ \frac{S}{y} = 2,5, \end{cases}$$

из которой надо найти S .

Заменим в первом уравнении $\frac{S}{y}$ на 2,5. Тогда, приведя подобные члены, получим, что

$$\frac{7}{5} \cdot \frac{S}{x} + \frac{1}{6} = \frac{5}{2} \iff \frac{S}{x} = \frac{5}{3}.$$

Умножим первое уравнение на S :

$$\frac{S}{x} + \frac{S}{12} = \frac{S}{y} \iff \frac{5}{3} + \frac{S}{12} = \frac{5}{2} \iff S = 10.$$

Ответ: расстояние между A и B равно 10 км. ◀

► **Задача 3.** Пассажир, едущий из A в B , одну половину затраченного на путь времени ехал на автобусе, а вторую — на автомашине. Если бы он ехал от A до B только на автобусе, то это заняло бы в полтора раза больше времени. Во сколько раз быстрее проходит путь от A до B машина, чем автобус?

Решение. Пусть x км/ч — скорость автобуса, y км/ч — скорость автомобиля, S км — расстояние от A до B .

Пусть t часов — затраченное на путь время. Согласно условию $t/2$ ч пассажир ехал на автобусе и столько же — на автомобиле. Значит, он проехал всего $x \cdot \frac{t}{2} + y \cdot \frac{t}{2}$ км, причем это расстояние равно S . Следовательно,

$$x \cdot \frac{t}{2} + y \cdot \frac{t}{2} = S \iff t = \frac{2S}{x+y}.$$

В автобусе пассажир проехал весь путь за $\frac{S}{y}$ часов. Учитывая условие задачи, составляем уравнение

$$1,5 \cdot \frac{2S}{x+y} = \frac{S}{y},$$

из которого надо найти величину $\frac{S/x}{S/y} = \frac{y}{x}$.

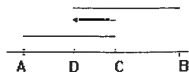
Сокращая на S и упрощая, получаем $x = 2y \iff \frac{y}{x} = \frac{1}{2}$.

Ответ: в два раза быстрее. ◀

► **Задача 4.** Из A в B против течения выехала моторная лодка. В пути сломался мотор, и пока его чинили (20 мин), лодку снесло вниз по реке. Насколько позднее прибыла лодка в B , если обычно из A в B она идет в полтора раза дольше, чем из B в A ?

Решение. Пусть x км/ч — скорость лодки в стоячей воде, y км/ч — скорость течения, S км — расстояние от A до B , и t ч — время, прошедшее от выезда из A до поломки мотора.

Здесь полезно нарисовать картинку



Точкой C обозначено место, где сломался мотор, D — точка окончания ремонта. Стрелками обозначено направление движения лодки.

Расстояние AC равно $(x - y)t$ км, $CD = \frac{1}{3}y$ км (ибо лодка шла вниз со скоростью y км/ч в течение $\frac{1}{3}$ часа.)

Значит,

$$DB = S - \left((x - y)t - \frac{1}{3}y \right),$$

и мы можем подсчитать время, затраченное лодкой на весь путь. Оно складывается из времени t до поломки, $1/3$ часа ремонта и езды после поломки в течение $\frac{DB}{x-y}$ часов. Следовательно, на весь путь лодка затратила

$$t + \frac{1}{3} + \frac{S - (x - y)t + \frac{1}{3}y}{x - y} \text{ часов.}$$

Опоздание лодки равно разности между затраченным временем и временем, за которое бы она проехала путь без поломки, т.е. равно

$$t + \frac{1}{3} + \frac{S - (x - y)t + \frac{1}{3}y}{x - y} - \frac{S}{x - y}$$

часов.

Именно эту сложную величину нам и надо найти. Она на самом деле не так страшна, как кажется на первый взгляд, — после приведения к общему знаменателю останется величина

$$\frac{\frac{1}{3}x}{x - y} = \frac{x}{3(x - y)},$$

которую мы сейчас и отыщем.

Из A в B лодка идет $\frac{S}{x-y}$ часов, а обратно — $\frac{S}{x+y}$ часов. По условию

$$1,5 \cdot \frac{S}{x + y} = \frac{S}{x - y} \iff \frac{1,5}{x + y} = \frac{1}{x - y} \iff x = 5y,$$

откуда находим, что искомое опоздание равно $\frac{x}{3(x-y)} = \frac{5y}{3(5y-y)} = \frac{5}{12}$ ч.

Ответ: лодка прибыла позднее на 25 минут. ◀

- **Задача 5.** Из A в B навстречу друг другу выехали одновременно два автобуса. Первый, имея вдвое большую скорость, проехал весь путь на 1 час быстрее 2-го. На сколько минут раньше произошла бы их встреча, если бы скорость 2-го увеличилась до скорости 1-го?

Решение. Пусть S км — расстояние от A до B и x км/ч — скорость второго автобуса. Тогда скорость первого равна по условию $2x$ км/ч. Первый автобус проезжает путь за $\frac{S}{2x}$ часов, а второй — за $\frac{S}{x}$ часов. По условию имеем

$$\frac{S}{2x} + 1 = \frac{S}{x},$$

откуда легко находится, что $S/x = 2$.

Если t — время, прошедшее до встречи автобусов, то за это время они прошли вместе S км. Значит,

$$2x \cdot t + x \cdot t = S,$$

откуда $t = \frac{S}{3x}$.

Аналогично рассуждая, найдем, что время до встречи, прошедшее после того, как второй увеличил свою скорость до $2x$ км/ч, равно $\frac{S}{4x}$ часов.

Следовательно, их встреча произошла бы в этом случае на

$$\frac{S}{3x} - \frac{S}{4x} = \frac{1}{12} \cdot \frac{S}{x} = \frac{1}{6}$$

часа раньше.

Ответ: встреча автобусов произошла бы раньше на 10 мин. ◀

- **Задача 6.** Два туриста вышли из A и B одновременно навстречу друг другу. Они встретились в 4 км от B . Достигнув A и B , туристы сразу повернули обратно и встретились в 2 км от A . Вторая встреча произошла через час после первой. Найти скорости туристов и расстояние от A до B .

Решение. Пусть, как всегда, S км — расстояние от A до B , x км/ч — скорость первого туриста, y км/ч — скорость второго туриста.

Запишем в виде уравнения тот факт, что они встретились в 4 км от B . Если t час — время, прошедшее до их первой встречи, то, поскольку они за это время вместе прошли ровно S км, имеем $xt + yt = S$, откуда $t = \frac{S}{x+y}$.

Ясно, что за это время второй турист прошел 4 км, т.е. $\boxed{\frac{Sy}{x+y} = 4}$.

В задаче сказано, что туристы оба достигли пунктов назначения, т.е. не было так, что один догнал другого, еще не успевшего дойти до цели. Следовательно, первый турист (т.е. шедший из A) сперва достиг B , пройдя 4 км, а потом прошел $S - 2$ км до второй встречи. Второй турист прошел сперва $S - 4$ км до A , а потом 2 км до второй встречи. Времена, затраченные ими на ходьбу между встречами, равны 1 час для каждого из них. Отсюда получаем еще два уравнения: $\boxed{\frac{S-2+4}{x} = 1}$ и $\boxed{\frac{S-4+2}{y} = 1}$.

Имеем систему

$$\begin{cases} \frac{Sy}{x+y} = 4, \\ \frac{S-2+4}{x} = 1, \\ \frac{S-4+2}{y} = 1, \end{cases}$$

из которой надо найти x , y и S .

Из второго и третьего уравнений заключаем, что $S = y + 2 = x - 2 \Rightarrow x = y + 4$. Подставляем S и x в первое уравнение:

$$\frac{(y+2)y}{y+4+y} = 4 \iff y^2 - 6y - 16 = 0 \iff y = 8.$$

Значит, $x = 12$ и $S = 10$.

Ответ: расстояние от A до B равно 10 км, скорость первого туриста равна 12 км/ч, а второго — 8 км/ч. ◀

- **Задача 7** [3]. Из A в C в 9 часов утра отправляется скорый поезд. В то же время из B , расположенного между A и C , выходят два пассажирских поезда, первый из которых идет в A , а второй — в C . Скорости пассажирских поездов равны. Скорый встречает первый пассажирский не позже, чем через три часа после отправления, потом приходит в пункт B не ранее 14 часов того же дня и, наконец, прибывает в C одновременно со 2-м пассажирским через 12 часов после встречи с 1-м пассажирским. Найти время прибытия в A первого пассажирского поезда.

Решение. Пусть S км — расстояние от A до B , T км — расстояние от B до C , y км/ч — скорость пассажирского поезда и x км/ч — скорого.

Встреча скорого и первого пассажирского поездов произошла через $\frac{S}{x+y}$ часов, а в пункт B скорый прибыл через $\frac{S}{x}$ часов. Значит, имеют место два неравенства:

$$\frac{S}{x+y} \leq 3 \quad \text{и} \quad \frac{S}{x} \geq 5.$$

Из того, что скорый прибыл в C одновременно со вторым пассажирским следует, что

$$\frac{S+T}{x} = \frac{T}{y}.$$

До встречи с первым пассажирским поездом скорый проехал $x \cdot \frac{S}{x+y}$ км, а через двенадцать часов $12x$ км, что составило остаток пути от A до C . Значит, имеем еще одно уравнение:

$$\frac{Sx}{x+y} + 12x = S + T.$$

Из последних двух уравнений можно исключить T и выразить S через x и y :

$$S = \frac{6x^2 - 6y^2}{y}.$$

Подставим S в первое неравенство:

$$\frac{6x - 6y}{y} \leq 3 \iff x \leq \frac{3}{2}y.$$

А теперь — во второе:

$$\frac{6x^2 - 6y^2}{y} \geq 5 \iff 6x^2 - 5xy - 6y^2 \geq 0 \iff (3x + 2y)(2x - 3y) \geq 0 \iff x \geq \frac{3}{2}y.$$

Следовательно, $x = \frac{3}{2}y$.

Нам надо найти время прибытия в A первого пассажирского поезда. Он прибыл в A через $\frac{S}{y} = \frac{6x^2 - 6y^2}{y^2} = 6\frac{x^2}{y^2} - 6 = 7,5$ часов. Вспомнив, что он отправился в 9 часов утра, получаем

Ответ: первый пассажирский поезд прибыл в A в 16 час. 30 мин. ◀

Урок окончен. Оценка выставляется стандартным образом.

Домашнее задание

- ▶ 1. Переднее колесо повозки на некотором пути сделало на 1000 оборотов больше заднего. Если бы длина окружности переднего колеса была в полтора раза больше, то на том же пути оно сделало бы на 200 оборотов больше заднего колеса. Чему равны длины окружностей колес, если известно, что длина окружности заднего колеса на 1,5 м больше длины окружности переднего колеса?
- ▶ 2. Два тела движутся по окружности равномерно и в одну сторону. Первое тело проходит окружность на 2 сек быстрее второго и догоняет второе тело каждые 12 сек. За какое время каждое тело проходит окружность?
- ▶ 3. Для того, чтобы из пункта A попасть в пункт B , нужно часть пути от пункта A до пункта C проехать на поезде, а остальные 15 км от C до B — на автобусе. Вся поездка от A до B занимает 1 час 15 мин, причем автобус отправляется сразу после прихода поезда, а временем, которое поезд и автобус тратят на остановки, можно пренебречь. По ошибке пассажир сошел с поезда на остановку раньше, прошел оставшийся путь до C длиной 5 км пешком со скоростью 4 км/ч, а затем еще 20 мин ждал автобуса и в результате попал в пункт B на 1 час 30 мин позже намеченного срока. Найти расстояние от A до C , если известно, что скорость поезда вдвое больше скорости автобуса.
- ▶ 4 [2]. Колонна мотоциклистов с интервалом между соседними машинами 50 м движется со скоростью 15 км/ч. В противоположном направлении вдоль колонны (от первой машины) едет велосипедист. Поравнявшись с

45-м мотоциклистом, он увеличивает свою скорость на 10 км/ч, доезжает до последнего мотоциклиста, поворачивает и с той же увеличенной скоростью догоняет первую машину. Если бы велосипедист все время (с самого начала) двигался с этой увеличенной скоростью, то он вернулся бы к голове колонны на $15/8$ мин раньше.

Найти первоначальную скорость велосипедиста (длины велосипеда, мотоцикла и время поворота велосипедиста не учитываются).

- 5. Пункт A находится на реке выше пункта B . В одно и то же время из пункта A отплыли вниз плот и первая моторная лодка, а из пункта B вверх — вторая моторная лодка. Через некоторое время лодки встретились в пункте C , а плот за это время проплыл третью часть AC .

Если бы первая лодка без остановки доплыла до пункта B , то плот за это время прибыл бы в пункт C . Если бы из пункта A в пункт B отплыла вторая лодка, а из пункта B в пункт A — первая лодка, то они встретились бы в 40 км от пункта A .

Какова скорость обеих лодок в стоячей воде, а также расстояние между пунктами A и B , если скорость течения равна 3 км/ч?

- 6. Из города A в город B через равные промежутки времени и с равной скоростью выезжает 21 автобус, каждый из которых проходит путь AB за 2 час 40 мин. При этом первый автобус прибывает в город B в тот момент, когда из города A выезжает 21-й автобус. Прибыв в город B , каждый автобус мгновенно разворачивается и движется к городу A .

Из города A одновременно с 21-м автобусом выезжает в город B легковая машина, которая через t мин обгоняет 20-й автобус. Найти t и время, за которое легковая машина преодолевает расстояние AB , если, встретив 1-й автобус, она встречает второй автобус через $t - 9$ мин.

Примечание. Автобусы занумерованы в том порядке, в каком они выезжают из города A .

- 7. Города A и B расположены на берегу реки, причем город B лежит ниже по течению. В 9 час утра из A в B отправляется плот, плывущий относительно берегов со скоростью течения реки. В этот же момент из B в A отправляется лодка, которая встречается с плотом через 5 час. Доплыв до города A , лодка мгновенно повернула обратно и приплыла в город B одновременно с плотом. Успели ли лодка и плот прибыть в город B к 9 час вечера того же дня?

- 8 [3]. Два бегуна стартовали раздельно в одной точке стадиона в беге на 25 кругов, причем второй начал движение, когда первый прошел полкруга. Один из зрителей вышел со стадиона, когда бегуны были рядом. Когда через 13 мин он вернулся, бегуны снова были рядом. Если бы первый бегун после третьего круга увеличил скорость в 2 раза, а второй бегун после десятого круга — в три раза, то оба бегуна финишировали бы одновременно. Определить, с какой разницей во времени финишировали

бегуны, если закончивший бег вторым пробежал за минуту менее круга.

- 9 [2]. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Вслед за ним через два часа из пункта A выехал велосипедист, а еще через 30 мин — мотоциклист. Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались равномерно и без остановок. Через некоторое время после выезда мотоциклиста оказалось, что все трое к этому моменту преодолели одинаковую часть пути от A до B . На сколько минут раньше пешехода в пункт B прибыл велосипедист, если пешеход прибыл в пункт B на 1 час позже мотоциклиста?
- 10. Два автобуса выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B и встречаются в 12 часов дня. Если скорость первого автобуса увеличить в два раза, а скорость второго оставить прежней, то встреча произойдет на 56 мин раньше. Если же увеличить в два раза скорость второго автобуса, оставив прежней скорость первого, то встреча произойдет на 65 мин раньше. Определить время встречи, если увеличены вдвое скорости обоих автобусов.
- 11. Из пункта A в пункт B автомобиль доехал за 5 часов, двигаясь в пределах населенных пунктов со скоростью 60 км/ч, а по шоссе вне населенных пунктов — со скоростью 80 км/ч. Обратный путь из B в A занял 4 часа 36 минут. При этом в пределах населенных пунктов автомобиль двигался со скоростью 50 км/ч, а по шоссе — 90 км/ч. Каково расстояние между пунктами A и B ?
- 12 [2]. Путь из A в B проходит первые 80 км по шоссе, а оставшиеся 120 км — по грунтовой дороге. Первую часть пути автобус проезжает на 2 часа быстрее, чем вторую.

Автобус совершил более четырех рейсов по маршруту из A в B и обратно. На это, включая стоянки в конечных пунктах, ушло менее одной недели (т.е. менее 168 часов). За время, которое он провел при этом в движении, автобус мог бы проехать 2100 км, если бы двигался со скоростью, равной средней арифметической между скоростями движения по шоссе и грунтовой дороге. Найти скорости движения автобуса по шоссе и по грунтовой дороге.

- 13 [2]. В море с прямолинейным берегом впадают две реки с одинаковой скоростью течения. Посередине между их устьями расположен город A , на первой реке находится пункт B , а на второй реке — пункт C . Расстояние вдоль реки от B до устья этой реки равно расстоянию от A до устья реки, а расстояние от C до устья реки составляет $3/4$ расстояния от A до устья реки. Из города A одновременно выходят две лодки: первая идет в B (вдоль берега моря и по реке), а вторая идет в C (также вдоль берега моря и по реке). Дойдя до пунктов B и C , лодки сразу поворачивают назад и идут соответственно в пункты C и B . Известно, что общее время, в течение которого первая лодка на пути из A в B , а потом в C шла по морю, относится ко времени, в

течение которого она шла по рекам как 45:47. Для второй лодки это отношение равно 16:17. Какая из лодок первая пришла в свой конечный пункт — первая лодка в C или вторая в B ?

- 14 [3]. Путь из села в город идет сначала по грунтовой дороге, а затем по шоссе. Из села в город в 7 часов утра выехал автомобилист, и одновременно с ним из города в село выехал мотоциклист. Мотоциклист двигался по шоссе быстрее, чем по грунтовой дороге в $1\frac{2}{3}$ раза, а автомобилист — в $1\frac{1}{2}$ раза (движение обоих по шоссе и по грунтовой дороге считать равномерным). Они встретились в 9 ч 15 мин, автомобилист приехал в город в 11 часов, а мотоциклист приехал в село в 12 ч 15 мин. Определить, сможет ли автомобилист приехать в город до 11 ч 15 мин, если он весь путь из села в город будет ехать с первоначальной скоростью.
- 15. Пункты A и B расположены на одной реке так, что плот, плывущий из A в B со скоростью течения реки, проходит путь от A до B за 24 часа. Весь путь от A до B и обратно моторная лодка проходит не менее, чем за 10 часов. Если бы собственная скорость (т.е. скорость в стоячей воде) моторной лодки увеличилась на 40%, то путь от A до B и обратно занял бы у лодки не более 7 часов. Найти время, за которое моторная лодка проходит путь от A до B в случае, когда ее собственная скорость не увеличена.
- 16. Две реки с прямолинейными руслами и одинаковой скоростью течения впадают в одном и том же месте в озеро, образуя между собой угол в 60° . От двух причалов, расположенных на разных реках и отстоящих друг от друга на расстоянии 28 км, одновременно вышли байдарка и лодка, скорости которых в стоячей воде соответственно равны 10 км/ч и 3 км/ч. Байдарка достигла озера через 2 часа, лодка через 4 часа. Найти скорость течения рек.
- 17 [2]. Автобус проходит путь AE , состоящий из отрезков AB , BC , CD , DE длиной 10 км, 5 км, 5 км и 6 км соответственно. При этом согласно расписанию, выезжая из пункта A в 9 часов, он проходит пункт B в $9\frac{1}{5}$ часа, пункт C — в $9\frac{3}{8}$ часа, пункт D — в $9\frac{2}{3}$ часа. С какой постоянной скоростью v должен двигаться автобус, чтобы сумма абсолютных величин отклонений от расписания прохождения пунктов B , C , D и времени движения автобуса от A до E при скорости v не превосходила 51,7 минут?
- 18 [2]. Согласно расписанию пароход проходит по реке, скорость течения которой 6 км/ч, путь из A в D длиной 18 км за 1 час. При этом, выходя из пункта A в 10 часов, он прибывает в пункты B и C , отстоящие от A на расстоянии 14 км и 17 км соответственно, в 10 часов 12 минут и в 10 часов 18 минут. Известно, что если бы пароход двигался из A в D без остановок с постоянной скоростью v (относительно воды), то сумма

абсолютных величин отклонений от расписания прибытия в пункты B, C, D не превышала бы уменьшенного на полчаса времени, необходимого пароходу для прохождения 6 км со скоростью v в стоячей воде. Какой из пунктов A или D находится выше по течению?

- 19 [2]. В полночь из пункта A в пункт B по течению реки отправился катер, а из B в A в тот же момент вышла лодка. Лодка была в пути не менее суток. Катер, дойдя до пункта B , сразу повернул назад и возвратился в пункт A не позднее 10 часов 48 минут того же дня. Первая встреча катера и лодки состоялась в 4 часа утра. Найти, когда катер прибыл в пункт B , если его скорость в стоячей воде втрое больше скорости лодки в стоячей воде.
- 20. Из пункта A в пункт B выходит поезд. В момент прибытия этого поезда в B оттуда выходит другой поезд, который следует в A . Время, которое прошло от выхода первого поезда из A до прибытия туда второго поезда, в $4\frac{1}{6}$ раза превышает время, которое затратили бы поезда до момента встречи, если бы они вышли одновременно из A и B навстречу друг другу. Скорости обоих поездов постоянны, причем скорость второго поезда на 20 км/ч превышает скорость первого поезда. Чему равна скорость каждого поезда?
- 21. Из пункта A в пункт B выезжает автомобиль и одновременно из B в A с меньшей скоростью выезжает мотоцикл. Через некоторое время они встречаются, и в этот момент из B в A выезжает второй мотоцикл, который встречается с автомобилем в точке, отстоящей от точки встречи автомобиля с первым мотоциклом на расстоянии, равном $\frac{2}{9}$ пути от A до B . Если бы скорость автомобиля была на 20 км/ч меньше, то расстояние между точками встречи равнялось бы 72 км и первая встреча произошла бы через три часа после выезда автомобиля из пункта A . Найти длину пути от A до B (скорости мотоциклов одинаковы).

Урок 14

Работа

В задачах на работу за неизвестные, как правило, надо принимать производительность — ее роль такова же, как роль скорости в задачах на движение. Главное, как и в задачах на движение, — здравый смысл и полное ваше понимание того, что вы делаете. К примеру, если вы пишете, что x — производительность станка, вы должны уметь расшифровать, что это

значит — число деталей в минуту, или в час, или в день, и т.д. Бывают такие задачи, в которых вообще не сказано, какая работа выполняется. В таком случае удобнее ввести самим единицу работы, равную всей работе. Тогда производительность есть часть всей работы, выполненная за единицу времени. Следите за тем, чтобы единицы времени были одни и те же на протяжении всей задачи.

Задачи на трубы, из которых что-то льется, есть также задачи на работу. Здесь производительность трубы — это объем жидкости, протекающей через нее за единицу времени.

Среди задач на работу бывают такие, где решающую роль играют данные, являющиеся целыми числами. Тут уже никаких рецептов дать нельзя. Чаще всего используется делимость и тот факт, что если m и n — целые числа со свойством $|m - n| < 1$, то $m = n$. Помните, что текстовые задачи, где нужно использовать свойства целых чисел, всегда являются сложными, и их надо решать в последнюю очередь. Вы поймете, что в задаче важны целые числа, после того, как составите систему уравнений и увидите, что просто так найти из нее неизвестные невозможно.

- **Задача 1.** В бассейн проведены три трубы. Первая и вторая вместе наполняют его за 5 ч 20 мин быстрее, чем первая и третья вместе. Если бы вторая наливала, а третья выливала воду из бассейна, то он наполнился бы за $21\frac{1}{16}$ часа быстрее, чем бассейн вдвое большего объема первой и второй трубами вместе. За сколько времени первая и вторая труба наполнят бассейн, если первая и третья наполняют его дольше 8 часов?

Решение. Пусть V л — объем бассейна, x л/ч льет первая труба, y л/ч — вторая и z л/ч — третья.

Первая и вторая трубы вместе льют $x+y$ л/ч и, следовательно, наполняют бассейн за $\frac{V}{x+y}$ часов. Аналогично первая и третья трубы наполняют бассейн за $\frac{V}{x+z}$ часов. Условие о том, что первая и третья наполняют бассейн за $5\frac{1}{3}$ часа дольше, чем первая и вторая, дает первое уравнение:

$$\frac{V}{x+y} + \frac{16}{3} = \frac{V}{x+z}.$$

Если вторая труба наливает, а третья выливает воду, то за один час воды наливается $y - z$ литров. Значит, бассейн наполнится за $\frac{V}{y-z}$ часов. Бассейн объема $2V$ литров наполнится первой и второй трубами за $\frac{2V}{x+y}$ часов. Значит, имеем второе уравнение:

$$\frac{V}{y-z} + \frac{21}{16} = \frac{2V}{x+y}.$$

Учитывая последнее условие задачи, имеем систему

$$\begin{cases} \frac{V}{x+y} + \frac{16}{3} = \frac{V}{x+z}, \\ \frac{V}{y-z} + \frac{21}{16} = \frac{2V}{x+y}, \\ \frac{V}{x+z} > 8, \end{cases}$$

из которой надо найти $\frac{V}{x+y}$.

Пусть $\frac{V}{x+y} = a$, $\frac{V}{x+z} = b$. Тогда $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{x+y}{V} - \frac{x+z}{V} = \frac{y-z}{V}$, откуда $\frac{V}{y-z} = \frac{ab}{b-a}$, и наша система принимает вид

$$\begin{cases} a + \frac{16}{3} = b, \\ \frac{ab}{b-a} + \frac{21}{16} = 2a, \\ b > 8. \end{cases}$$

Если мы подставим b из первого уравнения во второе, получим уравнение, сводящееся к квадратному относительно a . Решая его, получим, что либо $a = 3$, либо $a = \frac{7}{3}$. При этом $a = \frac{7}{3}$ не подходит, так как в этом случае $b = \frac{7}{3} + \frac{16}{3} = \frac{23}{3} < 8$, что противоречит последнему неравенству системы.

Ответ: за три часа. ◀

- **Задача 2.** Резервуар снабжается водой по пяти трубам. Первая наполняет его за 40 мин, вторая, третья и четвертая вместе — за 10 мин, вторая, третья и пятая — за 20 минут, пятая и четвертая — за 30 мин. За какое время его наполнят все пять труб вместе?

Решение. Пусть V л — объем резервуара, x л/мин льет первая труба, y л/мин — вторая, z л/мин — третья, t л/мин — четвертая и w л/мин — пятая.

По условию задачи имеем

$$\begin{cases} 40x = V, \\ 10(y + z + t) = V, \\ 20(y + z + w) = V, \\ 30(t + w) = V \end{cases}$$

(первое уравнение этой системы говорит, что первая труба наполняет резервуар за 40 минут, вторая, третья и четвертая — за 10 минут, и т.д.).

Нужно найти величину $\frac{V}{x+y+z+t+w}$. Для этого перепишем нашу систему в виде

$$\begin{cases} x = \frac{V}{40}, \\ y + z + t = \frac{V}{10}, \\ y + z + w = \frac{V}{20}, \\ t + w = \frac{V}{30} \end{cases}$$

и воспользуемся методом неопределенных коэффициентов (см. урок 11) для нахождения величины $x + y + z + t + w$:

$$\begin{aligned} x + y + z + t + w &= \alpha x + \beta(y + z + t) + \gamma(y + z + w) + \delta(t + w) = \\ &= \alpha x + (\beta + \gamma)y + (\beta + \gamma)z + (\beta + \delta)t + (\gamma + \delta)w, \end{aligned}$$

откуда $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = \delta = \frac{1}{2}$ и

$$\begin{aligned} x + y + z + t + w &= x + \frac{1}{2}(y + z + t) + \frac{1}{2}(y + z + w) + \frac{1}{2}(t + w) = \\ &= \frac{V}{40} + \frac{V}{20} + \frac{V}{40} + \frac{V}{60} = \frac{7}{60}V, \end{aligned}$$

откуда $\frac{V}{x+y+z+t+w} = \frac{60}{7}$.

Ответ: за 60/7 минут. ◀

- **Задача 3.** Несколько рабочих выполняют работу за 14 дней. Если бы их было на 4 человека больше и каждый работал в день на 1 час дольше, то та же работа была бы сделана за 10 дней. Если бы их было еще на 6 человек больше и каждый бы работал еще на 1 час в день больше, то эта работа была бы сделана за 7 дней. Сколько было рабочих и сколько часов в день они работали?

Решение. Пусть w — число рабочих, x — число часов их работы в день. Введем единицу работы равную всей работе и пусть y — производительность (в час) каждого рабочего.

Тогда один рабочий за x часов (т.е. в день) выполняет xy единиц работы, а w рабочих за 14 дней выполняют $14wx$ единиц работы. Согласно условию $\boxed{14wx = 1}$.

Аналогично если рабочих стало $w + 4$ и они работают каждый день $x + 1$ час, то $\boxed{10(w + 4)(x + 1)y = 1}$.

Для случая, когда рабочих еще на 6 больше (т.е. $w + 10$) и они работают еще на час дольше (т.е. $x + 2$ часа) каждый день, получаем уравнение

$$7(w + 10)(x + 2)y = 1.$$

Из системы

$$\begin{cases} 14wxy = 1, \\ 10(w + 4)(x + 1)y = 1, \\ 7(w + 10)(x + 2)y = 1 \end{cases}$$

надо найти w и x .

Приравняв правые части первого и второго, а также первого и третьего уравнений и упростив, получим систему

$$\begin{cases} wx = 10x + 20 + 2w, \\ 2wx = 20x + 20 + 5w. \end{cases}$$

Если вычесть из второго уравнения удвоенное первое, то x исчезнет и найдем, что $w = 20$. Отсюда легко получается, что $x = 6$.

Ответ: всего было 20 рабочих; они работали 6 часов в день. ◀

- **Задача 4.** Три бригады, работая вместе, должны выполнить некоторую работу. Первая и вторая бригады вместе могут выполнить ее на 36 мин быстрее, чем одна третья. За то время, за которое могут выполнить эту работу первая и третья бригады, вторая может выполнить половину работы. За то время, что работу выполняют вторая и третья бригады, первая выполнит $2/7$ работы. За какое время все три бригады выполнят эту работу?

Решение. Введем единицу работы, равную всей работе. Пусть x часть работы, которую может выплнить за 1 час первая бригада, y — вторая и z — третья.

Производительность первой и второй бригад, работающих вместе, равна $x + y$. Значит, они выполняют всю работу за $\frac{1}{x+y}$ часов. Одна третья бригада выполнит работу за $\frac{1}{z}$ часов. По условию имеем уравнение

$$\frac{1}{x+y} + \frac{3}{5} = \frac{1}{z}.$$

Если мы приравняем время выполнения всей работы первой и третьей бригадами и время выполнения половины работы второй бригадой, получим уравнение

$$\frac{1}{x+z} = \frac{1}{2y}.$$

Если мы приравняем время, за которое всю работу выполняют вторая и третья бригады к времени выполнения $2/7$ от всей работы первой бригадой, получим последнее уравнение

$$\frac{1}{y+z} = \frac{2}{7x}.$$

Второе и третье уравнения эквивалентным образом можно переписать в виде

$$\begin{cases} 2y - x + z, \\ 2y + 2z = 7x \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1, 5x, \\ z = 2x. \end{cases}$$

Подставляя y и z в первое уравнение, найдем, что $x = \frac{1}{6}$, $y = \frac{1}{4}$, $z = \frac{1}{3}$. Следовательно, $x + y + z = \frac{3}{4}$. Теперь легко найти величину $1/(x + y + z)$, которую требуется отыскать по условию задачи.

Ответ: все три бригады выполняют эту работу за $\frac{4}{3}$ часа, или, что то же самое, за 1 час 20 минут. ◀

- **Задача 5** [2]. На фабрике несколько одинаковых поточных линий вместе выпускали в день 15000 банок консервов. После реконструкции все поточные линии заменили на более производительные, а их количество увеличилось на 5. Фабрика стала выпускать 33792 банки в день. Сколько вначале было линий?

Решение. Пусть m — первоначальное количество поточных линий, k банок в день — производительность старой линии, l банок в день — производительность новой линии.

По условию задачи имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} mk = 15000, \\ (m + 5)l = 33792, \\ l > k, \end{cases}$$

из которой надо найти m .

Ясно, что не учитывая того, что по смыслу задачи все неизвестные есть натуральные числа, найти m невозможно, вернее, таких m будет бесконечно много.

Разложим правые части на множители: $15000 = 2^3 \cdot 5^4 \cdot 3$, $33792 = 2^{10} \cdot 3 \cdot 11$. Ясно, что искомое m есть один из делителей числа 15000, т.е. само может делиться лишь на 2, 3 и 5. Заметим сперва, что m не делится на 5, так как в противном случае $m + 5$ тоже делится на 5 и, тем самым, число 33792, которое делится на $m + 5$, делилось бы на 5, что неверно. Ну а делители числа 15000, не делящиеся на 5, уже легко исследовать перебором. Это числа 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24.

Пусть $m = 1$. Тогда $k = 15000$, $m + 5 = 6$, $l = 33792 : 6 = 5632 < k$ — противоречие.

Пусть $m = 2$. Тогда $m + 5 = 7$, но 33792 не делится на 7 — противоречие.

Пусть $m = 4$. Тогда $m + 5 = 9$, но 33792 не делится на 9 — противоречие.

Пусть $m = 8$. Тогда $m + 5 = 13$, но 33792 не делится на 13 — противоречие.

Пусть $m = 3$. Тогда $m + 5 = 8$, $k = 5000$, $l = 33792 : 8 = 4224 < k$ — противоречие.

Пусть $m = 6$. Тогда $k = 2500$, $m + 5 = 11$, $l = 33792 : 11 = 3072 > k$ — годится.

Пусть $m = 12$. Тогда $m + 5 = 17$, но 33792 не делится на 17 — противоречие.

Пусть $m = 24$. Тогда $m + 5 = 29$, но 33792 не делится на 29 — противоречие.

Итак, мы перебрали все возможные случаи и подходит только $m = 6$.

Ответ: вначале было 6 поточных линий. ◀

- **Задача 6.** Автоматическая линия выпускает за 600 операций три партии шин для легковых автомобилей и 11 партий шин для грузовых автомобилей. Если бы эта автоматическая линия изготавливала только шины для грузовых автомобилей и изготовила столько партий таких шин, сколько операций она тратит на изготовление партии шин для легковых автомобилей, то этой линии потребовалось бы не менее 2727 операций. Сколько операций требуется ей для изготовления одной партии шин для грузовых автомобилей?

Решение. Пусть линия тратит x операций на изготовление одной партии шин для легковых автомобилей и y операций для изготовления одной партии шин для грузовых автомобилей.

На три партии легковых шин требуется $3x$ операций, а на 11 партий грузовых шин — $11y$ операций. По условию имеем $3x + 11y = 600$.

Если нужно изготовить x партий грузовых шин, то потребуется xy операций. По условию $xy \geq 2727$.

Из системы

$$\begin{cases} 3x + 11y = 600, \\ xy \geq 2727 \end{cases}$$

требуется найти y .

Это опять-таки невозможно, если не принять во внимание, что x и y — натуральные числа.

Из первого уравнения $x = 200 - \frac{11}{3}y$. Подставим x во второе неравенство. Получим

$$200y - \frac{11}{3}y^2 \geq 2727 \iff 11y^2 - 600y + 8181 \leq 0 \iff 27 \leq y \leq 27\frac{6}{11}$$

. Значит, $y = 27$.

Ответ: 27 операций. ◀

Наш урок окончен. Оценка выставляется стандартным образом.

Домашнее задание

- 1. Совхоз располагает тракторами четырех марок: А, Б, В и Г. Бригада из четырех тракторов (двух тракторов марки Б и по одному марок В и Г) производит вспашку поля за два дня. Бригада из двух тракторов марки А и одного трактора марки В тратит на эту работу три дня, а три трактора марок А, Б и В — четыре дня. За какое время выполнит работу бригада, составленная из четырех тракторов различных марок?
- 2. Бак водокачки наполняется водой с помощью нескольких насосов. Сначала включили три насоса одинаковой производительности; через 2,5 часа после начала их работы подключили еще два насоса другой, но также одинаковой производительности. В результате через 1 час после подключения насосов воды в баке до полного объема не хватало 15 м^3 , а еще через час бак был полон. Один из двух насосов, подключенных во вторую очередь, мог бы наполнить бак за 40 часов. Найти объем бака.
- 3. Емкость бака А на 900 л меньше емкости бака В. Первый насос подключают к пустому баку А, и он начинает наполнять бак водой. Когда бак наполнится наполовину, включают второй насос, который выкачивает воду из бака. В результате бак А оказывается полным через 40 минут после включения первого насоса. Затем то же самое проделывают с баком В (к пустому баку В подключают первый насос и после того, как он наполнит бак наполовину, включают второй насос), и бак В оказывается наполненным через 52 минуты после того, как к нему подключили первый насос. Найти емкость бака А и производительность каждого из насосов, если известно, что один второй насос выкачивает всю воду из полного бака А за 30 минут.
- 4. Первая и вторая бригада одновременно начали выполнять некоторую работу. Более чем через час после начала работы первую бригаду сменила третья, которая вместе со второй работала до завершения всей работы. На выполнение работы ушло 5,5 часов. Первая бригада за все время, пока она работала, сделала столько, сколько третья делает за час. Если бы первая бригада проработала на 6 часов больше, чем это было на самом деле, она сделала бы столько же, сколько было сделано второй бригадой. Если бы три бригады все время работали вместе, работа была бы выполнена в полтора раза быстрее, чем в действительности. Сколько времени работала первая бригада?
- 5. Насос наполнял бак водой с постоянной производительностью. После того как бак был наполнен, первый насос отключили, и второй насос стал выкачивать из него воду также с постоянной производительностью.

Время, прошедшее с начала работы первого насоса до момента, когда второй насос полностью опорожнил бак, в $4\frac{1}{12}$ раза превышает время, которое потребовалось бы этим насосам, чтобы наполнить бак, если бы они оба накачивали его с той же производительностью, что и ранее. Суммарная производительность насосов составляет 35 л/мин, причем производительность второго выше производительности первого. Найти производительность каждого насоса.

- 6. Для вспашки трех совершенно одинаковых полей выделены три трактора различной производительности. Каждое поле вспахивается одним трактором. Первый трактор начал работу на $\frac{1}{2}$ часа раньше второго, а третий — на $\frac{1}{3}$ часа позже второго. Вспашка полей велась тракторами равномерно и без остановок. Через некоторое время после начала работы третьего трактора оказалось, что к этому моменту каждый из тракторов выполнил одинаковую часть запланированной работы. Через сколько минут после завершения работы второго трактора закончил работу первый, если третий выполнил всю работу на 12 минут раньше, чем второй?
- 7. Три тракторные бригады вместе вспахивают поле за 4 дня. Это же поле первая и вторая бригады вместе вспахивают за 6 дней, а первая и третья вместе — за 8 дней. Во сколько раз больше площадь, вспахиваемая за день второй бригадой, по сравнению с площадью, вспахиваемой за день третьей бригадой?
- 8. Две бригады землекопов вырыли по одинаковому котловану. Вторая бригада работала на полчаса дольше первой. Если бы в первой бригаде было на 5 человек больше, то она могла бы закончить работу на 2 часа раньше. Определить число землекопов в каждой бригаде, если производительность у всех одинакова.
- 9 [2]. За время t первый рабочий сделал на 3 детали больше второго. Затем второй рабочий увеличил производительность труда на 0,2 детали в минуту и через некоторое целое число минут догнал и обогнал первого, работавшего с постоянной производительностью, на 2 детали. Найти наибольшее возможное время t .
- 10 [2]. Четыре цеха изготавливают детали прессованием. В двух из них установлены прессы нового типа, а в двух — старого. Всего прессов каждого типа имеется не менее 5. Количество прессов во всех цехах одинаково. Изготовление 400 деталей на новом прессе занимает на 3 часа меньше времени, чем 420 деталей на старом.
На новых прессах изготовили по 200 деталей, на старых — по 300. Если сложить время работы всех прессов, то окажется, что за получившееся суммарное время цех, оборудованный тремя новыми и двумя старыми прессами, работающими одновременно, может изготовить 17640 деталей.

Найти производительность каждого пресса.

- 11. Соревнуются три бригады лесорубов. Первая и третья бригады обрабатывали древесины в два раза больше, чем вторая, а вторая и третья — в три раза больше, чем первая. Какая бригада победила в этом соревновании?
- 12 [2]. Три машины производят некоторую работу. Если эту работу будет выполнять одна первая, то она окончит ее на a дней позже, чем при работе всех машин вместе. Если же эту работу будет выполнять вторая, то она окончит ее на b дней позже, чем все три вместе, а если третья, то ей потребуется в c раз больше времени, чем всем машинам вместе. За сколько дней выполняет работу каждая из них в отдельности? Какие числовые значения может принимать c ?
- 13. Каждый из рабочих должен был изготовить 36 одинаковых деталей. Первый рабочий приступил к выполнению своего задания на 4 минуты позже второго, но $1/3$ задания они выполнили одновременно. Полностью выполнив свое задание, первый рабочий после двухминутного перерыва снова приступил к работе и к моменту выполнения задания вторым рабочим изготовил еще две детали. Сколько деталей в час изготавливал каждый рабочий?
- 14. Мастер, работая вместе с учеником, помог выполнить часть задания, а затем прекратил свою работу. Оставшуюся часть задания ученик закончил один. В результате время, затраченное на выполнение задания, оказалось в три раза меньше времени, необходимого ученику для выполнения этого задания им одним. Во сколько раз мастер затратил бы больше времени, выполняя один все задание по сравнению с тем временем, которое он затратил на помощь ученику?
- 15. В бассейн проведены три трубы. Первая наливает 30 м^3 в час. Вторая труба наливает в час на $2d \text{ м}^3$ меньше, чем первая ($0 < d < 15$), а третья труба наливает в час на $11d \text{ м}^3$ больше, чем первая. Сначала первая и вторая трубы, работая вместе, наливают $2/11$ бассейна, а затем все три трубы, работая вместе, наливают оставшиеся $9/11$. При каком значении d бассейн быстрее всего наполнится указанным способом?
- 16. Двое рабочих вместе выполняют за час $3/4$ всей работы. Если первый рабочий выполнит $1/4$ всей работы, а второй, сменив его, выполнит $1/2$ всей работы, то вместе они проработают 2,5 часа. За сколько часов каждый рабочий может выполнить всю работу, если за 1 час работы первого рабочего и за 0,5 часа работы второго рабочего будет выполнено больше половины работы?

Урок 15

Смеси

В задачах на смеси, растворы и сплавы в качестве неизвестных удобно выбирать либо весь вес (или объем) вещества, которое нас интересует в смеси, либо его концентрацию, т.е. вес (или объем) данного вещества в единице веса (или объема) смеси. Требования к здравому смыслу при решении этих задач особенно высоки. Если вы исследуете смесь, держите в памяти две ее характеристики: общее количество данного вещества в смеси и количество данного вещества в 1 кг (или 1 л) смеси. Приведу пример простейшего рассуждения, часто возникающего в задачах на смеси.

Пример. Пусть 17 литров раствора содержат 6 литров спирта. Сколько спирта содержится в 9 литрах раствора?

Решение. В 17 литрах раствора — 6 литров спирта. Следовательно, в 1 литре раствора — $\frac{6}{17}$ литров спирта. Значит, в 9 литрах раствора — $9 \cdot \frac{6}{17} = \frac{54}{17}$ литра спирта.

Опыт показывает, что школьники не очень хорошо владеют процентами. Поэтому советую вам избегать работы с ними. От процентов вещества в данной смеси всегда можно перейти либо к его абсолютному количеству, либо к концентрации.

- **Задача 1.** Два одинаковых сосуда наполнены спиртом. Из первого сосуда отлили p литров спирта и налили в него столько же воды. Затем из полученной смеси воды со спиртом отлили p литров и налили столько же литров воды. Из второго сосуда отлили $2p$ литров спирта и налили столько же воды. Затем из полученной смеси отлили $2p$ литров и налили столько же воды. Определить, какую часть объема сосуда составляют p литров, если крепость окончательной смеси в первом сосуде в $25/16$ раза больше крепости окончательной смеси во втором.

Решение. Пусть V л — объем каждого из сосудов. Запротоколируем утечку спирта из первого сосуда на каждом из этапов.

1) Было V литров спирта, отлили p л — осталось $V - p$ литров спирта в V литрах раствора (не забудьте, что чтобы скрыть кражу, вместо отлитого спирта долили столько же воды!).

2) Было $V - p$ л спирта в V л раствора. Отлили снова p литров, но уже не спирта, а раствора. Мы должны выяснить, сколько чистого спирта

украли во второй раз. Для этого надо вычислить, сколько литров спирта содержится в p литрах раствора.

В V л раствора — $V - p$ л спирта.

В 1 л раствора — $\frac{V-p}{V}$ л спирта.

В p л раствора — $p \cdot \frac{V-p}{V}$ л спирта.

Итак, на втором этапе «ушло» $p \cdot \frac{V-p}{V}$ л спирта. Значит, в сосуде осталось $V - p - p \cdot \frac{V-p}{V}$ л спирта.

Поскольку операции со вторым сосудом были идентичны операциям с первым с заменой p на $2p$, можно утверждать, что после двух отливаний в сосуде осталось $V - 2p - 2p \cdot \frac{V-2p}{V}$ л спирта.

Крепость смеси есть просто концентрация спирта в ней, т.е. отношение объема спирта в смеси к объему всей смеси. Отсюда получаем уравнение

$$\frac{1}{V} \cdot \left(V - p - p \cdot \frac{V-p}{V} \right) = \frac{25}{16} \cdot \frac{1}{V} \cdot \left(V - 2p - 2p \cdot \frac{V-2p}{V} \right),$$

из которого надо найти $\frac{p}{V}$. Сократим на $\frac{1}{V}$ слева и справа и вынесем за скобки слева $V - p$, а справа $V - 2p$:

$$\begin{aligned} (V-p) \left(1 - \frac{p}{V} \right) &= \frac{25}{16} \cdot (V-2p) \left(1 - \frac{2p}{V} \right) \iff \\ (V-p) \cdot \frac{V-p}{V} &= \frac{25}{16} \cdot (V-2p) \cdot \frac{V-2p}{V} \iff \frac{(V-p)^2}{V} = \frac{25(V-2p)^2}{16V} \iff \\ (V-p)^2 &= \frac{25}{16} (V-2p)^2 \iff V-p = \frac{5}{4} (V-2p) \iff V = 6p. \end{aligned}$$

Значит, $\frac{p}{V} = \frac{1}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{6}$ ◀

- **Задача 2.** Из двух жидкостей, удельный вес которых 2 г/см^3 и 3 г/см^3 соответственно, составлена смесь. При этом 4 см^3 смеси весят в 10 раз меньше, чем вся первая жидкость, а 50 см^3 смеси весят столько же, сколько вся вторая жидкость, входящая в эту смесь. Сколько граммов взято каждой жидкости и каков удельный вес смеси?

Решение. Пусть взято x г первой жидкости и y г второй. Тогда их смесь весит $x + y$ граммов. Объем смеси складывается из объема, который занимают x г первой жидкости и y г второй.

Объем двух граммов первой жидкости — 1 см^3 (по определению удельного веса);

Объем одного грамма первой жидкости — $1/2 \text{ см}^3$;

Объем x граммов первой жидкости — $x \cdot \frac{1}{2} \text{ см}^3$.

Аналогично y г второй жидкости занимают объем $\frac{y}{3}$.

Следовательно, вся смесь занимает объем $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \text{ см}^3$.

Найдем, сколько весят 4 см^3 смеси:

$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \text{ см}^3$ смеси весят $x + y$ г;

1 см^3 смеси весит $\frac{x+y}{x/2+y/3}$ г;

4 см^3 смеси весят $4 \cdot \frac{x+y}{x/2+y/3}$ г;

50 см^3 смеси весят $50 \cdot \frac{x+y}{x/2+y/3}$ г.

Теперь мы уже можем написать оба уравнения нашей системы:

$$\begin{cases} 4 \frac{x+y}{x/2+y/3} = \frac{x}{10}, \\ 50 \frac{x+y}{x/2+y/3} = y. \end{cases}$$

Решение ее не представляет труда — надо поделить первое уравнение на второе (т.е. левую часть на левую, а правую — на правую). Получим, что $x = \frac{4}{5}y$. Подставив это x в любое из уравнений, найдем, что $x = \frac{1080}{11}$, $y = \frac{1350}{11}$.

Наконец, вспомним, что удельный вес смеси есть вес 1 см^3 смеси, а эта величина у нас уже вычислена и равна $\frac{x+y}{x/2+y/3}$ г.

Ответ: $\frac{1080}{11}$ г, $\frac{1350}{11}$ г, $\frac{27}{11} \text{ г/см}^3$. ◀

- **Задача 3** [2]. Имеются три смеси, составленные из трех элементов A , B , C . В первую смесь входят только A и B в весовом отношении 3:5, во вторую — только B и C в весовом отношении 1:2, а в третью — только A и C в отношении 2:3. В каком отношении нужно взять эти смеси, чтобы во вновь полученной смеси элементы A , B , C были в отношении 3:5:2?

Решение. Напомню вам на всякий случай, что означает «в таком-то весовом отношении». Например, если есть P граммов смеси, куда вещества A и B входят в отношении 3:5, это означает, что если в смеси a г вещества A и b г вещества B , то $a + b = P$ и $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$.

Аналогично если есть Q граммов смеси, куда вещества A, B, C входят в отношении 3:5:2, и a, b, c есть их соответственные веса, то $a + b + c = Q$ и $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}, \frac{b}{c} = \frac{5}{2}$.

Пусть нужно взять x г первой смеси, y г второй и z г третьей.

Пусть a г — количество вещества A в x г первой смеси, а b г — количество вещества B в тех же x граммах. По условию задачи имеем $a + b = x$ и $a/b = 3/5$, откуда $a = \frac{3}{8}x, b = \frac{5}{8}x$.

Аналогичным образом найдем, что в y граммах второй смеси присутствуют $y/3$ граммов вещества B и $\frac{2}{3}y$ граммов вещества C . И, наконец, в z граммах третьей смеси присутствуют $\frac{2}{5}z$ граммов вещества A и $\frac{3}{5}z$ граммов вещества C .

Всего вещества A в полученной смеси из трех смесей будет $\frac{3}{8}x + \frac{2}{5}z$ граммов.

Вещества B там же будет $\frac{5}{8}x + \frac{1}{3}y$ граммов, а вещества C — $\frac{2}{3}y + \frac{3}{5}z$ граммов.

Запишем тот факт, что вещества A, B, C относятся как 3:5:2.

$$\begin{cases} \frac{\frac{3}{8}x + \frac{2}{5}z}{\frac{5}{8}x + \frac{1}{3}y} = \frac{3}{5}, \\ \frac{\frac{5}{8}x + \frac{1}{3}y}{\frac{2}{3}y + \frac{3}{5}z} = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Эта система эквивалентна линейной, так что из нее легко находится, что $y = 2z, x = \frac{20}{3}z$. Отсюда $x : y = \frac{20}{3} : 2, y : z = 2 : 1$, так что наше отношение можно записать в виде $\frac{20}{3} : 2 : 1$, или, что то же самое, 20:6:3.

Ответ: эти смеси надо взять в отношении 20:6:3. ◀

► **Задача 4.** Имеются два сплава из цинка, меди и олова. Первый содержит 25% цинка, второй — 50% меди. Процентное содержание олова в первом сплаве в два раза больше, чем во втором. Сплавив 200 кг первого и 300 кг второго, получили сплав, где 28% олова. Сколько кг меди в этом новом сплаве?

Решение. Пусть в одном килограмме первого сплава x кг олова. По условию в этом же килограмме первого сплава 25% цинка, т.е. 0,25 кг цинка. Все, что в этом килограмме осталось кроме цинка и олова, — это медь. Ее будет $1 - 0,25 - x = 0,75 - x$ кг.

В одном килограмме второго сплава 0,5 кг меди. По условию процентное содержание олова во втором сплаве в два раза меньше, чем в первом. Значит, и в одном килограмме второго сплава олова в два раза меньше, чем в одном килограмме первого, т.е. $\frac{1}{2}x$ кг.

Следовательно, в 200 кг первого сплава олова будет $200x$, а в 300 кг второго сплава — $300 \cdot \frac{x}{2} = 150x$ кг. Тем самым, после того, как сплавляли эти 200 кг первого и 300 кг второго сплава, олова в итоговом сплаве будет $200x + 150x = 350x$ кг. В условии сказано, что в 500 кг итогового сплава имеется 28% олова. Это составляет 140 кг.

Значит, $350x = 140 \iff x = 0,4$. Поэтому в одном кг первого сплава меди будет $0,75 - x = 0,75 - 0,4 = 0,35$ кг. Отсюда получаем, что в итоговом сплаве меди будет $200 \cdot 0,35 + 300 \cdot 0,5 = 220$ кг.

Ответ: 220 кг. ◀

► **Задача 5.** В лаборатории есть раствор соли четырех различных концентраций. Если смешать первый, второй и третий растворы в весовом отношении 3:2:1, то получится 15%-ный раствор. Второй, третий и четвертый растворы в равной пропорции дают при смешении 24%-ный раствор, и, наконец, раствор, составленный из равных частей первого и третьего, имеет концентрацию 10%. Какая концентрация будет при смешении второго и четвертого растворов в пропорции 2:1?

Решение. Пусть в 1 кг первого раствора содержится x кг соли; второго раствора — y кг соли; третьего раствора — z кг соли; четвертого раствора — t кг соли.

В условии говорится, что если мы смешаем 3 кг первого раствора, 2 кг второго и 1 кг третьего, то в получившихся 6 кг раствора будет $0,15 \cdot 6 = 0,9$ кг соли. Но в трех кг первого раствора имеется $3x$ кг соли, в двух кг второго раствора ее $2y$ кг и в одном кг третьего — z кг. Отсюда получаем первое уравнение:

$$3x + 2y + z = 0,9.$$

Совершенно так же рассуждая, получим, что $y + z + t = 0,72$ и $x + z = 0,2$.

Из найденных трех уравнений с применением метода неопределенных коэффициентов (см. урок 11) найдем, что

$$2y + t = \frac{1}{2}(3x + 2y + z) + (y + z + t) - \frac{3}{2}(x + z) = 0,5 \cdot 0,9 + 0,72 - 1,5 \cdot 0,2 = 0,87.$$

Значит, если смешать 2кг второго раствора и 1 кг четвертого, то в получившихся 3 кг смеси будет 0,87 кг соли, что составляет 29%, что и требовалось найти.

Ответ: 29%. ◀

- **Задача 6.** Даны два сплава. Первый весит 4 кг и содержит 70% серебра. Второй весит 3 кг и содержит 90% серебра. Сколько кг второго сплава надо сплавить со всем первым сплавом, чтобы получить $r\%$ -ный сплав серебра? При каких r задача имеет решение?

Решение. В первом сплаве 2,8 кг серебра. Пусть надо взять x кг второго сплава, чтобы, сплавив его со всем первым сплавом, получить такой сплав, как требуется. Весь сплав будет весить $x + 4$ кг. Серебра в нем будет $2,8 + 0,9x$ кг. По условию

$$\frac{2,8 + 0,9x}{x + 4} = \frac{r}{100},$$

откуда легко находим, что $x = \frac{4r - 280}{90 - r}$.

Задача имеет решение тогда и только тогда, когда $0 \leq x \leq 3$ (только в таких пределах можно что-либо взять из куска весом в 3 кг). Эти неравенства решаются просто. Они равносильны $70 \leq r \leq 80$.

Ответ: $x = \frac{4r - 280}{90 - r}$. Задача имеет решение при $70 \leq r \leq 80$. ◀

Наш урок окончен. Оценка выставляется стандартно.

Домашнее задание

- 1. От двух однородных кусков сплава с различным процентным содержанием меди, весящих соответственно m и n кг, отрезано по куску равного веса. Каждый из отрезанных кусков был сплавлен с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в получившихся сплавах стало одинаковым.
- Сколько весил каждый из отрезанных кусков?
- 2 [3]. В сосуд с чистой водой налили 6 литров 64%-ного (по объему) раствора спирта, а затем после полного перемешивания вылили равное количество (т.е. 6 литров) получившегося раствора. Сколько воды было первоначально в сосуде, если после троекратного повторения этой операции в сосуде получился 37%-ный раствор спирта?
- 3. В баке находится 100 литров смеси кислоты с водой. Из бака отлили часть смеси и добавили равное по объему количество воды, которое на 10 литров превышает первоначальное количество кислоты в смеси. Затем снова отлили такое же количество смеси, как в первый раз, в результате чего количество кислоты в баке уменьшилось в четыре раза по сравнению с количеством ее в исходной смеси. Определить количество воды в исходной смеси.
- 4 [3]. В двух различных емкостях содержались смеси воды и песка, причем в первой емкости было 1000 кг смеси, а во второй — 1960 кг. В обе емкости добавили воды. При этом процентное содержание песка в смесях

уменьшилось в k раз в первой емкости и в l раз во второй. О числах k и l известно только, что $kl = 9 - k$. Найти наименьшее количество воды, которое могло быть долито в обе емкости вместе.

- 5. Свежие фрукты содержат 72% воды, а сухие — 20%. Сколько сухих фруктов получится из 20 кг свежих фруктов?
- 6. Имеются два слитка золота с серебром. Процентное содержание золота в первом слитке в два с половиной раза больше, чем процентное содержание золота во втором слитке. Если сплавить оба слитка вместе, то получится слиток, в котором будет 40% золота. Найти, во сколько раз первый слиток тяжелее второго, если известно, что при сплавке равных по весу частей первого и второго слитков получается сплав, в котором 35% золота.
- 7. Имеются два раствора серной кислоты в воде, первый — 40%-ный, второй — 60%-ный. Эти два раствора смешали, после чего добавили 5 кг чистой воды и получили 20%-ный раствор. Если бы вместо 5 кг чистой воды добавили 5 кг 80%-ного раствора, то получился бы 70%-ный раствор. Сколько было 40%-ного и 60%-ного растворов?
- 8. Сплавляя два одинаковых по весу куска чугуна с разным содержанием хрома, получили сплав, в котором 12 кг хрома. Если бы первый кусок был в два раза тяжелее, то в сплаве содержалось бы 16 кг хрома. Известно, что содержание хрома в первом куске на 5% меньше, чем во втором. Найти процентное содержание хрома в каждом из кусков.
- 9. Для приготовления смеси из двух жидкостей A и B было взято 16 литров жидкости A и разлито в два сосуда объемом по 16 литров каждый. Затем первый сосуд был долит доверху жидкостью B и произведено перемешивание. Полученной смесью был дополнен доверху второй сосуд. Если отлить из второго сосуда в первый 8 литров получившейся смеси, то в первом сосуде будет жидкости A на три литра больше, чем во втором. Сколько всего использовано жидкости B для приготовления смеси?
- 10. Имеются два бака. Первый наполнен чистым глицерином, второй — водой. Взяли два трехлитровых ковша, зачерпнули первым полным ковшом глицерин из первого бака, а вторым полным ковшом зачерпнули воду из второго бака. После этого содержимое первого ковша влили во второй бак, а содержимое второго ковша — в первый. После перемешивания эту процедуру повторили. В результате половину объема первого бака занял чистый глицерин. Найти объемы баков, если известно, что их суммарный объем в 10 раз больше объема первого бака.
- 11. Имеются два сплава, состоящих из цинка, меди и олова. Первый сплав содержит 40% олова, второй — 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось

30% цинка. Сколько кг олова в новом сплаве?

- 12 [2]. Имеются три сплава. Первый сплав содержит 60% алюминия, 15% меди и 25% магния; второй — 30% меди и 70% магния; третий — 45% алюминия и 55% магния. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 20% меди. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание алюминия может быть в этом новом сплаве?
- 13. Имеются два раствора одной и той же соли в воде. Для получения смеси, содержащей 10 г соли и 90 г воды, берут первого раствора по весу вдвое больше, чем второго. Через неделю из каждого килограмма первого и второго растворов испарилось по 200 г воды, и для получения такой же смеси, как и раньше, требуется первого раствора уже вчетверо больше по весу, чем второго. Сколько г соли содержалось первоначально в 100 г каждого раствора?
- 14. Имеются два слитка сплавов меди и олова. Первый весит 3 кг и содержит 40% меди, второй весит 7 кг и содержит 30% меди. Какого веса нужно взять куски этих слитков, чтобы после их переплавки получить 8 кг сплава, содержащего $r\%$ меди? При каких r задача имеет решение?
- 15. Имеются три слитка золота с серебром. Известно, что количество золота в 2 г сплава из третьего слитка то же самое, что во взятых вместе 1 г сплава из первого слитка и 1 г сплава из второго слитка. Вес третьего слитка равен суммарному весу части первого слитка, содержащей 10 г золота и части второго слитка, содержащей 80 г золота. Третий слиток в четыре раза тяжелее первого и содержит 75 г золота. Сколько золота содержит первый слиток?
- 16 [2]. Даны две смеси, состоящие из одних и тех же веществ А, Б, В, но взятых в различных весовых соотношениях. В первой смеси вещества А в два раза меньше, чем вещества Б, и в три раза меньше, чем вещества В. Во второй смеси вещества Б в три раза меньше, чем вещества А, и в два раза меньше, чем вещества В. Сколько следует взять каждой смеси и сколько добавить вещества Б, чтобы получить 7 кг новой смеси, в которой вещества А в три раза меньше, чем вещества Б и в два раза меньше, чем вещества В?
- 17. Есть два слитка — сплавы цинка с медью. Вес первого — 2 кг, второго — 3 кг. Эти два слитка сплавляли вместе с 5 кг сплава цинка с медью, в котором цинка было 45%, и получили сплав, в котором цинка стало 50%. Если бы процентное содержание цинка в первом слитке было равно процентному содержанию цинка во втором, а процентное содержание цинка во втором было такое же, как в первом (т.е. их процентные содержания поменялись), то сплавив эти два слитка с 5 кг сплава, в котором содержится 60% цинка, получили бы сплав, в котором цинка содержится 55%. Найти процентное содержание цинка

в первом и во втором слитках.

- 18. В пустой резервуар по двум трубам одновременно начинают поступать чистая вода и раствор кислоты постоянной концентрации. После наполнения резервуара в нем получился 5% раствор кислоты. Если бы в тот момент, когда резервуар был наполнен наполовину, подачу воды прекратили, то после наполнения резервуара получили бы 10%-ный раствор кислоты. Определить, какая труба и во сколько раз подает раствор быстрее.
- 19. Две трубы, работая вместе, подают в бак 100 литров жидкости в минуту. Имеются два раствора кислоты — сильный и слабый. Если смешать по 10 литров каждого раствора и 20 л воды, то получится 40 литров 20%-ного раствора. Известно также, что если в течение часа подавать в первоначально пустой бак по первой трубе слабый раствор, а по второй — сильный, то получится 30%-ный раствор кислоты. Какой концентрации (в процентах) получится кислота, если в течение часа первоначально подавать в пустой бак по первой трубе сильный, а по второй трубе — слабый растворы? (Считать, что при смешивании воды и кислоты объем не меняется).

Урок 16 [3]

[экономические факультеты университетов]

Оптимальный выбор и целые числа

С задачами на целые числа мы уже встречались на предыдущем уроке. Отмечу здесь некоторые свойства целых чисел, которые часто применяются. Поступающие, как правило, знают их интуитивно, на уровне «все понимаю, но сам ничего сказать не могу». Видимо, вам будет достаточно запомнить, как формулируются эти свойства, для того, чтобы вы смогли их впоследствии применять. В вашей вступительной работе вы можете пользоваться всеми приводимыми ниже свойствами без доказательства. Однако вам полезно знать, что доказательства некоторых из них (например, 4 и 5) настолько сложны, что недоступны подавляющему большинству школьников.

1. Натуральное число n делится на (натуральное) число k , если и только если найдется такое натуральное l , что $n = kl$. В частности, число n четно, если и только если $n = 2l$ для некоторого натурального l , n делится на 3, если и только если $n = 3l$ для некоторого натурального l , и т.д.

2. Натуральное число n нечетно, если найдется натуральное l такое, что $n = 2l + 1$. Число n дает при делении на k остаток r , если и только если найдется такое натуральное l , что $n = lk + r$. В частности, число дает при делении на 3 остаток 1, если оно есть $3l + 1$ для некоторого натурального l , оно дает при делении на 4 остаток 3, если оно есть $4l + 3$ для некоторого l , и т.д.
3. Если $a_0, a_1, \dots, a_n$ — цифры (т.е. числа вида 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), то тот факт, что число записывается цифрами $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ (порядок именно такой, как у меня, а черта наверху ставится, чтобы отличить это число от произведения), означает, что это число равно $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$.
Например, число, состоящее из цифр x и y , равно $10x + y$, а число, состоящее из цифр x, y, z , равно $100x + 10y + z$.
4. Любое натуральное число единственным образом (с точностью до перестановок) разлагается на простые множители.
5. Если xy делится на z и x взаимно просто с z , то y делится на z . Например, если $7x$ делится на 3, то и x делится на 3.

Как решать задачи на оптимальный выбор, подробно пояснено на примерах задач 1–3.

- **Задача 1.** *Есть 2000 рублей на путевки в дома отдыха. Путевки есть на 15, 27 и 45 дней. Стоимость их 21 руб., 40 руб. и 60 руб. соответственно. Сколько и каких путевок надо купить, чтобы израсходовать все деньги и сделать число дней отдыха наибольшим?*

Решение. Пусть надо купить x путевок первого типа, y путевок второго типа и z путевок третьего типа.

По условию $21x + 40y + 60z = 2000$. Это единственное уравнение, которое мы можем составить. Кроме того, мы знаем, что x, y, z — натуральные числа и выражение $15x + 27y + 45z$ (равное общему числу дней отдыха) максимально.

Для того, чтобы справиться с этой задачей, выясним, какой тип путевок самый выгодный, т.е. где один рубль дает наибольшее число дней отдыха.

По путевкам первого типа 1 рубль дает $\frac{15}{21}$ дней отдыха, по путевкам второго типа — $\frac{27}{40}$, а по путевкам третьего типа — $\frac{45}{60}$ дней отдыха.

Сравнивая эти три дроби, выясняем, что путевки третьего типа самые выгодные, т.е. третья дробь больше каждой из остальных. Теперь мы имеем возможность получать ограничения на x и y . Делается это так: на 420 рублей можно купить либо 20 путевок первого типа, либо 7 путевок третьего типа. При этом число дней отдыха будет соответственно 300 и 315. Значит, при оптимальном выборе x, y, z будет выполнено неравенство $x < 20$. Действительно, если $x \geq 20$, то можно вместо двадцати путевок первого типа купить 7 путевок третьего. Тогда потраченная сумма будет

такая же, а число дней отдыха увеличится, т.е. выбор таких x, y, z , что $x \geq 20$, не оптимален.

Далее, на 120 рублей можно купить три путевки второго типа или две путевки третьего типа. При этом число дней отдыха будет соответственно 81 и 90. Рассуждая так же, как в предыдущем абзаце, заключаем, что $y < 3$.

Перепишем первое уравнение в виде $21x = 2000 - 40y - 60z = 10(200 - 4y - 6z)$. Отсюда видно, что $21x$ делится на 10 и, следовательно, x тоже делится на 10. Значит, x равно либо 0, либо 10, а y — одно из чисел 0, 1, 2.

Теперь перебор уже не представляет труда. Пусть $x = 0$. Тогда $40y + 60z = 2000 \iff 2y + 3z = 100$.

Если $y = 0$, то $3z = 100$, чего быть не может. Если $y = 1$, то $3z = 100 - 2 = 98$ и опять решений нет. Если $y = 2$, то $z = 32$.

Пусть $x = 10$. Тогда $40y + 60z = 2000 - 210 \iff 4y + 6z = 179$. Последнее уравнение целых решений не имеет, так как слева стоит четное (равное $2 \cdot (2y + 3z)$) число, а справа — нечетное. Впрочем, можно было бы в этом убедиться и перебором.

Значит, единственная возможность, которая у нас осталась, — это $x = 0, y = 2, z = 32$.

Кстати, если бы получились другие наборы чисел для x, y, z , то пришлось бы подсчитывать общее число дней отдыха для каждого и выбирать тот набор, где оно максимально.

Ответ: нужно купить две путевки второго типа и 32 третьего. ◀

- **Задача 2.** Завод должен переслать 1100 деталей в ящиках. Ящик первого типа вмещает 70 деталей, ящик второго типа — 40 деталей, ящик третьего типа — 25 деталей. Стоимость пересылки одного ящика первого типа составляет 20 рублей, второго типа — 10 рублей, третьего типа — 7 рублей. Недогрузка ящиков не допускается. Как переслать все детали, чтобы сумма, в которую это обойдется, была наименьшей?

Решение. Пусть оптимальный способ пересылки деталей требует x ящиков первого типа, y ящиков второго типа и z — третьего типа.

Тот факт, что все детали мы переслали в ящиках без недогрузки, дает уравнение $70x + 40y + 25z = 1100$. Кроме того, выражение $20x + 10y + 7z$ должно быть минимальным.

Найдем, какой тип ящиков самый выгодный. Пересылка одной детали в ящике первого типа стоит $\frac{2}{7}$ рубля, в ящике второго типа — $\frac{1}{4}$ рубля, и в ящике третьего типа — $\frac{7}{25}$ рубля. Отсюда видно, что ящики второго типа — самые выгодные, т.к. пересылка одной детали в них стоит дешевле всего.

Докажем, что $x < 4$. Действительно, если $x \geq 4$, то имеется не менее 280 деталей, отправленных в ящиках первого типа. Если мы те же 280 деталей отправим в семи ящиках второго типа, то на это будет потрачено

70 руб., тогда как отправка их в четырех ящиках первого типа стоит 80 руб. Значит, выбор x, y, z , для которых $x \geq 4$, не оптимален.

Точно так же (рассматривая отpravку 200 деталей) можно доказать, что $z < 8$. Кроме того, z четно, ибо $25z = 1100 - 70x - 40y = 2(550 - 35x - 20y)$. Следовательно, z может равняться одному из чисел 0, 2, 4, 6. Произведем необходимый перебор.

Пусть $z = 0$. Тогда $70x + 40y = 1100 \iff 7x + 4y = 110$. Ясно, что x должно быть четным, т.е. $x = 0, 2$. При этом $x = 0$ не годится, т.к. уравнение $4y = 110$ не имеет решений, а для $x = 2$ существует $y = 24$. Стоимость пересылки здесь — 280 рублей.

Пусть $z = 2$. Тогда $70x + 40y = 1100 - 50 \iff 7x + 4y = 105$. Здесь уже x не может быть четным, так как в противном случае левая часть была бы четна, в отличие от правой. Если $x = 1$, то $4y = 98$ — нет решений. Если $x = 3$, то годится $y = 21$. Оплата за пересылку в этом случае составит $60 + 210 + 14 = 284$ рубля. Значит, пока еще претендентом на оптимальность остается тройка $(2, 24, 0)$.

Пусть $z = 4$. Тогда $70x + 40y = 1100 - 100 \iff 7x + 4y = 100$. Отсюда заключаем, что x делится на 4, т.к. $7x = 4(25 - y)$. Значит, $x = 0, y = 25$. Стоимость пересылки в этом случае составит $250 + 28 = 278$ рублей и, тем самым, теперь тройка $(0, 25, 4)$ есть претендент на оптимальность.

Наконец, пусть $z = 6$. Тогда $70x + 40y = 1100 - 150 = 950 \iff 7x + 4y = 95$. Здесь опять x обязан быть нечетным. При $x = 1$ имеем $y = 22$, а стоимость пересылки составит $20 + 220 + 42 = 282$ — эта тройка не конкурент. При $x = 3$ имеем $4y = 74$ — нет решений.

Все возможные случаи разобраны.

Ответ: надо взять 25 ящиков второго типа и 4 ящика третьего типа. ◀

- **Задача 3.** Нужно перевезти по железной дороге 20 больших и 250 малых контейнеров. Один вагон вмещает 30 малых контейнеров, вес каждого из которых составляет 2 тонны. Большой контейнер занимает место 9 малых и весит 30 тонн. Грузоподъемность вагона — 80 тонн. Найти минимальное число вагонов, необходимое для перевозки всех контейнеров.

Решение. Разберемся сначала, как можно загрузить вагон. Ясно, что по весу уже три больших контейнера не войдут в вагон, поскольку вместе весят 90 тонн. Значит, есть три типа загрузки вагона: нуль больших контейнеров и ≤ 30 малых, один большой контейнер и ≤ 21 малых (по весу вошло бы 25 малых контейнеров, но в вагоне всего 30 мест и 9 из них уже занято большим контейнером), два больших контейнера и ≤ 10 малых.

Пусть загружено x вагонов по первому типу, y по второму и z по третьему. Тот факт, что перевезены 20 больших и 250 малых контейнеров, означает, что

$$\begin{cases} y + 2z \geq 20, \\ 30x + 21y + 10z \geq 250. \end{cases}$$

Умножив первое неравенство на 9 и сложив со вторым, получим, что

$$30x + 30y + 28z \geq 430 \Leftrightarrow 30(x + y + z) \geq 430 + 2z \geq 430 \Rightarrow x + y + z \geq \frac{430}{30} = 14\frac{1}{3}.$$

Из того, что $x + y + z$ — целое число, следует, что $x + y + z \geq 15$. Мы доказали, что число вагонов не может быть меньше 15. Но мы это делали наугад. А вдруг можно доказать, что это число не меньше 20, а мы просто не догадались, как это сделать? Здесь уже нужно повозиться, подыскивая хороший конкретный способ транспортировки. Легко проверить, что $x = 2$, $y = 6$, $z = 7$ годятся и дают в сумме ровно 15. Ввиду того, что доказано, что $x + y + z \geq 15$, получаем

Ответ: 15 вагонов. ◀

- **Задача 4.** Группу людей попытались построить в колонну по 8 человек в ряд, но один ряд оказался неполным. Когда ту же группу людей перестроили по 7 человек в ряд, то все ряды были полными, а число их увеличилось на 2. Если бы их построили по 5 человек в ряд, то рядов было бы еще на 7 больше, причем один ряд был бы неполным. Сколько всего было людей?

Решение. Пусть всего было m человек и их первоначально построили в k рядов по 8 человек в ряду. Значит, $k - 1$ рядов были полны, а k не полны. Отсюда получаем, что $8(k - 1) < m < 8k$. Все m человек составляют по условию $k + 2$ ряда по 7 человек в ряду. Следовательно, $7(k + 2) = m$. И, наконец, если бы рядов стало еще на 7 больше (т.е. $k + 9$) и в каждом было по 5 человек, то $k + 8$ рядов были бы полны, а $k + 9$ не полны. Отсюда получаем последнее неравенство: $5(k + 8) < m < 5(k + 9)$.

Подставим m , выраженное через k , в первое неравенство (вернее, даже в правую его часть). Получим $7k + 14 < 8k \Leftrightarrow k > 14$. Точно так же подставим m в правую часть последнего неравенства: $7k + 14 < 5k + 45 \Leftrightarrow 2k < 31 \Leftrightarrow k < 15,5$.

Итак, $14 < k < 15,5$. Вспоминая, что k — натуральное число, заключаем, что $k = 15$, $m = 119$.

Ответ: 119 человек. ◀

- **Задача 5.** Искомое число больше 400 и меньше 500. Найти его, если сумма его цифр равна 9 и оно равно $47/36$ числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке.

Решение. Все числа, лежащие между числами 400 и 500, начинаются с цифры 4. Пусть x и y — следующие две цифры искомого числа. Тогда по условию о сумме его цифр имеем $x + y + 4 = 9 \Leftrightarrow x + y = 5$. Искомое

число равно $400 + 10x + y$. Число с теми же цифрами в обратном порядке равно $100y + 10x + 4$. Согласно условию имеем

$$400 + 10x + y = \frac{47}{36}(100y + 10x + 4) \iff 5x + 212y = 646.$$

Решение системы $\begin{cases} x + y = 5 \\ 5x + 212y = 646 \end{cases}$ не вызывает никаких трудностей: $x = 2$, $y = 3$.

Ответ: это число равно 423. ◀

- **Задача 6.** Если искомое двузначное число увеличить на 46, то получится число, произведение цифр которого равно 6. Сумма его цифр равна 14. Найти все такие числа.

Решение. Пусть число состоит из цифр x и y . Тогда по условию $x + y = 14$. Из этого равенства следует, что обе цифры не меньше 5, ибо в противном случае одна из них была бы больше 9, чего не бывает. Значит, искомое число (которое, кстати, равно $10x + y$) не может быть меньше 55. Последнее означает, что после прибавления числа 46 результат будет более ста, т.е. у соответствующего числа будет три цифры, первая из которых — 1. Произведение оставшихся двух цифр равно 6. Для этого есть 4 возможности: $1 \cdot 6$, $2 \cdot 3$, $3 \cdot 2$, $6 \cdot 1$.

Числа 116 и 161 не годятся, т.к. $161 - 46 > 100$ и $116 - 46 = 70$ — сумма цифр не равна 14, а $132 = 86 + 46$ и $123 = 77 + 46$ подходят.

Ответ: 77 и 86. ◀

- **Задача 7.** В коробке находятся 13 красных и 17 белых шаров. Разрешается проводить в любом порядке и любом количестве следующие операции:
- увеличить на 2 число красных шаров и одновременно уменьшить на 1 число белых;
 - увеличить на 1 число красных шаров и одновременно увеличить на 2 число белых;
 - уменьшить на 2 число красных шаров и одновременно увеличить на 1 число белых;
 - уменьшить на 1 число красных шаров и одновременно уменьшить на 2 число белых.

Можно ли, совершая такие действия, добиться, чтобы в ящике было 37 красных шаров и 43 белых шара?

Решение. Каждая из указанных операций представляет собой прибавление положительных или отрицательных чисел к уже имеющимся двум числам. Следовательно, эти операции перестановочны, т.е. если мы изменим порядок их выполнения, на результат это не повлияет.

Предположим, что после применения p операций а), q операций б), r операций в) и s операций г) мы получили 37 красных и 43 белых шара. Тогда

$$\begin{cases} 13 + 2p + q - 2r - s = 37, \\ 17 - p + 2q + r - 2s = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(p - r) + (q - s) = 24, \\ -(p - r) + 2(q - s) = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p - r = \frac{22}{5}, \\ q - s = \frac{76}{5}, \end{cases}$$

— противоречие с тем, что p, q, r, s — целые числа.

Ответ: невозможно. ◀

Урок окончен. Оценивается он стандартным образом, при этом задача 1 не учитывается — она представляет собой практически объяснение нового материала.

Домашнее задание

- ▶ 1. На 100 рублей решено купить елочных игрушек. Они продаются наборами. Набор из 20 игрушек стоит 4 рубля, набор из 35 игрушек стоит 6 рублей и набор из 50 игрушек стоит 9 рублей. Сколько и каких наборов нужно купить, чтобы было куплено наибольшее число игрушек?
- ▶ 2. На покупку тетрадей в клетку и в линейку можно затратить не более 1 руб. 40 коп. Тетрадь в клетку стоит 3 коп. тетрадь в линейку — 2 коп. При закупке число тетрадей в клетку не должно отличаться от числа тетрадей в линейку более, чем на 9. Необходимо закупить максимально возможное суммарное количество тетрадей, причем из всех вариантов, дающих это максимально возможное количество, надо найти такой, при котором число тетрадей в линейку минимально. Сколько тетрадей в клетку и сколько в линейку можно закупить при указанных условиях?
- ▶ 3. С завода на стройку нужно перевезти 24 больших и 510 маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомашинами, каждая из которых вмещает в себя 44 маленьких блока и имеет грузоподъемность 10 тонн. Вес маленького блока — 0,2 тонны, большой блок весит 3,6 тонны и занимает место 14 маленьких. Найти минимальное число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков.
- ▶ 4. Ученики второго, третьего и четвертого классов собирали макулатуру. Второклассники работали каждый по три дня, третьеклассники — по 12 дней, четвероклассники — по 16 дней. При этом каждый второклассник собрал по 30 кг, каждый третьеклассник — по 130 кг, каждый четвероклассник — по 170 кг. Все дети вместе отработали 95 дней. Сколько учеников каждого класса участвовало в работе, если общее количество собранной макулатуры оказалось максимальным?
- ▶ 5. В группе каждый из учащихся знает хотя бы один иностранный язык (английский, французский или немецкий) и нет ни одного учащегося,

который бы знал все три указанных языка. Тринадцать учащихся знают лишь по одному иностранному языку. Никто из группы не знает одновременно французский и немецкий, но половина учащихся, владеющих английским, знает еще один иностранный язык. Девушек, знающих только английский, в два раза больше, чем учащихся, знающих только немецкий, и в четыре раза больше, чем учащихся, знающих только французский. Определить, сколько учащихся в группе, если юношей, знающих только английский, в n раз больше, чем учащихся, знающих только французский, причем $3 \leq n \leq 15$ (n — целое число).

- 6. Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 12-квартирного дома необходимо 70 деталей первого и 100 деталей второго вида. Для 16-квартирного дома требуется 110 и 150, а для дома на 21 квартиру нужно 150 и 200 деталей первого и второго видов соответственно. Всего имеется 900 деталей первого и 1300 деталей второго вида. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим?
- 7. Купили несколько одинаковых книг и одинаковых альбомов. За книги заплатили 10 руб. 56 коп., за альбомы — 56 коп. Книг купили на 6 штук больше, чем альбомов. Сколько купили книг, если цена одной книги больше чем на 1 руб. превосходит цену одного альбома?
- 8. Школьник переклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 20 марок на 1 лист, то ему не хватит альбома, а если по 23 марки на лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если школьнику подарить такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок. Сколько листов в альбоме?
- 9. Автоматы двух типов красили детали, и все детали были покрашены за час. Определить число автоматов, если известно, что каждый из них мог бы покрасить все детали за целое число часов, общая сумма которых (для всех автоматов) равна 55.
- 10. В двух бригадах вместе работает более 27 человек. Число членов первой бригады более чем в два раза превосходит число членов второй бригады, уменьшенное на 12. Число членов второй бригады более чем в 9 раз превышает число членов первой бригады, уменьшенное на 10. Сколько человек в каждой бригаде?
- 11. В первой коробке находилось некоторое количество красных шаров, а во второй — синих, причем число красных шаров составляло $15/19$ от числа синих. Когда из коробок удалили $3/7$ красных шаров и $2/5$ синих, в первой коробке осталось менее 1000 шаров, а во второй — более 1000 шаров. Сколько шаров первоначально было в каждой коробке?
- 12. На заводе было несколько одинаковых прессов, штампующих детали, и завод выпускал 6480 деталей в день. После реконструкции все прессы заменили на более производительные, но также одинаковые, а их ко-

личество увеличилось на 3. Завод стал выпускать в день 11200 деталей. Сколько прессов было первоначально?

- 13. В школьной газете сообщается, что процент учеников некоторого класса, повысивших во втором полугодии успеваемость, заключена в пределах от 2,9% до 3,1%. Определить минимально возможное число учеников в таком классе.
- 14. Колхоз арендовал два экскаватора. Аренда первого экскаватора стоит 60 руб. в день, производительность его в мягком грунте составляет 250 м^3 в день, в твердом грунте — 150 м^3 в день. Аренда второго экскаватора стоит 50 рублей в день, его производительность в мягком грунте — 480 м^3 в день, а в твердом — 100 м^3 в день. Первый работал несколько полных дней и вырыл 720 м^3 . Второй за несколько полных дней вырыл 330 м^3 . Сколько дней работал каждый экскаватор, если колхоз заплатил за аренду не более 300 рублей?
- 15. Вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года $5/6$ некоторой суммы положили в первый банк, а оставшуюся часть — во второй. К концу года сумма этих вкладов стала равна 670 долларов, к концу следующего года — 749 долларов. Если бы первоначально $5/6$ исходной суммы положили во второй банк, а оставшуюся часть — в первый, то по истечении одного года сумма вкладов стала бы равной 710 долларам. Определить величину вклада через два года, если все деньги положены в первый банк.

Урок 17

Прогрессии

Последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ называется *арифметической прогрессией*, если найдется такое число d , называемое *разностью* прогрессии, что $a_2 = a_1 + d, a_3 = a_2 + d, \dots, a_n = a_{n-1} + d$. Иными словами, второй член получается из первого прибавлением числа d , третий получается из второго прибавлением того же самого числа d , и т.д. Отсюда ясно, что все члены прогрессии определяются ее первым членом и разностью. Я отнес задачи на прогрессии к текстовым задачам, так как практически любая задача на арифметические прогрессии решается составлением системы уравнений относительно a_1 и d . Для того, чтобы составить такую систему,

достаточно знать следующие формулы:

$$(1) \quad a_n = a_1 + (n-1)d,$$

$$(2) \quad a_1 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Здесь, конечно, имеется в виду, что $a_1, \dots, a_n$ — арифметическая прогрессия.

Последовательность чисел $b_1, \dots, b_n$ называется *геометрической прогрессией*, если $b_k \neq 0$ для всех k и найдется такое число $q \neq 0$, называемое *знаменателем* прогрессии, что $b_2 = b_1 \cdot q$, $b_3 = b_2 \cdot q, \dots, b_n = b_{n-1} \cdot q$. Определение совершенно аналогично определению арифметической прогрессии с заменой сложения на умножение. Требование, чтобы отличались от нуля все члены и знаменатель прогрессии, необходимо для того, чтобы однозначно можно было определить прогрессию по любому члену и знаменателю, а также сам знаменатель, если даны все члены прогрессии. Если допустить, что члены прогрессии могут быть равны нулю, то последовательность $0, 0, \dots, 0$ можно считать прогрессией со знаменателем 3, или 7, или $\sqrt{2}$, т.е. знаменатель не определяется однозначным образом.

Если допустить, что знаменатель может быть равен нулю, то последовательность $2, 0, \dots, 0$ является геометрической прогрессией с таким знаменателем, но, зная знаменатель и второй член, мы никак не можем найти первый — он может, в принципе, равняться любому числу.

Задачи на геометрические прогрессии решаются так же, как и задачи на арифметические прогрессии — составлением системы уравнений относительно b_1 и q . Вот необходимые для этого формулы:

$$(3) \quad b_n = b_1 \cdot q^{n-1},$$

$$(4) \quad b_1 + b_2 + \dots + b_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Последнее замечание о названиях. Название «арифметическая прогрессия» для последовательности $a_1, \dots, a_n$ проистекает из того факта, что любой член прогрессии есть среднее арифметическое соседних с ним членов (если они имеются), т.е. для любого натурального k если $1 < k < n$, то $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$.

Аналогично, если $b_1, \dots, b_n$ есть геометрическая прогрессия с положительными членами, то каждый ее член равен среднему геометрическому своих соседних (если они имеются), т.е. для любого натурального k если $1 < k < n$, то $b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}}$.

► **Задача 1.** Известно, что $a_1, a_2, \dots$ — арифметическая прогрессия и $a_3 + a_9 = 8$. Найти $a_1 + a_2 + \dots + a_{11}$.

Решение. Имеем $a_3 = a_1 + 2d$, $a_9 = a_1 + 8d$, $a_{11} = a_1 + 10d$, где d — разность прогрессии. Мы знаем, что $a_1 + 2d + a_1 + 8d = 2a_1 + 10d = 8$. Требуется найти величину

$$\frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = \frac{2a_1 + 10d}{2} \cdot 11.$$

Ясно, что для этого нужно подставить в последнюю формулу значение известного нам числителя.

Ответ: 44. ◀

► **Задача 2.** Известно, что a_1, a_2, a_3, a_4 — геометрическая прогрессия, $a_1 > 0$, причем $a_1 + a_4 = -49$, $a_2 + a_3 = 14$. Найдите a_1, a_2, a_3, a_4 .

Решение. Два приведенные в условии равенства дают два уравнения:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 q^3 = -49, \\ a_1 q + a_1 q^2 = 14 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1(1 + q^3) = -49, \\ a_1 q(1 + q) = 14. \end{cases}$$

Из того, что правые части не равны нулю, следует, что $q \neq -1$. Значит, можно разделить первое уравнение на второе.

$$\frac{1 + q^3}{q(1 + q)} = -\frac{7}{2} \iff \frac{1 - q + q^2}{q} = -\frac{7}{2} \iff 2q^2 + 5q + 2 = 0 \iff q = -2, -\frac{1}{2}.$$

Если $q = -2$, то $a_1 = 7$, а если $q = -\frac{1}{2}$, то $a_1 = -56 < 0$ — не годится.

Ответ: 7, -14, 28, -56. ◀

► **Задача 3.** Найдите $(2 + \frac{1}{2})^2 + (4 + \frac{1}{4})^2 + \dots + (2^n + \frac{1}{2^n})^2$.

Решение. Для каждого $k = 1, \dots, n$ имеем

$$\left(2^k + \frac{1}{2^k}\right)^2 = 2^{2k} + \frac{1}{2^{2k}} + 2 = 4^k + 4^{-k} + 2,$$

значит, наше выражение разбивается на сумму трех следующих:

$$(4 + 4^2 + \dots + 4^n) + \underbrace{(2 + 2 + \dots + 2)}_{n \text{ раз}} + (4^{-1} + 4^{-2} + \dots + 4^{-n}).$$

Сумма каждой из трех прогрессий легко подсчитывается: для первой это $-\frac{4}{3}(4^n - 1)$, для второй — $2n$, для третьей — $\frac{1}{3}(1 - 4^{-n})$.

Ответ: $\frac{1}{3}(4^{n+1} - 4^{-n}) + 2n - 1$. ◀

► **Задача 4 [2].** При каких α числа $\frac{\sin \alpha}{6}$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ составляют геометрическую прогрессию?

Решение. Если $b_1 = \frac{\sin \alpha}{6}$, то $q = \cos \alpha$: $\frac{\sin \alpha}{6} = \frac{6 \cos \alpha}{\sin \alpha}$ и $\operatorname{tg} \alpha = \cos \alpha \cdot q = \frac{6 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$.

Мы получили тригонометрическое уравнение на α , которое легко приводится к кубическому относительно $\cos \alpha$:

$$6 \cos^3 \alpha + \cos^2 \alpha - 1 = 0.$$

Нетрудно угадать, что $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ есть корень данного уравнения и при помощи деления уголком на $\cos \alpha - \frac{1}{2}$ убедиться, что получается квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом, т.е. других корней у данного кубического уравнения нет. Из эквивалентности наших преобразований следует, что все α , для которых $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, годятся.

Ответ: $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. ◀

- **Задача 5.** Найти числа, одновременно являющиеся членами арифметической прогрессии 12, 15, 18, ... и геометрической прогрессии 1, 3, 9, ..., если каждая из этих прогрессий содержит по 100 членов.

Решение. Последний член арифметической прогрессии равен $12 + 99 \cdot 3 = 309$. Что касается геометрической прогрессии, то $3^6 = 729 > 309$. Ясно, что все члены геометрической прогрессии с номерами, большими семи, будут еще больше, чем 729, и поэтому никак не могут быть членами арифметической прогрессии. Значит, нужно проверить только числа $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, $3^5 = 243$. Но наша арифметическая прогрессия содержит все числа от 12 до 309, делящиеся на 3, так что все они годятся.

Ответ: 27, 81, 243. ◀

- **Задача 6.** Известно, что $a_1, \dots, a_n$ — геометрическая прогрессия. Известны числа $S = a_1 + \dots + a_n$ и $T = \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}$. Найти $a_1 \cdot \dots \cdot a_n$.

Решение. Пусть q — знаменатель прогрессии. Тогда $S = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$. Последовательность $\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}$ является геометрической прогрессией со знаменателем $\frac{1}{q}$. Следовательно, $T = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1 - q^{-n}}{1 - q^{-1}} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q - 1)}$.

Отсюда заключаем, что

$$S/T = a_1^2 q^{n-1}.$$

Преобразуем теперь искомую величину: $a_1 \cdot \dots \cdot a_n = a_1 \cdot a_1 q \cdot \dots \cdot a_1 q^{n-1} = a_1^n q^{1+2+\dots+n-1} = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = (a_1^2 q^{n-1})^{\frac{n}{2}} = \sqrt{\frac{S^n}{T^n}}$.

Ответ: $\sqrt{S^n/T^n}$. ◀

- **Задача 7 [2].** Пусть a_1, a_2, a_3 — арифметическая прогрессия с ненулевой разностью. Известно, что $a_1 a_2, a_2 a_3, a_3 a_1$ — геометрическая прогрессия. Найти ее знаменатель.

Решение. Из того, что $a_1 a_2, a_2 a_3, a_3 a_1$ — геометрическая прогрессия, следует, что ни одно из чисел a_1, a_2, a_3 не равно нулю. Знаменатель геометрической прогрессии равен отношению ее второго члена к первому, т.е.

$q = \frac{a_3}{a_1}$. Следовательно, $a_3 a_1 = a_2 a_3 q \iff q = \frac{a_1}{a_2}$. Получили уравнение

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} \iff a_1^2 = (a_1 + d)(a_1 + 2d) \iff d = -\frac{3}{2}a_1.$$

Последняя эквивалентность выполняется ввиду того, что допустимо сокращение на $d \neq 0$.

Теперь уже можно найти $q = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1}{a_1 + d} = \frac{a_1}{a_1 + (-1,5a_1)} = -2$.

Ответ: -2 . ◀

► **Задача 8.** Найти сумму всех трехзначных чисел, делящихся на 7.

Решение. Первое трехзначное число, которое делится на 7, — это 105 (т.к. ближайшее меньшее его и делящееся на 7 есть 98). Последнее такое число — это 994. Ясно, что такие числа образуют прогрессию со знаменателем 7. Пусть число членов этой прогрессии равно n . Тогда $105 + (n - 1) \cdot 7 = 994 \iff n = 128$. Значит, искомая сумма равна $\frac{105 + 994}{2} \cdot 128 = 70336$.

Ответ: 70336. ◀

► **Задача 9.** Доказать тождество

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^n)^2 - x^n = (1 + \dots + x^{n-1})(1 + x + \dots + x^{n+1}).$$

Решение. Ошибка, которую чаще всего делают в этой задаче, состоит в неправильном подсчете членов прогрессии $1, x, \dots, x^n$. Их здесь $n + 1$, и поэтому $1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$. Это равенство имеет смысл только при $x \neq 1$. Но, как нетрудно убедиться, при $x = 1$ исходное тождество принимает вид $(n + 1)^2 - 1 = n(n + 2)$, т.е. верно.

Аналогичным образом запишем, что

$$1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x} \quad \text{и} \quad 1 + x + \dots + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}.$$

Подставляя суммы соответствующих прогрессий в доказываемое тождество и приводя левую и правую части к общему (одинаковому!) знаменателю, получим в числителе слева $(1 - x^{n+1})^2 - (x - 1)^2 x^n$, а справа $(1 - x^n)(1 - x^{n+2})$.

Остается раскрыть скобки и убедиться, что слева и справа стоит одно и то же.

Наш урок окончен. Оценивается он стандартным образом.

Домашнее задание

- 1. Известно, что $a_1, \dots, a_{15}$ — арифметическая прогрессия и $a_1 + a_5 + a_{15} = 3$. Найти $a_5 + a_9$.
- 2. Известно, что $b_1, \dots, b_{11}$ — геометрическая прогрессия и $b_1 b_3 b_{11} = 8$. Найти $b_2 b_8$.
- 3. Найти трехзначное число, цифры которого образуют (в том порядке, в котором они стоят в числе) возрастающую арифметическую прогрессию и которое делится на 45.
- 4 [2]. Найти все значения a , при которых уравнение $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ имеет ровно четыре корня и эти корни образуют арифметическую прогрессию.
- 5. Про натуральные числа k, p, m, v известно следующее: k, p, m — геометрическая прогрессия, $k - 2, p, m, v - 12$ — арифметическая прогрессия и $m + 18 = v$. Найти m .
- 6. Найти сумму чисел, являющихся одновременно членами прогрессии 3, 7, 11, $\dots$, 203 и прогрессии 2, 9, 16, $\dots$, 212.
- 7. Второй член арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел, равен 2, а сумма квадратов третьего и четвертого ее членов равна 4. Найти первый член прогрессии.
- 8. Известно, что a_1, a_2, a_3 — геометрическая прогрессия, знаменатель которой q — натуральное число, причем $a_1 = 8$, $2a_2 - \frac{1}{2}a_3 > 15$. Найти q .
- 9. Пусть $a_1, \dots, a_{20}$ — арифметическая прогрессия, $a_3 + a_7 + a_{14} + a_{18} = 10$. Найти $a_1 + a_2 + \dots + a_{20}$.
- 10 [3]. Могут ли числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ быть членами (не обязательно последовательными) одной арифметической прогрессии?
- 11. Известно, что a^2, b^2, c^2 — арифметическая прогрессия. Доказать, что тогда и $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}$ — тоже арифметическая прогрессия.
- 12 [2]. Известно, что при любом n сумма первых n членов некоторой числовой последовательности выражается формулой $S_n = 2n^2 + 3n$. Найти десятый член этой последовательности и доказать, что она является арифметической прогрессией.
- 13 [3]. Найти сумму $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + \dots + 100 \cdot 2^{99}$.
- 14. Известно, что $a_1, \dots, a_5$ — геометрическая прогрессия с положительными членами, $a_2 a_3 a_4 = 1$, $a_1 = 10000a_5$. Найти все члены этой прогрессии.
- 15 [2]. Известно, что a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 — арифметические прогрессии, причем $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$ и $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3$ — геометрическая прогрессия. Доказать, что $a_1 = b_3, a_2 = b_2, a_3 = b_1$.

Глава 5

Более сложные уравнения и неравенства

Урок 18

Показательные

Начнем со свойств показательных функций. Первое, что необходимо твердо запомнить, — это то, что общая степенная функция $y = a^x$ имеет смысл только при $a > 0$. При этом x может принимать любые значения. Тем самым, если в вашем уравнении или неравенстве фигурирует выражение $f(x)^{g(x)}$, то к условиям, определяющим ОДЗ, надо отнести неравенство $f(x) > 0$.

Скажу несколько слов, почему нельзя возводить неположительные числа в произвольную степень. Действительно, вроде бы понятно, как возвести -1 в степень, равную $1/3$. Однако совершенно невозможно возвести это число в степень $1/2$, а уж что делать со степенью $\sqrt{2}$, вообще представить себе нельзя. Число 0 невозможно возвести в отрицательную степень. Отсюда видно, что если бы мы задумали рассмотреть функцию $y = (-1)^x$, то ОДЗ для нее написать нам было бы не по силам. Впрочем, такую функцию, определенную только для целых x , мы рассматривали на наших уроках по тригонометрии.

Приведу основные свойства степеней, при помощи которых преобразуются показательные уравнения и неравенства.

$$(1) \quad a^x > 0 \text{ при всех } a > 0 \text{ и } x \in \mathbf{R}.$$

$$(2) \quad a^x = b \iff x = \begin{cases} \log_a b, & \text{если } a > 0, b > 0, a \neq 1, \\ \emptyset, & \text{если } a = 1, b \neq 1, \\ \text{любое,} & \text{если } a = b = 1. \end{cases}$$

(3) Если m и n — натуральные числа, то $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

$$(4) \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

$$(5) \quad a^{x+y} = a^x a^y.$$

$$(6) \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}.$$

$$(7) \quad a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x.$$

$$(8) \quad (ab)^x = a^x b^x.$$

$$(9) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

$$(10) \quad a^0 = 1, \quad a^1 = a.$$

Кроме того, необходимо помнить, что при $a > 1$ функция $y = a^x$ возрастает, а при $0 < a < 1$ убывает на всей прямой.

Подобно тригонометрическим, показательные уравнения и неравенства решаются сведением к простейшим при помощи формул (1)–(10).

Вот список простейших уравнений и неравенств с указанием равносильных переходов, устраняющих степени:

$$(11) \quad a^{g(x)} = a^{h(x)}, \quad a > 0, a \neq 1 \iff g(x) = h(x)$$

$$(12) \quad f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)} \iff \begin{cases} g(x) = h(x) \\ f(x) > 0 \\ f(x) = 1, \\ g(x), h(x) \text{ определены.} \end{cases}$$

$$(13) \quad f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)} \iff \begin{cases} g(x) > h(x) \\ f(x) > 1 \\ g(x) < h(x) \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases}$$

$$(14) \quad f(x)^{g(x)} \geq f(x)^{h(x)} \iff \begin{cases} f(x) \geq 1 \\ g(x) \geq h(x) \\ 0 < f(x) \leq 1 \\ g(x) \leq h(x) \end{cases}$$

$$(15) \quad f(x)^{g(x)} < f(x)^{h(x)} \iff \begin{cases} g(x) < h(x) \\ f(x) > 1 \\ g(x) > h(x) \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases}$$

$$(16) \quad f(x)^{g(x)} \leq f(x)^{h(x)} \iff \begin{cases} f(x) \geq 1 \\ g(x) \leq h(x) \\ 0 < f(x) \leq 1 \\ g(x) \geq h(x) \end{cases}$$

► **Задача 1.** $4^x + 8 = 9 \cdot 2^x$.

Решение. Если обозначить 2^x через y , то $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = y^2$. Следовательно, имеем квадратное уравнение $y^2 - 9y + 8 = 0 \iff y = 1, 8$.

Если $2^x = 1 = 2^0$, то $x = 0$, а если $2^x = 8 = 2^3$, то $x = 3$.

Ответ: $x = 0, 3$. ◀

► **Задача 2.** $4^x = 2 \cdot 14^x + 3 \cdot 49^x$.

Решение. Заметим, что $4^x = (2^x)^2$, $14^x = 2^x \cdot 7^x$, $49^x = (7^x)^2$. Значит, если обозначить 2^x через a , а 7^x через b , то $a > 0$, $b > 0$; получаем уравнение

$$a^2 - 2ab - 3b^2 = 0 \iff (a - 3b)(a + b) = 0 \iff a = 3b, \text{ или } a = -b.$$

Из $a > 0, b > 0$ следует, что равенство $a = -b$ невозможно. Значит,

$$2^x = 3 \cdot 7^x \iff \left(\frac{2^x}{7^x}\right) = 3 \iff \left(\frac{2}{7}\right)^x = 3 \iff x = \log_{2/7} 3.$$

Ответ: $x = \log_{2/7} 3$. ◀

► **Задача 3.** $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x + (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x = 10$.

Решение. Заметим, что $(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6}) = 5^2 - (2\sqrt{6})^2 = 25 - 24 = 1$. Значит,

$$\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = \left(\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}\right)^x = \frac{1}{\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x},$$

и можно обозначить $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x$ через y . Получим уравнение

$$y + \frac{1}{y} = 10 \iff y^2 - 10y + 1 \iff y = 5 \pm 2\sqrt{6}.$$

Если $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x = 5+2\sqrt{6}$, то $x = 2$, а если $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x = 5-2\sqrt{6} = (5+2\sqrt{6})^{-1}$, то $x = -2$.

Ответ: $x = \pm 2$. ◀

► **Задача 4.** $3^{2x^2+6x-9} + 4 \cdot 15^{x^2+3x-5} = 3 \cdot 5^{2x^2+6x-9}$.

Решение. Пусть $3^{x^2+3x-5} = a$, $5^{x^2+3x-5} = b$. Тогда

$$3^{2x^2+6x-9} = 3^{2x^2+6x-10+1} = 3 \cdot 3^{2(x^2+3x-5)} = 3a^2.$$

Аналогично

$$5^{2x^2+6x-9} = 5b^2, \quad 15^{x^2+3x-5} = ab,$$

и наше уравнение принимает вид

$$3a^2 + 4ab - 15b^2 = 0 \iff (a + 3b)(3a - 5b) = 0 \iff 3a = 5b,$$

поскольку $a + 3b > 0$. Следовательно, имеем уравнение

$$\frac{3^{x^2+3x-5}}{5^{x^2+3x-5}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+3x-5} = \frac{5}{3} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-1}.$$

Тем самым, $x^2 + 3x - 5 = -1 \iff x^2 + 3x - 4 = 0 \iff x = -4, 1$.

Ответ: $x = -4, x = 1$. ◀

► **Задача 5** [2]. $1 + 3^{x/2} = 2^x$.

Решение. Поделив уравнение на строго положительную величину 2^x , получим уравнение

$$\frac{1}{2^x} + \frac{(\sqrt{3})^x}{2^x} = 1 \iff \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x = 1.$$

Легко проверяется, что $x = 2$ есть корень уравнения (это надо просто угадать). Кроме того, левая часть есть сумма двух убывающих функций (а именно, степенных с основанием, меньшим единицы). Значит, левая часть сама является строго убывающей функцией. Следовательно, при $x > 2$ левая часть строго меньше 1, а при $x < 2$ она строго больше единицы. Это рассуждение доказывает, что других корней, кроме $x = 2$, нет.

Ответ: $x = 2$. ◀

► **Задача 6.** $|x - 3|^{x^2-x} = (x - 3)^2$.

Решение. Поскольку $(x - 3)^2 = |x - 3|^2$, мы можем применить формулу (12), согласно которой либо $|x - 3| = 1 \iff x = 2, 4$, либо $x^2 - x = 2 \iff x = 2, -1$.

Ответ: $-1, 2, 4$. ◀

► **Задача 7.** $\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y}, \\ x^2 y = 1. \end{cases}$

Решение. Второе уравнение системы эквивалентно тому, что $y = \frac{1}{x^2}$. Подставим это значение y в первое уравнение:

$$x^{x+\frac{1}{x^2}} = (x^{-2})^{x-\frac{1}{x^2}} \iff x^{x+\frac{1}{x^2}} = x^{-2x+\frac{2}{x^2}}.$$

Последнее уравнение эквивалентно тому, что либо $x = 1$, либо $x + \frac{1}{x^2} = -2x + \frac{2}{x^2} \iff x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Ответ: $1, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. ◀

► **Задача 8.** $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2}{3}(x-2)} > 52$.

Решение. Заметим, что $2^{2(x-1)} = 4^{x-1} = 4^x \cdot 4^{-1} = \frac{1}{4} \cdot 4^x$ и $8^{\frac{2}{3}(x-2)} = (8^{\frac{2}{3}})^{x-2} = 4^{x-2} = 4^x \cdot 4^{-2} = \frac{1}{16} \cdot 4^x$.

Подставим значения этих выражений в исходное неравенство:

$$4^x - \frac{1}{4} \cdot 4^x + \frac{1}{16} \cdot 4^x > 52 \iff \frac{13}{16} \cdot 4^x > 52 \iff 4^x > 4^3 \iff x > 3.$$

Ответ: $x > 3$. ◀

► **Задача 9.** $8 \cdot 3^{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x}} \geq 9^{\sqrt{x}}$.

Решение. Пусть $a = 3^{\sqrt{x}}$, $b = 3^{\sqrt[4]{x}}$. Тогда $3^{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} = ab$, $9^{\sqrt{x}+1} = 9 \cdot 9^{\sqrt{x}} = 9b^2$, $9^{\sqrt{x}} = a^2$, и наше неравенство можно переписать в виде

$$a^2 - 8ab - 9b^2 \leq 0 \iff (a+b)(a-9b) \leq 0 \iff a-9b \leq 0$$

ввиду того, что $a+b > 0$. Следовательно, наше уравнение эквивалентно тому, что

$$\frac{a}{b} \leq 9 \iff \frac{3^{\sqrt{x}}}{3^{\sqrt[4]{x}}} \leq 9 \iff 3^{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} \leq 3^2 \iff \sqrt{x} - \sqrt[4]{x} \leq 2 \iff$$

$$(\sqrt[4]{x})^2 - \sqrt[4]{x} - 2 \leq 0 \iff -1 \leq \sqrt[4]{x} \leq 2 \iff 0 \leq x \leq 16.$$

Ответ: $0 \leq x \leq 16$. ◀

► **Задача 10.** $|x-3|^{2x^2-7x} > 1$.

Решение. Запишем наше неравенство так: $|x-3|^{2x^2-7x} > |x-3|^0$. Согласно формуле (13) мы должны рассмотреть два случая:

1) $|x-3| > 1 \iff x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$. Тогда $2x^2 - 7x > 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{7}{2}, +\infty)$. Отсюда $\boxed{x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)}$.

2) $0 < |x-3| < 1 \iff x \in (2, 3) \cup (3, 4)$. Тогда $2x^2 - 7x < 0 \iff x \in (0, \frac{7}{2})$ и, значит, $\boxed{x \in (2, 3) \cup (3, \frac{7}{2})}$.

Ответ: $x \in (-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, \frac{7}{2}) \cup (4, +\infty)$. ◀

► **Задача 11.** $(4x^2 + 2x + 1)^{x^2-x} \leq 1$.

Решение. Перепишем наше неравенство в виде $(4x^2 + 2x + 1)^{x^2-x} \leq (4x^2 + 2x + 1)^0$. Согласно формуле (16) мы должны рассмотреть два случая:

1) $(4x^2 + 2x + 1) \geq 1 \iff x \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [0, +\infty)$. Тогда $x^2 - x \leq 0 \iff x \in [0, 1]$. Тем самым, $\boxed{x \in [0, 1]}$.

2) $0 < 4x^2 + 2x + 1 \leq 1 \iff x \in [-\frac{1}{2}, 0]$. Тогда $x^2 - x \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$. Отсюда получаем второй кусок ответа: $\boxed{x \in [-\frac{1}{2}, 0]}$.

Ответ: $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$. ◀

Наш урок окончен. Оценка выставляется стандартным образом.

Домашнее задание

▶ 1. $3 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0$

▶ 2. $3^x - 3^{\frac{1}{2}-x} > \sqrt{3} - 1$

▶ 3. $2^{3x-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{2} > 1 + 2^{-3x}$

▶ 4. $32^{3(x^3-8)} = 8^{19(2x-x^2)}$

▶ 5. $\frac{5^x}{2^{x-1}-5^x} = 8 - \frac{2^{x+1}}{5^x}$

▶ 6. $7^x - 14 \cdot 7^{-x} = 3^{\log_3 2} + 3$

▶ 7. $\begin{cases} 6^x - 2 \cdot 3^y = 2 \\ 6^x \cdot 3^y = 12 \end{cases}$

▶ 8. $\begin{cases} 6^x \cdot 3^y = 12 \end{cases}$

▶ 9. $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4-x^2}{2}} = 8^x$

▶ 10. $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}x^2} = 4^{-x} \cdot 8^{-4}$

▶ 11. $7^{x-\frac{1}{3}x^2} < 7^{1-x} \cdot (\sqrt[3]{7})^{x^2} + 6$

▶ 12. $5^{2x-\frac{1}{3}x^2} < 5^{2-2x} \cdot (\sqrt[3]{5})^{x^2} + 24$

▶ 13. $3^x < 1 + 12 \cdot 3^{-x}$

▶ 14. $\begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2 \\ 3 \cdot 2^{x+1} - 5y = 93 \end{cases}$

▶ 15. $\begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2 \\ 3 \cdot 2^{x+1} - 5y = 93 \end{cases}$

▶ 16. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$

▶ 17. $2^{x+3} - 3^{x^2+2x-6} = 3^{x^2+2x-5} - 2^x$

▶ 18. $4^{x^2} - 3 \cdot 2^{x^2} + 1 \geq 0$

▶ 19. $2 \cdot \left(\frac{7^x+7^{-x}}{2}\right)^2 - 7 \cdot \frac{7^x+7^{-x}}{2} + 3 = 0$

▶ 20. $\frac{2 \cdot 6^x - 4^x - 15}{6^x - 9^x - 5} = 3$

▶ 21. $\frac{15^x + 9^x + 6}{2 \cdot 15^x + 25^x + 3} = 2$

▶ 22. $5^{x+1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$

▶ 23. $4 \cdot 4^x < 7 \cdot 2^x + 2$

▶ 24. $[2]. 2^{x+3} - x^3 \cdot 2^x \leq 16 - 2x^3$

▶ 25. $[2]. x^4 + 3x^{+4} \geq x^4 \cdot 3^x + 81$

▶ 26. $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$

▶ 27. $2 \cdot 4^{x+2} + 14 \cdot 2^x - 1 = 0$

▶ 28. $4^{-\frac{1}{x}} + 6^{-\frac{1}{x}} = 9^{-\frac{1}{x}}$

▶ 29. $4^x \leq 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}$

▶ 30. $\frac{1}{2^x-1} > \frac{1}{1-2^{x-1}}$

▶ 31. $(x^2 - x + 1)^x < 1$

▶ 32. $(x^2 + x + 1)^x < 1$

Урок 19

Логарифмические

Моя практика показывает, что к моменту, когда в занятиях со мной мои ученики доходят до изучения логарифмических уравнений и неравенств, в школе логарифмы еще не проходят. Вполне возможно, что и вы дошли до этого урока, не пройдя этот материал в школе. Тем не менее, откладывать его уже нельзя, поэтому перед тем как приступить к этому уроку, я по-

прошу вас прочитать соответствующие параграфы учебника. В принципе, весь теоретический материал я дам здесь, дам много тренировочных задач (не вступительных, а именно помогающих привыкнуть к новому понятию). Но без учебника может быть чрезмерно трудно, хотя мы с вами должны осознать этот материал как простой. Подобные задачи чаще всего даются «на тройку», так что вы должны настроиться на то, что если в варианте стоит такая задача, то это верное очко в вашу пользу.

Итак, я надеюсь, что вы начинаете читать этот абзац, уже прочитав материал про логарифмы из школьного учебника.

Самое главное, как всегда, определение. Пусть $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$. Тогда $\log_a b$ есть такое число c , что $a^c = b$. Можно записать это определение и так:

$$(1) \quad a^{\log_a b} = b, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad a \neq 1.$$

Формулу (1) часто называют еще основным логарифмическим тождеством. Полезно помнить, что это все-таки определение.

Логарифмические уравнения и неравенства, так же как показательные и тригонометрические, приводятся к простейшим с помощью формул преобразования логарифмов. Вот эти формулы:

$$(2) \quad \log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

$$(3) \quad \log_a(bc) = \log_a b + \log_a c, \quad a, b, c > 0, \quad a \neq 1.$$

$$(4) \quad \log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c, \quad a, b, c > 0, \quad a \neq 1.$$

$$(5) \quad \log_a(b^x) = x \log_a b, \quad a, b > 0, \quad a \neq 1.$$

$$(6) \quad \log_{(a^x)} b = \frac{1}{x} \log_a b, \quad a, b > 0, \quad a \neq 1, \quad x \neq 0.$$

$$(7) \quad \log_a(b^{2n}) = 2n \log_a |b|, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b \neq 0, \quad n — \text{натуральное}.$$

$$(8) \quad \log_a \frac{1}{b} = -\log_a b, \quad a, b > 0, \quad a \neq 1.$$

$$(9) \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad a, b, c > 0, \quad a, c \neq 1.$$

$$(10) \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad a, b > 0, \quad a, b \neq 1.$$

Решение всех задач на логарифмы должно начинаться с нахождения ОДЗ. В процессе преобразований необходимо постоянно следить за ОДЗ и равносильностью преобразований. Например, формула (3) неверна, если не все из чисел a, b, c положительны. Если преобразовать выражение $\log_a(f(x)g(x))$ по формуле (3), то можно просто потерять те корни x , при которых как $f(x)$, так и $g(x)$ отрицательны. Поэтому при решении уравнений и неравенств полезно применять следующие вариации формул (3) и

(4):

$$(11) \quad \log_a(bc) = \log_a |b| + \log_a |c|, \quad a > 0, \quad b \cdot c > 0, \quad a \neq 1,$$

$$(12) \quad \log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a |b| - \log_a |c|, \quad a > 0, \quad b \cdot c > 0, \quad a \neq 1.$$

Приведем теперь простейшие логарифмические уравнения и неравенства и эквивалентные переходы, позволяющие избавляться от логарифмов.

$$(13) \quad \log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x) \iff \begin{cases} g(x) = h(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \neq 1. \end{cases}$$

В частности, если a есть положительное число, не равное единице, то

$$(14) \quad \log_a g(x) = \log_a h(x) \iff \begin{cases} g(x) = h(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Заметим, что в формулах (13) и (14) вместо неравенства $g(x) > 0$ можно было в каждой из систем записать неравенство $h(x) > 0$ — это все равно, так как $g(x) = h(x)$; можно при желании записать в систему оба эти неравенства. Конечно же, разумней решать поменьше неравенств и, поскольку все равно, какое из двух записать в систему, лучше взять то, которое проще.

Покажем, как избавляться от логарифмов в простейших неравенствах.

$$(15) \quad \log_{f(x)} g(x) > \log_{f(x)} h(x) \iff \begin{cases} \begin{cases} g(x) > h(x) \\ h(x) > 0 \\ f(x) > 1 \end{cases} \\ \text{или} \\ \begin{cases} h(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$(16) \quad \log_{f(x)} g(x) \geq \log_{f(x)} h(x) \iff \begin{cases} \begin{cases} g(x) \geq h(x) \\ h(x) > 0 \\ f(x) > 1 \end{cases} \\ \text{или} \\ \begin{cases} h(x) \geq g(x) \\ g(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$(17) \quad \log_{f(x)} g(x) < \log_{f(x)} h(x) \iff \begin{cases} g(x) < h(x) \\ g(x) > 0 \\ f(x) > 1 \\ h(x) < g(x) \\ h(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases}$$

$$(18) \quad \log_{f(x)} g(x) \leq \log_{f(x)} h(x) \iff \begin{cases} g(x) \leq h(x) \\ g(x) > 0 \\ f(x) > 1 \\ h(x) \leq g(x) \\ h(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases}$$

Если взглянуть на формулы (15)–(18), то видно, что все они построены по одной схеме: надо рассмотреть два случая — когда основание больше единицы с сохранением неравенства и когда оно лежит между нулем и единицей с заменой его на противоположное.

Приведу еще несколько следствий формул (15)–(18), которые заслуживают отдельного запоминания.

$$(19) \quad \text{если } a, b \text{ — числа и } a > 0, a \neq 1, \text{ то } \log_a f(x) = b \iff f(x) = a^b.$$

$$(20) \quad \text{если } a > 0, a \neq 1, \text{ то } \log_a f(x) > b \iff \begin{cases} f(x) > a^b, & \text{если } a > 1, \\ 0 < f(x) < a^b, & \text{если } a < 1. \end{cases}$$

$$(21) \quad \text{если } a > 0, a \neq 1, \text{ то } \log_a f(x) \geq b \iff \begin{cases} f(x) \geq a^b, & \text{если } a > 1, \\ 0 < f(x) \leq a^b, & \text{если } a < 1. \end{cases}$$

$$(22) \quad \text{если } a > 0, a \neq 1, \text{ то } \log_a f(x) < b \iff \begin{cases} 0 < f(x) < a^b, & \text{если } a > 1, \\ f(x) > a^b, & \text{если } a < 1. \end{cases}$$

$$(23) \quad \text{если } a > 0, a \neq 1, \text{ то } \log_a f(x) \leq b \iff \begin{cases} 0 < f(x) \leq a^b, & \text{если } a > 1, \\ f(x) \geq a^b, & \text{если } a < 1. \end{cases}$$

Поскольку большинство школьников еще не привыкли к логарифмам, начну не с уравнений и неравенств, а с простейших вычислительных задач на логарифмы и степени.

► **Задача 1.** $2^{\log_2 \sqrt{2}} 15 = ?$

Решение. Я буду писать просто выкладку, в которой между знаками равенства будет стоять номер формулы, которой я воспользовался. Если преобразование не требует свойств логарифмов, то между знаками равенства ничего стоять не будет.

Итак,

$$2^{\log_{2\sqrt{2}} 15} = 2^{\log_{2^{\frac{3}{2}}} 15} = (6) = 2^{\frac{2}{3} \log_2 15} = (2^{\log_2 15})^{\frac{2}{3}} = (1) = 15^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{225}.$$

Ответ: $\sqrt[3]{225}$. ◀

► **Задача 2.** $(16/25)^{\log_{125/64} 3} = ?$

$$\begin{aligned} \text{Решение. } (16/25)^{\log_{125/64} 3} &= \left((4/5)^2\right)^{\log_{(5/4)^3} 3} = (6) = \left((5/4)^{-2}\right)^{1/3 \log_{5/4} 3} = \\ &= (5/4)^{-2/3 \log_{5/4} 3} = \left((5/4)^{\log_{5/4} 3}\right)^{-2/3} = (1) = 3^{-2/3} = 1/\sqrt[3]{9}. \end{aligned}$$

Ответ: $1/\sqrt[3]{9}$. ◀

► **Задача 3.** $a^{\frac{\lg \lg c}{\lg a}} = ?$

Решение. Напомню, что $\lg x$ есть общепринятое написание выражения $\log_{10} x$.

По формуле (9) имеем $\frac{\lg x}{\lg a} = \log_a x$, и, в частности, $\frac{\lg \lg c}{\lg a} = \log_a (\lg c)$. Значит, искомое выражение равно $a^{\log_a (\lg c)} = (1) = \lg c$.

Ответ: $\lg c$. ◀

► **Задача 4.** $\left(b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}} \cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\lg b}}\right)^{2 \log_{ab} (a+b)} = ?$

Решение. Из формулы (6) и того, что $100 = 10^2$ следует, что $\frac{\log_{100} a}{\lg a} = \frac{\frac{1}{2} \lg a}{\lg a} = \frac{1}{2}$. По той же самой причине $\frac{\log_{100} b}{\lg b} = \frac{1}{2}$. Следовательно, наше выражение принимает вид

$$\left(a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}\right)^{2 \log_{ab} (a+b)} = (ab)^{\log_{ab} (a+b)} = a + b.$$

Ответ: $a + b$. ◀

► **Задача 5.** Известно, что $\log_7 2 = a$. Найти $\log_{1/2} 28$.

Решение. Здесь надо применить формулу (9) перехода к другому основанию:

$$\log_{1/2} 28 = \frac{\log_7 28}{\log_7 \frac{1}{2}} = \frac{\log_7 7 + \log_7 4}{\log_7 2^{-1}} = \frac{1 + \log_7 2^2}{a} = -\frac{1 + 2a}{a}.$$

Ответ: $-\frac{1+2a}{a}$. ◀

► **Задача 6.** Известно, что $\lg 2 = a$, $\lg 13 = b$. Найти $\log_5 3,38$.

Решение. $\log_5 3,38 = \frac{\lg 3,38}{\lg 5} = \frac{\lg(338:100)}{\lg(10:2)} = \frac{\lg 338 - 2}{1 - \lg 2} = \frac{\lg(13^2 \cdot 2) - 2}{1 - a} = \frac{2 \lg 13 + \lg 2 - 2}{1 - a} = \frac{2b + a - 2}{1 - a}.$

Ответ: $\frac{2b+a-2}{1-a}$ ◀

► **Задача 7.** Известно, что $\log_{ab} a = 4$. Найти $\log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} &= \log_{ab} a^{\frac{1}{3}} - \log_{ab} b^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \log_{ab} a - \frac{1}{2} \log_{ab} b = \\ &= \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \log_{ab} (ab/a) = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} (\log_{ab} ab - \log_{ab} a) = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{17}{6}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{17}{6}$. ◀

► **Задача 8.** $\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + 0,5$.

Решение. Область допустимых значений здесь состоит из таких x , что $x > 0$, $x \neq 1$. Обозначим $\log_3 x$ через y . Тогда $\log_x 3 = \frac{1}{y}$, $\log_{\sqrt{x}} 3 = 2 \log_x 3 = \frac{2}{y}$, $\log_3 \sqrt{x} = \frac{1}{2} y$ и наше уравнение примет вид

$$y + \frac{1}{y} = \frac{2}{y} + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \iff y = 2, -1.$$

Если $\log_3 x = 2$, то $x = 3^2 = 9$, а если $\log_3 x = -1$, то $x = \frac{1}{3}$.

Ответ: $9, \frac{1}{3}$. ◀

► **Задача 9.** $\log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0$.

Решение. У данного уравнения ОДЗ состоит из $x > 0, x \neq \frac{1}{9}$. В области допустимых значений нижеприведенные преобразования являются равносильными:

$$\begin{aligned} \log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0 &\iff \frac{1}{\log_7(4x+1)} + \frac{1}{\log_7(9x)} \iff \\ \iff \frac{\log_7(4x+1) + \log_7(9x)}{\log_7(4x+1) \log_7(9x)} = 0 &\iff \log_7(4x+1) + \log_7(9x) = 0 \iff \\ \iff \log_7(9x(4x+1)) = 0 &\iff 9x(4x+1) = 1 \iff x = \frac{1}{12}, -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Учитывая ОДЗ, получаем

Ответ: $\frac{1}{12}$. ◀

► **Задача 10.** $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$.

Решение. В этом примере ОДЗ состоит из таких x , что $x > 0$, $\log_2 x > 0$, $\log_4 x > 0$, т.е. из всех $x > 1$.

Пусть $\log_2 x = y$. Тогда $\log_4 x = \frac{1}{2}y$ и мы имеем уравнение

$$\log_4 y + \log_2\left(\frac{1}{2}y\right) = 2 \iff \frac{1}{2}\log_2 y + \log_2 y + \log_2 \frac{1}{2} = 2 \iff \log_2 y = 2.$$

Значит, $y = 4 \iff \log_2 x = 4 \iff x = 16$.

Ответ: 16. ◀

► **Задача 11.** $\log_4(x^2) + \log_2(x+5) = 2$.

Решение. Область допустимых значений этого уравнения определяется условиями $x^2 > 0$, $x+5 > 0 \iff x > -5$, $x \neq 0$.

Применяя формулы (6) и (7), получим $\log_4(x^2) = 2\log_4|x| = \log_2|x|$. Значит, наше уравнение приведет к виду

$$\log_2|x| + \log_2(x+5) = 2 \iff \log_2(|x|(x+5)) = 2 \iff |x|(x+5) = 4.$$

Последнее уравнение легко решается при помощи раскрытия модуля (см. урок 8).

Ответ: $-4, -1, \frac{\sqrt{41}-5}{2}$. ◀

► **Задача 12.** $(1 + \frac{x}{2})\log_2 3 - \log_2(3^x - 13) = 2$.

Решение. ОДЗ определяется условием $3^x > 13$. По формуле (5) имеем $(1 + \frac{x}{2})\log_2 3 = \log_2 3^{1+\frac{x}{2}} = \log_2(3 \cdot 3^{\frac{x}{2}})$. Значит, если мы обозначим $3^{\frac{x}{2}}$ через y , то для $y > 0$ исходное уравнение будет эквивалентно следующему:

$$\log_2(3y) - \log_2(y^2 - 13) = 2 \iff \log_2 \frac{3y}{y^2 - 13} = 2 \iff \frac{3y}{y^2 - 13} = 4.$$

Получившееся квадратное уравнение решается без труда. Оно имеет корни 4 и $-\frac{13}{4}$. Из $y > 0$ следует, что $y = 4 \iff 3^{\frac{x}{2}} = 4 \iff x = 2\log_3 4$.

Ответ: $x = 2\log_3 4 = 4\log_3 2$. ◀

► **Задача 13.** $\log_x \left(\frac{4x+5}{6-5x} \right) < -1$.

Решение. Поскольку $-1 = \log_x \frac{1}{x}$, наше неравенство приводится к стандартному виду (17):

$$\log_x \left(\frac{4x+5}{6-5x} \right) < \log_x \frac{1}{x}.$$

Согласно формуле (17) мы должны рассмотреть два случая.

1. $x > 1$. Тогда неравенство принимает вид

$$0 < \frac{4x+5}{6-5x} < \frac{1}{x}.$$

В случае, когда $x > 1$, числитель дроби $\frac{4x+5}{6-5x}$ положителен, так что левое неравенство выполняется только при $x < \frac{6}{5}$. Тогда правое неравенство можно умножить на положительную величину $x(6-5x)$. Получим $4x^2 + 5x < 6 - 5x \iff x \in (-3, \frac{1}{2})$.

Поскольку мы отбираем лишь $x > 1$, в этом случае решений нет.

2. $0 < x < 1$. Здесь мы должны решить неравенство

$$\frac{4x+5}{6-5x} > \frac{1}{x} \iff 4x^2 + 5x > 6 - 5x \iff x \in (-\infty, -3) \cup (\frac{1}{2}, +\infty).$$

Учитывая, что $0 < x < 1$, получаем

Ответ: $(\frac{1}{2}, 1)$. ◀

► **Задача 14.** $\log_{1/3}(x^2 - 6x + 18) - 2\log_{1/3}(x - 4) < 0$.

Решение. ОДЗ данного неравенства состоит из всех $x > 4$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \log_{1/3}(x^2 - 6x + 18) - 2\log_{1/3}(x - 4) < 0 &\iff \\ \log_{1/3} \frac{x^2 - 6x + 18}{(x - 4)^2} < \log_{1/3} 1 &\iff \iff \frac{x^2 - 6x + 18}{x^2 - 8x + 16} > 1 \iff x > -1. \end{aligned}$$

Значит, все x из ОДЗ будут решениями исходного неравенства.

Ответ: $x > 4$. ◀

► **Задача 15.** $\log_{x/6}(\log_x(\sqrt{6-x})) > 0$.

Решение. В этой задаче важно не просто разобрать все случаи, а разобрать их экономно, чтобы из-за большого числа вычислений не наделать ошибок.

Заметим, что ОДЗ говорит нам, что $0 < x < 6$, $x \neq 1$. Но тогда $\frac{x}{6} < 1$, и можно эквивалентно переписать неравенство в виде

$$0 < \log_x \sqrt{6-x} < 1.$$

Здесь уже нужно разбирать два случая.

1. $x > 1$. Тогда последнее неравенство равносильно $1 < \sqrt{6-x} < x$, откуда находим, что $\boxed{2 < x < 5}$.

2. $0 < x < 1$. Тогда надо решить неравенство $x < \sqrt{6-x} < 1$. Правая его часть выполняется при $x > 5$, а левая — при $-3 < x < 2$, т.е. в этом случае решений нет.

Ответ: $(2, 5)$. ◀

► **Задача 16.** $\begin{cases} 2 - \log_2 y = 2 \log_2(x + y), \\ \log_2(x + y) + \log_2(x^2 - xy + y^2) = 1. \end{cases}$

Решение. Область допустимых значений системы состоит из таких пар (x, y) , что $x > 0, x + y > 0$. В этой области равносильны следующие

преобразования:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2 - \log_2 y = 2 \log_2(x + y), \\ \log_2(x + y) + \log_2(x^2 - xy + y^2) = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x + y)^2 + \log_2 y = 2, \\ \log_2((x + y)(x^2 - xy + y^2)) = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 y(x + y)^2 = 2, \\ (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x + y)^2 = 4, \\ 2(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Приравняем левые части уравнений системы:

$$y(x+y)^2 = 2(x+y)(x^2-xy+y^2) \iff (x+y)(2x^2-3xy+y^2) = 0 \iff x = y, \frac{1}{2}y.$$

Сокращение на $x + y$ законно ввиду $x + y > 0$.

Если $x = y$, то из первого уравнения находим $x = y = 1$, а если $y = 2x$, то $x = \sqrt[3]{\frac{2}{9}}$, $y = 2\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$.

Ответ: $(1, 1)$, $(\sqrt[3]{\frac{2}{9}}, 2\sqrt[3]{\frac{2}{9}})$. ◀

Урок окончен. Оценка выставляется стандартным образом.

Домашнее задание

- ▶ 1. $\frac{1}{2} \log_2(x^2) + \log_2(x - 6) = 4$
- ▶ 2. $\log_{49}(2x^2 + x - 5) + \log_{\frac{1}{7}}(1 + x) = 0$
- ▶ 3. $\log_{x+2}(2x^2 + x) \leq 2$
- ▶ 4. $\log_{x+1}(2x^2 - 3x + 1) \leq 2$
- ▶ 5. $\log_{10-x^2}(\frac{16}{5}x - x^2) < 1$
- ▶ 6. $\log_{4-x}(x^2 - 10) < 2$
- ▶ 7. $\log_{\frac{1}{3}}(11 + x) = 2 \log_{\frac{1}{3}}(\sqrt{x+1} + 2)$
- ▶ 8. $\log_{2x+2}(2x^2 - 8x + 6) = 2$
- ▶ 9. $\begin{cases} \log_x 25 + 2y = 2 \\ -(\log_x(0, 2))^3 + y = 1 \end{cases}$
- ▶ 10. $\log_{5x-4x^2}(4^{-x}) > 0$
- ▶ 11. $\log_{-5x^2-6x}(6^x) > 0$
- ▶ 12. $\log_5((x-8)^2) = 2 + 2 \log_5(x-2)$
- ▶ 13. $2 \log_{\sqrt{2}} 2 + \log_{\sqrt{2}}(2^{x^2-1} - \frac{1}{4}) < \log_{\sqrt{2}} 31$
- ▶ 14. $\log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}(x^2 + 4x + 11 - 4\sqrt{3}) < 2$
- ▶ 15. $\log_{(x+1)^2} 8 + 3 \log_4(x+1) \geq 9\frac{1}{4}$
- ▶ 16. $4 \log_2 x + \log_2 \left(\frac{x^2}{8(x-1)} \right) \leq 4 - \log_2(x-1) - \log_2^2 x$

- 17. $\log_3(2x^2 - x) - 1 \leq \log_3(6x - 3) - \log_3^2 x$
- 18. $\log_5((2+x)(x-5)) < \log_{25}((x-5)^2)$
- 19. $\frac{3 \log_{0,5} x}{2 - \log_{0,5} x} \geq 2 \log_{0,5} x + 1$
- 20. $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 3 \\ 2x + 5y = 52 \end{cases}$
- 21. $\frac{1}{2} \log_{x+4}(x^2 + 2x + 1) + \log_{-x-1}(-x^2 - 5x - 4) \leq 3$
- 22. $\begin{cases} \log_y x - 2 \log_x y = 1 \\ x^2 + 2y^2 = 3 \end{cases}$
- 23. $\log_2(4^x + 2^x) = x + \log_2(2^{x+1} - 3)$
- 24. $\log_3(3^x - 1) \cdot \log_3(3^{x+1} - 3) = 6$
- 25. $\log_3(4 \cdot 3^{x-1} - 1) = 2x - 1$
- 26 [2]. $\log_2^2 x + (x-1) \log_2 x = 6 - 2x$
- 27. $\log_{\frac{1}{2}} \log_8 \frac{x^2 - 2x}{x - 3} < 0$
- 28. $\log_{\sqrt{3}}(x+1) - \log_{\sqrt{3}}(x-1) > \log_3 4$
- 29. $\frac{1}{2} \log_3(-x-16) - \log_3(\sqrt{-x}-4) = 1$
- 30. $2 \log_2(\log_2 x) + \log_{\frac{1}{2}}(\log_2(2\sqrt{2}x)) = 1$
- 31. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 \log_{1/5}(x^2 - \frac{4}{5})} > 1$
- 32. $\frac{1}{\log_2 x} \leq \frac{1}{\log_2 \sqrt{x+2}}$
- 33. $x^{\log_{\sqrt{x}}(2x)} = 4$
- 34. $x^{\log_2 x + 2} = 256$
- 35. $x^{\log_3(3x)} = 9$
- 36. $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24-x^2-2x}{14} > 1$

Урок 20

Смешанная тригонометрия

Дойдя до этого урока, большинство моих учеников тригонометрию забывали процентов на восемьдесят. В той или иной степени выветривались из их памяти и другие разделы курса. На этом уроке никаких новых методов предлагаться не будет. Основная задача его — заставить вас вспомнить тригонометрические и другие методы решения уравнений и применить их к конкретным задачам. Я все время буду напоминать вам, что до окончания

вступительных экзаменов вы должны держать в голове **все пройденные методы**.

Это, конечно же, совсем не просто. Но если бы все в жизни было просто, то жить было бы неинтересно. Оценка, которую вы заработаете за задачи, предлагаемые ниже, покажет вам, в каком состоянии находятся ваши знания. Если она окажется существенно ниже, чем вы ожидали, не переживайте. Вы ведь еще не прикладывали никаких усилий для того, чтобы держать в голове все пройденное. Давайте, начиная с этого урока, стараться это делать. Я советую начать с запоминания (наизусть, как стихи) названий всех — да-да, всех! — пройденных уроков. После того как названия выучены, мысленно проходя по каждому из названий, попытайтесь вспомнить методы, формулы и задачи, которые на соответствующем уроке проходились. И так для **всех** уроков. За такой тест для памяти ставьте себе оценку по стандартным критериям (т.е. 50% правильных ответов — «три», 75% — «четыре» и 90% — «пять»). Далее, обратите внимание на связь между оценками за домашние задания, за работу на уроке и за тест для памяти. Стремитесь подтянуться до лучшей своей оценки.

► **Задача 1.** $\frac{\cos x}{|\cos x|} = \sin x + \cos x$.

Решение. ОДЗ уравнения состоит из таких x , что $\cos x \neq 0$. Чтобы раскрыть модуль, надо рассмотреть два случая (см. урок 8).

1. $\cos x > 0$. Тогда $|\cos x| = \cos x$ и уравнение принимает вид

$$\sin x + \cos x = 1 \iff \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff x = (-1)^n \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Если $n = 0$, то $x = 0$. Если $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{2}$. Если продолжать придавать n целые значения, то новых точек на круге уже не будет. Следовательно, решения представляются сериями $x = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ и $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Ясно, что косинус положителен для первой из них, а для второй он равен нулю. Итак $\boxed{2n\pi, n \in \mathbb{Z}}$.

2. $\cos x < 0$. Тогда $|\cos x| = -\cos x$ и исходное уравнение принимает вид

$$\sin x + \cos x = -1 \iff x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Точно так же, как в первом случае, находим, что решения представляются на круге сериями $x = \pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ и $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Из них только первая удовлетворяет условию $\cos x < 0$.

Ответ: $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. ◀

► **Задача 2.** $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$.

Решение. Пусть $y = \sin^2 x$. Тогда $\cos^2 x = 1 - y$, и наше уравнение принимает вид

$$81^y + 81^{1-y} = 30 \iff 81^y + \frac{81}{81^y} = 30 \iff (81^y)^2 - 30 \cdot 81^y + 81 = 0,$$

откуда либо $81^y = 3$, либо $81^y = 27$ и, тем самым, либо $\sin^2 x = \frac{1}{4}$, либо $\sin^2 x = \frac{3}{4}$.

Ответ: $(-1)^n(\pm\frac{\pi}{6}) + n\pi$, $\pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $\pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 3.** $(1 + 2 \sin x) \sqrt{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 0$.

Решение. Очевидно, все решения уравнения $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$ должны войти в ответ. Что касается уравнения $1 + 2 \sin x = 0 \iff \sin x = -\frac{1}{2} \iff x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, то из его решений надо выбрать такие, что $\cos(x + \frac{\pi}{4}) \geq 0$. Серия $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, очевидно, разбивается на две: $x = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, и $x = -\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ (убедитесь в этом, нарисовав соответствующие точки на круге).

Если $x = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, то

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2n\pi) = \cos \frac{\pi}{12} > 0.$$

Мы опустили $2n\pi$, поскольку из-за периодичности косинуса имеем $\cos(\alpha + 2n\pi) = \cos \alpha$ для любого α . Следовательно, серия $x = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, есть часть ответа.

Если $x = -\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, то

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{6} + 2n\pi) = \cos(-\frac{7\pi}{12}) < 0,$$

т.е. эта серия не подходит.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 4** [2]. $\sqrt{\sin x + \cos x} = \cos 2x$.

Решение. Наше уравнение эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = \cos^2 2x, \\ \cos 2x \geq 0. \end{cases}$$

Пусть $\sin x + \cos x = t$. Тогда $\cos^2 2x = (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = (\cos x + \sin x)^2 \times (\cos x - \sin x)^2 = t^2(\cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x) = t^2(2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x - 2 \sin x \cos x) = t^2(2 - t^2)$.

Уравнение четвертой степени $t^4 - 2t^2 + t = 0$ решается, поскольку у него легко угадать корни 0 и 1. Остальные корни его равны $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Вспоминая, что $t = \sin x + \cos x$, заключаем, что $t = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2} < -\sqrt{2}$ не годится, так как $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

1) Пусть $\sin x + \cos x = 0 \iff x = -\frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. Тогда $\cos 2x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = 0 \cdot (\cos x - \sin x) = 0$ и, значит, вся вышеприведенная серия входит в ответ.

2) Пусть $\sin x + \cos x = a > 0$, где a — одно из чисел $1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Из серии $x = (-1)^n \arcsin \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$, нам надо выбрать такие x , что $\cos 2x \geq 0$. Но $\cos 2x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})$; мы видим, что из тех x , для которых $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{a}{\sqrt{2}} > 0$, надо найти такие, что $\cos(x + \frac{\pi}{4}) \geq 0$. У нас либо $x + \frac{\pi}{4} = \arcsin a + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$, либо $x + \frac{\pi}{4} = \pi - \arcsin a + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$.

Легко видеть, что в первой серии $x + \frac{\pi}{4}$ лежит в первой четверти, так что все такие x годятся. Во второй серии $x + \frac{\pi}{4}$ лежит во второй четверти ($\Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{4}) < 0$), и ни одно такое x не подходит.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + n\pi, 2n\pi, \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 5.** $3(\log_2(\sin x))^2 + \log_2(1 - \cos 2x) = 2$.

Решение. Поскольку $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$, область допустимых значений уравнения состоит из тех x , для которых $\sin x > 0$. Имеем $\log_2(1 - \cos 2x) = \log_2(2\sin^2 x) = 1 + 2\log_2 \sin x$. Обозначив $\log_2 \sin x$ через t , получим уравнение:

$$3t^2 + 2t - 1 = 0 \iff t = -1, \frac{1}{3} \iff \sin x = \frac{1}{2}, 2^{\frac{1}{3}}.$$

Поскольку $2^{\frac{1}{3}} > 2^0 = 1$, только решения уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ входят в ответ.

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 6.** $\sqrt{2\cos x - 1} = \sin x$.

Решение. Уравнение эквивалентно системе:

$$\begin{cases} 2\cos x - 1 = \sin^2 x, \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos^2 x + 2\cos x - 2 = 0, \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos x = -1 \pm \sqrt{3}, \\ \sin x \geq 0. \end{cases}$$

Уравнение $\cos x = -1 - \sqrt{3} < -1$ не имеет решений; решением уравнения $\cos x = \sqrt{3} - 1$ являются две серии: $x = \arccos(\sqrt{3} - 1) + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$, и $x = -\arccos(\sqrt{3} - 1) + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$. Ясно, что синус положителен только для первой из них.

Ответ: $x = \arccos(\sqrt{3} - 1) + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 7** [2]. $\log_{\sqrt{2}(\sin x + \cos x)}(\sqrt{6}\sin x + \sqrt{2}\cos x) \geq 1$.

Решение. Данное неравенство эквивалентно совокупности двух систем:

$$(1) \quad \begin{cases} \sqrt{2}(\sin x + \cos x) > 1, \\ \sqrt{6}\sin x + \sqrt{2}\cos x \geq \sqrt{2}(\sin x + \cos x), \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 0 < \sqrt{2}(\sin x + \cos x) < 1, \\ 0 < \sqrt{6} \sin x + \sqrt{2} \cos x \leq \sqrt{2}(\sin x + \cos x). \end{cases}$$

Применяя формулу $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ и упрощая второе неравенство системы (1), приведем ее к виду

$$\begin{cases} \sin(x + \frac{\pi}{4}) > \frac{1}{2}, \\ \sin x \geq 0. \end{cases}$$

Обозначим $x + \frac{\pi}{4}$ через y и покажем, как решить неравенство $\sin y > \frac{1}{2}$. Посмотрим на картинку (рис. 1).

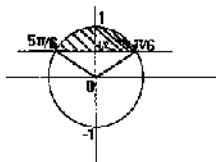


Рис. 1

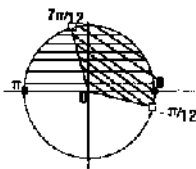


Рис. 2

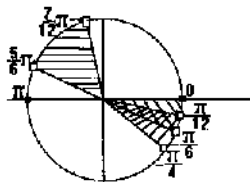


Рис. 3

Как известно, синус угла, задаваемого на круге, есть ордината соответствующей точки. Нам надо описать все точки на круге, ордината которых больше $\frac{1}{2}$. Для этого проведена горизонтальная прямая на высоте $\frac{1}{2}$ от оси абсцисс (на этой оси сейчас откладывается y). Заштрихованная область круга и будет искомым множеством. На прямой оно будет состоять из бесконечного числа интервалов, получающихся из интервала $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ сдвигом на $2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

Следовательно, $\frac{\pi}{6} + 2n\pi < x + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, $\iff -\frac{\pi}{12} + 2n\pi < x < \frac{7\pi}{12} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

Аналогично рассуждая, найдем, что $\sin x \geq 0 \iff 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Множества решений неравенств $\sin(x + \frac{\pi}{4}) > \frac{1}{2}$ и $\sin x \geq 0$ (уже относительно x !) изображены на рис. 2.

Горизонтальная штриховка задает область, где $\sin x \geq 0$, а косая — где $\sin(x + \frac{\pi}{4}) > \frac{1}{2}$. Решением первой системы будет пересечение этих областей, т.е. множество $\boxed{2n\pi \leq x < \frac{7\pi}{12} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}}$.

Разберемся теперь с системой (2). Неравенство $0 < \sqrt{2}(\sin x + \cos x) < 1$ эквивалентно $0 < \sin(x + \frac{\pi}{4}) < \frac{1}{2}$, которое равносильно совокупности неравенств

$$2k\pi < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \quad \frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x + \frac{\pi}{4} < \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

(нарисуйте сами соответствующую картинку).

Из этих неравенств без труда находится x :

$$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}; \quad \frac{7\pi}{12} + 2k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Второе двойное неравенство системы удобнее записать в виде системы:

$$\begin{cases} \sqrt{6} \sin x + \sqrt{2} \cos x > 0, \\ \sin x \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin(x + \frac{\pi}{6}) > 0, \\ \sin x \leq 0. \end{cases}$$

Решения этой системы задаются пересечением двух областей $-\pi + 2n\pi \leq x \leq 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ (задающей решения неравенства $\sin x \leq 0$) и $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ (задающей решения неравенства $\sin(x + \frac{\pi}{6}) > 0$). Рисунок сделайте, пожалуйста, сами. Вы увидите, что пересечение этих областей состоит из серии полуинтервалов $(-\frac{\pi}{6} + 2n\pi, 2n\pi]$, $n \in \mathbf{Z}$.

Осталось пересечь область решений первого и второго двойных неравенств.

Посмотрим на картинку (рис. 3). Нашим вторым куском ответа будет та область, где две штриховки накладываются.

Ответ: $2n\pi \leq x < \frac{7}{12}\pi + 2n\pi$, $-\frac{\pi}{6} + 2n\pi < x < -\frac{\pi}{12} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 8.** $1 + 2^{\operatorname{tg} x} = 3 \cdot 4^{\frac{\sin(\frac{\pi}{4}-x)}{\sqrt{2}\cos x}}$.

Решение. Заметим, что $\frac{\sin(\frac{\pi}{4}-x)}{\sqrt{2}\cos x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x}{\sqrt{2}\cos x} = \frac{1-\operatorname{tg} x}{2}$.

Обозначим $2^{\operatorname{tg} x}$ через y . Тогда наше уравнение примет вид

$$1 + y = 3 \cdot \frac{2}{y} \iff y^2 + y - 6 = 0 \iff y = 2, -3.$$

Из $y > 0$ следует, что $y = 2 \iff \operatorname{tg} x = 1 \iff x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 9.** $\log_{x-x^2}(\sin x + \cos x) = \log_{x-x^2}(1 + \sin 2x)$.

Решение. Область допустимых значений данного уравнения состоит из таких x , что $\sin x + \cos x > 0$ и $x - x^2 > 0$.

Теперь можно избавиться от логарифмов:

$$\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 \iff \sin x + \cos x = 0, 1.$$

Учитывая ОДЗ, заключаем, что $\sin x + \cos x = 1 \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = 2n\pi, & n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

Согласно ОДЗ имеем $x - x^2 > 0 \iff x \in (0, 1)$. Но $|2n\pi| > 1$ и $|\frac{\pi}{2} + 2n\pi| = \frac{\pi}{2}|1 + 4n\pi| > 1$, так что решений нет.

Ответ: $\emptyset$. ◀

► **Задача 10.** $4^{\operatorname{tg}^2 x} - 4^{\frac{1}{1+\cos 2x}} \cdot \log_2 \sqrt[3]{2} 4 = -\log_{\sin x}(\frac{1-\cos 2x}{2})$.

Решение. ОДЗ уравнения состоит из таких x , что $\sin x \in (0, 1)$. Заметим, что $\log_2 \sqrt[3]{2} 4 = \frac{3}{2}$, $\frac{1}{1+\cos 2x} = \frac{1}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg}^2 x)$ и $\log_{\sin x}(\frac{1-\cos 2x}{2}) = \log_{\sin x} \sin^2 x = 2$.

Теперь наше уравнение принимает вид

$$2^{2\operatorname{tg}^2 x} - 3 \cdot 2^{\operatorname{tg}^2 x} + 2 = 0 \iff 2^{\operatorname{tg}^2 x} = 1, 2.$$

Если $2^{\operatorname{tg}^2 x} = 1$, то $\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$ — противоречит ОДЗ.

Если $2^{\operatorname{tg}^2 x} = 2$, то $\operatorname{tg} x = \pm 1 \iff x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. Отбирая из этой серии те x , для которых синус положителен, получаем

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 11** [3]. $\sqrt{4\sin^2 x - 1} \cdot \log_{\sin x} \left(\frac{x-5}{2x-1} \right) \geq 0$.

Решение. Область допустимых значений неравенства задается системой

$$\begin{cases} \sin x \in [\frac{1}{2}, 1), \\ x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (5, +\infty). \end{cases}$$

Чтобы избавиться от квадратного корня, рассмотрим те x из ОДЗ, для которых $4\sin^2 x - 1 = 0$. Ясно, что это будут решения исходного неравенства. После того, как мы их найдем, квадратный корень можно будет отбросить.

Решениями уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ являются числа $(-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. При $n = 0, 1$ получаем числа $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$. При $n = 2$ получаем $x = \frac{13\pi}{6} > 5$. Ясно, что и все большие n годятся. Если $n < 0$, то $x < 0 < \frac{1}{2}$, т.е. все такие n подходят.

Итак, первый кусок ответа есть $\boxed{(-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0, 1}$.

Нам осталось решить в ОДЗ неравенство

$$\log_{\sin x} \left(\frac{x-5}{2x-1} \right) \geq 0 \iff \frac{x-5}{2x-1} \leq 1 \iff x \in (-\infty, -4] \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty \right).$$

Учитывая ОДЗ, заключаем, что в ответ войдут все интервалы, задаваемые неравенством $\sin x \in (\frac{1}{2}, 1)$, пересеченные с множеством $(-\infty, -4] \cup (5, +\infty)$. Семейство вышеупомянутых интервалов можно записать так:

$$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \right), n \in \mathbf{Z}.$$

Посмотрим на рис. 4. На нем изображено несколько интервалов семейства. Интервалы $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ и $(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6})$ выпадают полностью (они получаются из указанной серии при $n = 0$). Интервалы, получающиеся при $n \geq 1$, лежат правее числа 5 и, следовательно, попадают в ответ. Если $n = -1$, то интервал $(-\frac{11\pi}{6}, -\frac{3\pi}{2})$ лежит левее числа -4 , а интервал $(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{6})$ содержит -4 , так что в ответ войдет полуинтервал $(-\frac{3\pi}{2}, -4]$. При $n < -1$ все интервалы войдут в ответ.

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$; $-\frac{3\pi}{2} < x \leq -4$, $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$; $\frac{\pi}{2} + 2n\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0, 1$. ◀

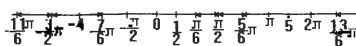


Рис. 4

Урок окончен. Оценка выставляется стандартным образом.

Домашнее задание

- ▶ 1. $\sqrt{\sin x} + \cos x = 0$
- ▶ 2. $\sqrt{\cos x} + \sin x = 0$
- ▶ 3. $4|\cos x| + 3 = 4\sin^2 x$
- ▶ 4. $\log_2(3\sin x - \cos x) + \log_2(\cos x) = 0$
- ▶ 5. $\frac{|\sin x|}{\sin x} = 1 - \cos 2x$
- ▶ 6. $\operatorname{tg}(4\sin x) = \sqrt{3}$
- ▶ 7. $|\cos^2 \frac{x}{2} - \frac{2}{5}| = 5\cos x + 1$
- ▶ 8. $\sqrt{1 - \cos 2x} = \sin 2x$
- ▶ 9. $\sqrt{\frac{3}{2\sqrt{2}} \cos x - 1} + \sin x = 0$
- ▶ 10. $(2 + 3\cos 2x)(\sqrt{2\cos 2x + 3\sin x + 3} - 2\sin x + 1) = 0$
- ▶ 11. $4^{\sin x} + 2^{5-2\sin x} = 18$
- ▶ 12. $(1 + 2\cos x)\sqrt{\sin(x + \frac{\pi}{4})} = 0$
- ▶ 13. $\sqrt{\frac{1}{2} + \sin x} = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin 3x}$
- ▶ 14. $6\sin x - \frac{1}{6} = \sqrt{34\sin x - \frac{35}{36}}$
- ▶ 15. $2\sin(\sqrt{x} + \frac{\pi}{2}) = \sqrt{3}$
- ▶ 16. $\sqrt{-\cos x} = \sqrt{-1 + 2\sin^2 x}$
- ▶ 17. $\log_2(\cos 2x + \cos \frac{x}{2}) + \log_{\frac{1}{2}}(\sin x + \cos \frac{x}{2}) = 0$
- ▶ 18. $\log_5(\cos \frac{x}{2} + 3\operatorname{tg} x - \frac{3\sqrt{3}}{2}) + \log_{\frac{1}{3}}(\cos \frac{x}{2} + \operatorname{tg} 2x - \frac{3\sqrt{3}}{2}) = 0$
- ▶ 19. $\sqrt{5\sin x + \cos 2x} + 2\cos x = 0$
- ▶ 20. $4|\sin x| + 2\cos 2x = 3$
- ▶ 21. $|\cos x|^{\sqrt{2x-3} \cdot \operatorname{tg} |\cos x| \cdot \left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\right)} \geq 1$
- ▶ 22. $\sqrt{\sin x + \cos x} = \sin x - \cos x$
- ▶ 23. $\sqrt{5 - 2\sin x} \geq 6\sin x - 1$
- ▶ 24. $\sin 4x \sin x - \sin 3x \sin 2x = \frac{1}{2} \cos 3x + \sqrt{1 + \cos x}$
- ▶ 25. $\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{2} \cos 3x = 0$
- ▶ 26. $\log_{\sin x - \cos x}(\sin x - 5\cos x) \geq 1$
- ▶ 27. $\log_{\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}} \sqrt{1 + 2\cos 2x} < 1$
- ▶ 28. $\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}(\log_{\operatorname{tg} x}(2 + 4\cos^2 x) - 2) \geq 0$

- 29. $\log_{\text{ctg } x} \left(\frac{1+\sin x}{1-\cos x} \right) < 1$
- 30. $\log_{\frac{6x-x^2}{11}} (-\cos x - \cos 3x) = \log_{\frac{6x-x^2}{11}} (-\cos 2x)$
- 31. $\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} = \sqrt{2}(\cos x - \frac{1}{2})$
- 32. $|\sin x + 2 \sin 2x + \sin 3x| = 1 + 2 \cos x + \cos 2x$
- 33. $1 - \sqrt{\frac{3+10 \sin^2 x}{\sin^2 x}} = 2 \text{ ctg } x$
- 34. $\sqrt{12 - 5 \sin(x + \frac{\pi}{4})} + 2 \sin x = \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2 \cos x$
- 35. $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}^{\frac{1}{\sin x}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}^{\frac{1}{\sin x}} = \frac{17}{4}$

Урок 21

Задачи, содержащие одновременно логарифмы, модули, радикалы и т.п.

Этот урок является логическим продолжением предыдущего. Никаких новых способов решения задач мы сегодня разучивать не будем. Так же как и в прошлый раз, наша цель — применение всех пройденных ранее методов при решении конкретной задачи. Я выделил тригонометрию в отдельный урок (урок 20), поскольку она почему-то больше всего забывается. Так же как и на предыдущем уроке, необходимо четко помнить все нами изученное о логарифмах, модулях, радикалах, рациональных уравнениях и неравенствах. На прошлом уроке мы договорились, что вы будете стремиться держать в голове все предыдущее. Если не получается пока все, то ограничьтесь хотя бы уроками 8–12 и 18, 19. Приступайте к этому уроку только если вы имеете положительную оценку по названному сокращенному тесту на память.

- **Задача 1.** $|\lg |x - 1| + 2| \geq 3$.

Решение. Пусть $\lg |x - 1| = y$. Тогда получаем неравенство $|y + 2| \geq 3 \iff y \in (-\infty, -5] \cup [1, +\infty)$.

Если $\lg |x - 1| \geq 1$, то $|x - 1| \geq 10 \iff x \in (-\infty, -9] \cup [11, +\infty)$.

Если $\lg |x - 1| \leq -5$, то $0 < |x - 1| < 10^{-5} \iff x \in (1 - 10^{-5}, 1) \cup (1, 1 + 10^{-5})$.

Ответ: $x \in (-\infty, -9] \cup [11, +\infty) \cup (1 - 10^{-5}, 1) \cup (1, 1 + 10^{-5})$. ◀

► **Задача 2.** $\frac{\sqrt{x - \frac{1}{2}}}{\log_3(x^2)} \geq 0.$

Решение. Надо рассмотреть два случая: $\begin{cases} \sqrt{x - \frac{1}{2}} \geq 0 \\ \log_3(x^2) > 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} \sqrt{x - \frac{1}{2}} \leq 0 \\ \log_3(x^2) < 0 \end{cases}.$

Первое неравенство первого случая выполняется при любых x из ОДЗ, т.е. при $x \geq \frac{1}{2}$, $x \neq 1$. Значит, решение первой системы состоит из таких x , что $\log_3(x^2) > 0 \iff x > 1$.

Первое неравенство второй системы может выполняться только при $x = \frac{1}{2}$. Ясно, что это x также входит в ответ.

Ответ: $x = \frac{1}{2}$, $x > 1$. ◀

► **Задача 3.** $\log_{|x+6|} 2 \cdot \log_2(x^2 - x - 2) \geq 1.$

Решение. ОДЗ данного неравенства состоит из всех таких x , что $|x + 6| > 0$, $|x + 6| \neq 1$, $x^2 - x - 2 > 0 \iff x \in (-\infty, -7) \cup (-7, -6) \cup (-6, -5) \cup (-5, -1) \cup (2, +\infty)$.

В ОДЗ имеем $\log_{|x+6|} 2 = \frac{1}{\log_2 |x+6|}$, и наше неравенство принимает вид

$$\frac{\log_2(x^2 - x - 2)}{\log_2 |x + 6|} \geq 1 \iff \log_{|x+6|}(x^2 - x - 2) \geq \log_{|x+6|} |x + 6|.$$

А это уже стандартное неравенство, которое по формуле (16) урока 19 разбивается на две системы $\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq |x + 6| \\ |x + 6| > 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} 0 < x^2 - x - 2 \leq |x + 6| \\ 0 < |x + 6| < 1 \end{cases}.$

Решим первую систему. Если $x > -6$, то $|x + 6| = x + 6$ и первое неравенство приобретает вид $x^2 - 2x - 8 \geq 0 \iff x \in (-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$. При $x > -6$ второе неравенство системы равносильно тому, что $x + 6 > 1 \iff x > -5$ и, тем самым, первый кусок ответа есть $x \in (-5, -2] \cup [4, +\infty)$.

Если $x < -6$, то $|x + 6| = -x - 6$ и имеем неравенство $x^2 + 4 \geq 0$, которое, очевидно, выполняется при всех x , так что второй кусок ответа получается из неравенства $-x - 6 > 1 \iff x < -7$.

Мы опускаем подробный разбор всех случаев, доказывающий, что вторая система решений не имеет.

Ответ: $x \in (-\infty, -7) \cup (-5, -2] \cup [4, +\infty)$. ◀

► **Задача 4.** $(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 1) \log_5 \frac{x}{5} + \frac{1}{x}(\sqrt{8x - 2x^2 - 6} + 1) \leq 0.$

Решение. Выражения под вторым радикалом получается из выражения под первым умножением на -2 . Поэтому если хоть одно из этих выражений положительно, то другое отрицательно. Следовательно, ОДЗ неравенства состоит из таких x , что $x^2 - 4x + 3 = 0 \iff x = 1, 3$. При $x = 1$ левая часть равна нулю, так что единица входит в ответ.

Если $x = 3$, то левая часть равна $\log_5 \frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \log_5 3 - 1 + \frac{1}{3} = \log_5 3 - \frac{2}{3} > 0$.
Последнее неравенство выполняется, поскольку $3 > \sqrt[3]{25} \Rightarrow 3 > 5^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \log_5 3 > \frac{2}{3}$. Значит, $x = 3$ не годится.

Ответ: $x = 1$. ◀

► **Задача 5.** $\log_2(\sqrt{x^2 - 4x} + 3) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x+1} + 1}\right) + 1$.

Решение. Область допустимых значений неравенства состоит из тех x , при которых определены радикалы, поскольку в этом случае все выражения под логарифмами будут строго больше нуля. Итак, ОДЗ есть $[-1, 0] \cup [4, +\infty)$.

Имеем

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x+1} + 1} &= -\log_2 \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x+1} + 1} = \\ &= -1 + \log_2(\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x+1} + 1),\end{aligned}$$

тем самым, наше неравенство принимает вид

$$\begin{aligned}\log_2(\sqrt{x^2 - 4x} + 3) &> \log_2(\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x+1} + 1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x} + 3 &> \sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x+1} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} < 2 \Leftrightarrow -1 \leq x < 3.\end{aligned}$$

Учитывая ОДЗ, заключаем, что $x \in [-1, 0]$.

Ответ: $[-1, 0]$. ◀

► **Задача 6.** $\frac{\log_{1-4x^2}(|x|-4)^2}{\log_{1-4x^2}(10x^2+5x+\frac{1}{2})} \leq 2$.

Решение. Здесь очень важно правильно найти ОДЗ и сокращать себе работу при любом удобном случае.

Ясно, что должно быть $1 - 4x^2 > 0, \neq 1 \Leftrightarrow x \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$.
Далее, $10x^2 + 5x + \frac{1}{2} > 0, \neq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\frac{5+\sqrt{45}}{10}) \cup (-\frac{5+\sqrt{45}}{10}, -\frac{5-\sqrt{5}}{20}) \cup (\frac{\sqrt{5}-5}{20}, \frac{\sqrt{45}-5}{20}) \cup (\frac{\sqrt{45}-5}{20}, +\infty)$.

Ввиду того, что $4 - |x| > 0$ при $|x| < \frac{1}{2}$, заключаем, что ОДЗ данного неравенства состоит из таких x , что

$$x \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5+\sqrt{5}}{20}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}-5}{20}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{45}-5}{20}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{45}-5}{20}, \frac{1}{2}\right).$$

Заметим, что левая часть неравенства представляет собой правую часть формулы перехода к другому основанию, т.е. равна

$$\log_{10x^2+5x+\frac{1}{2}}(|x|-4)^2 = 2\log_{10x^2+5x+\frac{1}{2}}(4-|x|),$$

так что в ОДЗ исходное неравенство эквивалентно следующему стандартному:

$$\log_{10x^2+5x+\frac{1}{2}}(4-|x|) \leq \log_{10x^2+5x+\frac{1}{2}}(10x^2+5x+\frac{1}{2}).$$

Рассматриваем два случая.

1) $10x^2 + 5x + \frac{1}{2} > 1 \iff x > \frac{\sqrt{45}-5}{20}$. Последняя эквивалентность имеет место с учетом ОДЗ и того факта, что $\frac{-5-\sqrt{45}}{20} < -\frac{1}{2}$. Значит, автоматически $x > 0$ и $|x| = x$, откуда $4 - x \leq 10x^2 + 5x + \frac{1}{2} \iff x \geq \frac{\sqrt{44}-3}{10}$ — мы опять учли ОДЗ и не рассматривали отрицательных решений последнего квадратного неравенства. Следовательно, мы имеем первый кусок ответа: $\left[\frac{\sqrt{44}-3}{10}, \frac{1}{2} \right)$.

2) $10x^2 + 5x + \frac{1}{2} < 1 \iff x < \frac{\sqrt{45}-5}{20}$ — мы опять воспользовались тем, что второй корень квадратного трехчлена строго меньше нижней границы ОДЗ. Теперь мы должны раскрыть модуль.

2.1) $x \in \left(0, \frac{\sqrt{45}-5}{20} \right)$. Тогда $4 - x \geq 10x^2 + 5x + \frac{1}{2} \iff x \leq \frac{\sqrt{44}-3}{10}$. Из того, что $\frac{\sqrt{44}-3}{10} > \left(0, \frac{\sqrt{45}-5}{20} \right)$, следует, что весь рассматриваемый интервал входит в решение: $x \in \left(0, \frac{\sqrt{45}-5}{20} \right)$.

2.2) $x < 0$. Тогда $4 + x \geq 10x^2 + 5x + \frac{1}{2} \iff x > \frac{-2-\sqrt{39}}{10}$. Из того, что $x > \frac{-2-\sqrt{39}}{10} < -\frac{1}{2}$, следует, что оба отрицательных интервала ОДЗ входят в ответ.

Ответ: $\left[\frac{\sqrt{44}-3}{10}, \frac{1}{2} \right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{45}-5}{20} \right) \cup \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5+\sqrt{3}}{20} \right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}-5}{20}, 0 \right)$. ◀

► **Задача 7.**
$$\begin{cases} 3^{|x^2-5x+6|-\log_3 2} = 2^{-y-1}, \\ 2|y+2| - 5|y| - (y-3)^2 \geq -5. \end{cases}$$

Решение. Прежде всего нужно решить второе неравенство. Пусть $y \geq 0$. Тогда

$$2y + 4 - 5y - y^2 + 6y - 9 \geq -5 \iff y^2 - 3y \leq 0 \iff y \in [0, 3].$$

Если $-2 \leq y \leq 0$, то

$$2y + 4 + 5y - y^2 + 6y - 9 \geq -5 \iff y^2 - 13y \leq 0 \iff y \in [0, 13] \cap [-2, 0] \iff y = 0.$$

Если $y \leq -2$, то

$$-2y - 4 + 5y - y^2 + 6y - 9 \geq -5 \iff y^2 - 9y + 8 \leq 0 \iff y \in [1, 8] \cap (-\infty, -2],$$

т.е. в этом случае решений нет и $0 \leq y \leq 3$.

Прологарифмируем первое уравнение по основанию 3:

$$\log_3 3^{|x^2-5x+6|-\log_3 2} = \log_3 2^{-y-1} \iff |x^2 - 5x + 6| = -y \log_3 2.$$

Левая часть неотрицательна, будучи равна модулю, и $\log_3 2 > 0$. Значит, $-y \geq 0 \iff y \leq 0$. Вспоминая, что говорит об y первое неравенство, заключаем, что $y = 0$. После этого x находится без затруднений.

Ответ: $(2, 0), (3, 0)$. ◀

► **Задача 8.** $\log_4(8(1 + \frac{1}{x})^2) = \sqrt{2 - \log_4 \frac{x}{x+1}} - \log_4 \frac{1}{2}$.

Решение. Область допустимых значений уравнения состоит из таких x , что

$$\begin{cases} \frac{x}{x+1} > 0, \\ 1 + \frac{1}{x} \neq 0, \\ 2 - \log_4 \frac{x}{x+1} \geq 0 \end{cases} \iff x \in \left(-\infty, -\frac{16}{15}\right] \cup (0, +\infty).$$

Поскольку $\log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ и $\log_4(8(1 + \frac{1}{x})^2) = \log_4 8 + \log_4(1 + \frac{1}{x})^2 = \frac{3}{2} + 2\log_4 \frac{x+1}{x}$, мы можем обозначить $\log_4 \frac{x}{x+1}$ через y . Получим уравнение

$$\frac{3}{2} - 2y = \sqrt{2 - y} + \frac{1}{2} \iff y = -\frac{1}{4}.$$

Значит, $\log_4 \frac{x}{x+1} = -\frac{1}{4} \iff x = 1 + \sqrt{2}$.

Ответ: $x = 1 + \sqrt{2}$. ◀

► **Задача 9.** $\sqrt{2 + 2\log_2 \sin x} - 2\log_2 \operatorname{tg} x < 1$.

Решение. Напишем цепочку эквивалентных преобразований данного неравенства:

$$\begin{aligned} \sqrt{2 + 2\log_2 \sin x} - 2\log_2 \operatorname{tg} x < 1 &\iff 0 \leq 2 + 2\log_2 \sin x - 2\log_2 \operatorname{tg} x < 1 \iff \\ &\iff 0 \leq +\log_2 \sin x - \log_2 \operatorname{tg} x < \frac{1}{2} \iff -1 \leq \log_2(\sin x : \operatorname{tg} x) < -\frac{1}{2} \iff \\ &\iff \begin{cases} -1 \leq \log_2 \cos x < -\frac{1}{2}, \\ \sin x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{2} \leq \cos x < \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin x > 0 \end{cases} \iff \\ &\iff \frac{\pi}{4} + 2n\pi < x \leq \frac{\pi}{3} + 2n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2n\pi < x \leq \frac{\pi}{3} + 2n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}$. ◀

Урок окончен. Оценка ставится стандартным образом.

Домашнее задание

- 1. $\log_3 \frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} \geq 0$
- 2. $\sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{4\log_4 x - 2} = 4$
- 3. $1 - \sqrt{1 - 8(\log_{\frac{1}{8}} x)^2} < 3\log_{\frac{1}{4}} x$
- 4. $\frac{\sqrt{\log_{0,5}^2 x - 81} + 2}{\log_{0,5} x - 1} < 1$
- 5. $9^{-|x|} = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x+1|+|x-1|}$

- 6. $|x|^{x^2-x-2} < 1$
- 7. $2^{|x+2|} - |2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} + 1$
- 8. $\operatorname{tg} x^{\cos^2 x} = \operatorname{ctg} x^{\sin x}$
- 9. $\log_3(\sqrt{x} + |\sqrt{x} - 1|) = \log_9(4\sqrt{x} - 3 + 4|\sqrt{x} - 1|)$
- 10 [2]. $\sqrt{\cos 3x + \sqrt{3}\sin 3x - 3\cos^2 x + \cos x + \frac{13}{4}} = \sqrt{3}\sin x + \frac{1}{2}$
- 11. $|2 + \log_{\frac{1}{5}} x| + 3 = |1 - \log_{\frac{1}{5}} x|$
- 12. $3^{\sin 2x + 2\cos^2 x} + 3^{1 - \sin 2x + 2\sin^2 x} = 28$
- 13 [2]. $x^2 \cdot 3^{x-2} + 3^{\sqrt{x}+2} = 3^x + x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}}$
- 14 [2]. $8\sqrt{12 + 16x - 16x^2} + 4x - 4x^2 = 33$
- 15. $\frac{x - 1 - \sqrt{\frac{1}{2} + x - x^2}}{\lg(4x + 1) - \lg 5} \geq 0$
- 16. $\begin{cases} \log_y x - 2\log_x y = 1 \\ x^2 + 2y^2 = 3 \end{cases}$
- 17. $25^{x+1} \geq 10 \cdot 32^{|x-1|+1}$
- 18. $\frac{|x - 2|}{|x - 1| - 1} = 1$
- 19. $\frac{2\log_{1-3|x|}(42x^2 - 14|x| + 1)}{\log_{1-3|x|}(x - \frac{5}{6})^2} \leq 1$
- 20. $\frac{3(4x^2 - 9)}{\sqrt{3x^2 - 3}} \leq 2x + 3$
- 21. $\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt{9x - x^2} + 3) > \log_3 \frac{27}{\sqrt{9x - x^2} + \sqrt{5 - x^2} + 2} - 3$
- 22. $\begin{cases} 2^{|x^2 - 2x - 3| - \log_2 3} = 3^{-y-4} \\ 4|y| - |y - 1| + (y + 3)^2 \leq 8 \end{cases}$
- 23. $8 + 6|3 - \sqrt{x + 5}| > x$
- 24. $\sqrt{5 - 2\sin x} = 6\sin x - 1$
- 25. $3^{|3x-4|} = 9^{2x-2}$
- 26. $\log_5((2 + \sqrt{5})^x - (\sqrt{5} - 2)^x) = \frac{1}{2} - 3\log_{\frac{1}{5}} 2$
- 27. $|\frac{1}{3} - \log_{\frac{1}{8}} x| = |\frac{2}{3} - \log_{\frac{1}{8}} x| - \frac{1}{3}$
- 28. $\sqrt{x} + \sqrt{x(x+2)} + \sqrt{(x+1)^3} = 0$
- 29. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$
- 30. $|x - 2|^{\log_4(x+2) - \log_2 x} < 1$

Глава 6

Начала анализа

Урок 22

Вычисление производной

На этом уроке я не буду давать строгого определения производной. Для письменного экзамена это просто не нужно. Неформально нам с вами надо понимать следующее — для определенных функций $f(x)$ можно вычислить их производную $f'(x)$, которая также является функцией. Мы с вами должны научиться хорошо вычислять производные простейших функций и понимать, что раз производная $f'(x)$ есть тоже функция, с ней можно производить обычные арифметические действия, вычислять значение в точке a , равное $f'(a)$, и т.д.

Для того чтобы научиться вычислять производные элементарных функций, нужно для начала подобно таблице умножения запомнить **наизусть** табличку производных самых наипростейших функций. Вот она:

$$(1) \quad C' = 0 \text{ для любой константы } C.$$

$$(2) \quad x' = 1.$$

$$(3) \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \text{ где } \alpha \text{ — любое число, не зависящее от } x.$$

$$(4) \quad (\sin x)' = \cos x.$$

$$(5) \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

$$(6) \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(7) \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

И опять-таки наизусть необходимо выучить следующие формулы, при

помощи которых можно поиски производных сложных функций сводить к табличным случаям.

(8) $(Cf(x))' = Cf'(x)$, где C — константа, т.е. не функция, а число.

(9) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$.

(10) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

(11) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

(12) $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

У большинства поступающих применение всех формул, кроме (12), не вызывает трудностей. В случае, когда дана сложная функция, трудно бывает понять, что применить надо именно формулу (12), а если это и понято, то неясно, как выделить $f(x)$ и $g(x)$.

Следующий тест поможет вам проверить, насколько хорошо вы понимаете формулу (12).

Дана функция $f(g(x))$. Определить $f(x)$ и $g(x)$.

1. $\sin(x^3)$. 3. $\sqrt{x^2 + x + 1}$. 5. $\operatorname{ctg}(x + 1)$. 7. $2^{\cos x}$. 9. $\frac{1}{\sin x}$.

2. $\operatorname{tg}^2 x$. 4. $\cos 3x$. 6. $(23x - 11)^3$. 8. 3^{5x-2} . 10. $\sin(\cos x)$.

Если вы получили 3 или меньше (по стандартному критерию), то прочтите нижеследующее объяснение. Если у вас оценка выше трех, то пропустите его.

Сложная функция $f(g(x))$ есть $f(y)$ для $y = g(x)$. Чтобы узнать ее, надо попытаться увидеть, что в данном выражении может быть обозначено через y , и сделать эту замену, получив функцию $f(y)$. Для того чтобы применить формулу (12), надо найти $f'(y)$, вместо y подставить $g(x)$, найти $g'(x)$ и перемножить функции $f'(y) = f'(g(x))$ и $g'(x)$.

Заметим еще, что формула (12) позволяет вычислять производные от функций, которые представлены в виде последовательного применения не только двух, а любого числа функций. Например,

$$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x))) \cdot (g(h(x)))' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

► **Задача 1.** $f(x) = x - \frac{1}{3x}$, $f'(1) = ?$

Решение. Поскольку $f(x) = x - 3x^{-1}$, имеем

$$f'(x) = (x - 3x^{-1})' = x' - (3x^{-1})' = 1 - 3(x^{-1})' = 1 - 3(-x^{-2}) = 1 + \frac{3}{x^2}.$$

Значит, $f'(1) = 1 + \frac{3}{1} = 4$.

Ответ: 4. ◀

► **Задача 2.** $y = \cos 3x$, $y' = ?$

Решение. Здесь $y = f(g(x))$, где $f(x) = \cos x$, $g(x) = 3x$. Значит,

$$y' = \cos'(3x) \cdot (3x)' = -\sin 3x \cdot 3(x)' = -3 \sin 3x.$$

Ответ: $-3 \sin 3x$. ◀

► **Задача 3.** $y = \sin^2 \frac{x}{2}$, $y' = ?$

Решение. Опять имеем функцию $f(g(x))$ для $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin \frac{x}{2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} y' &= 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \left(\sin \frac{x}{2} \right)' = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{x}{2} \right)' = \\ &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}(x)' = \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$. ◀

► **Задача 4.** $y = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2}$, $y'(2) = ?$

Решение. Здесь надо применить формулу (11):

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2 - 2)'(x^2 + 2) - (x^2 - 2)(x^2 + 2)'}{(x^2 + 2)^2} = \\ &= \frac{2x(x^2 - 2) - 2x(x^2 + 2)}{(x^2 + 2)^2} = -\frac{8x}{(x^2 + 2)^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $y'(2) = -\frac{8 \cdot 2}{(2^2 + 2)^2} = -\frac{4}{9}$.

Ответ: $-\frac{4}{9}$. ◀

► **Задача 5.** $y = (x^4 - x^2 + 1)^3$, $y' = ?$

Решение. Здесь опять имеем сложную функцию $f(g(x))$, где $f(x) = x^3$ и $g(x) = x^4 - x^2 + 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} y' &= 3(x^4 - x^2 + 1)^2 \cdot (x^4 - x^2 + 1)' = \\ &= 3(x^4 - x^2 + 1)^2 ((x^4)' - (x^2)' + (1)') = 3(x^4 - x^2 + 1)^2 (4x^3 - 2x). \end{aligned}$$

Ответ: $3(x^4 - x^2 + 1)^2 (4x^3 - 2x)$. ◀

► **Задача 6.** $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x - 1}$, $y' = ?$

Решение. Работает формула (11). Применим ее, заметив, что $(x^3 - 3x^2 + 1)' = 3x^2 - 6x$ и $(x - 1)' = 1$:

$$\frac{(3x^2 - 6x)(x - 1) - (x^3 - 3x^2 + 1) \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x - 1}{(x - 1)^2}.$$

Ответ: $\frac{2x^3 - 6x^2 + 6x - 1}{(x-1)^2}$. ◀

► **Задача 7.** $y = \sqrt[3]{4x^3 - 7x^2 + 1}$, $y' = ?$

Решение. Имеем сложную функцию $f(g(x))$, где $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, и $g(x) = 4x^3 - 7x^2 + 1$. Следовательно,

$$y' = \frac{1}{3}(4x^3 - 7x^2 + 1)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (4x^3 - 7x^2 + 1)' = \frac{12x^2 - 14x}{3\sqrt[3]{(4x^3 - 7x^2 + 1)^2}}.$$

Ответ: $\frac{12x^2 - 14x}{3\sqrt[3]{(4x^3 - 7x^2 + 1)^2}}$. ◀

► **Задача 8.** $y = x^2 \cos \frac{1}{x}$, $y' = ?$

Решение. Применим формулу для производной произведения (формула (10)).

$$\begin{aligned} y' &= (x^2)' \cos \frac{1}{x} + x^2 \cdot \left(\cos \frac{1}{x} \right)' = 2x \cos \frac{1}{x} + x^2 \left(-\sin \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x} \right)' \right) = \\ &= 2x \cos \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Ответ: $2x \cos \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}$. ◀

► **Задача 9.** $y = \sin 2x \operatorname{tg} x$, $y' = ?$

Решение. Здесь нужны формулы (10) и (12):

$$y' = (\sin 2x)' \operatorname{tg} x + \sin 2x (\operatorname{tg} x)' = 2 \cos 2x \operatorname{tg} x + \sin 2x \frac{1}{\cos^2 x},$$

откуда после упрощений получаем $y' = 2 \sin 2x$.

Этот же ответ можно получить и другим способом, сначала преобразовав исходную функцию к виду $y = 2 \sin^2 x$ и потом взяв производную.

Ответ: $2 \sin 2x$. ◀

► **Задача 10.** $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$, $y'(0) = ?$

Решение. Можно было бы сначала вычислить производную, а потом подставить в нее значение $x = 0$. Но нас не спрашивали, чему равна производная, так что мы чуть-чуть схитрим и будем вычислять только ее значение в нуле.

Имеем $y = \sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$, где $f(0) = g(0) = 1$, $f'(0) = -1$, $g'(0) = 0$. Следовательно,

$$y'(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{f(0)}{g(0)} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{(g(0))^2} = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$. ◀

Наш урок окончен. Оцените себя по стандартным критериям.

Домашнее задание

- ▶ 1. $y = 2 + x - x^2$, $y' = ?$
- ▶ 2. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$, $y' = ?$
- ▶ 3. $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$, $y'(0) = ?$
- ▶ 4. $y = (5+2x)^{10}(3-4x)^{20}$, $y' = ?$
- ▶ 5. $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$, $y' = ?$
- ▶ 6. $y = \frac{2x}{1-x^2}$, $y' = ?$
- ▶ 7. $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$, $y'(0) = ?$
- ▶ 8. $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$, $y' = ?$
- ▶ 9. $y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$, $y' = ?$
- ▶ 10. $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$, $y' = ?$
- ▶ 11. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $y' = ?$
- ▶ 12. $y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$, $y' = ?$
- ▶ 13. $y = x\sqrt{1+x^2}$, $y' = ?$
- ▶ 14. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$, $y' = ?$
- ▶ 15. $y = \cos 2x - 2 \sin x$, $y' = ?$
- ▶ 16. $y = \sin^k x \cdot \cos kx$, $y' = ?$
- ▶ 17. $y = \sin(\sin(\sin x))$, $y' = ?$
- ▶ 18. $y = \frac{\cos x}{2 \sin^2 x}$, $y' = ?$
- ▶ 19. $y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$, $y' = ?$
- ▶ 20. $y = \frac{\sin^2 x}{\sin(x^2)}$, $y' = ?$

Урок 23

Применения производной

Как ни странно, и на этом уроке нам не потребуется знать, что такое производная. Однако ее свойства мы изучим существенно более глубоко, чем на предыдущем занятии. Напомню, что на этом занятии производная понималась как операция, которая данной функции $f(x)$ ставит в соответствие ее производную $f'(x)$. Мы отмечали, что $f'(x)$ также является функцией, и давали правила вычисления $f'(x)$ для простейших функций f .

В большинстве случаев такое понимание верно отражает ситуацию. Например, когда f определено из табличных функций с помощью арифметических операций, производную $f'(a)$ функции f в точке a можно вычислять так: вычислить по правилам из урока 22 функцию f' и взять ее значение в точке a . Однако так просто может не получиться. Пусть, например, $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Тогда $f(x)$ определена на всей прямой, и $f'(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Мы можем вычислить значение производной $f'(a)$ только при $a \neq 0$ — в нуле она не существует. Значит, может быть так, что функция определена на всей прямой, а производная таковой не является. Кроме того, в приведенном примере формула для производной все-таки подсказывает нам, что производная в нуле не существует. Может, однако, случиться так, что производная в точке имеется, хотя формула, дающая ее значение во всех остальных точках, этого никак не показывает. Я не буду приводить соответствующий пример, поскольку это уже сильно выходит за рамки как школьной программы, так и программ для вступительных экзаменов.

Начиная с этого момента мы должны понимать производную функции $f(x)$ следующим образом: для каждой точки a из ОДЗ функции $f(x)$ либо существует, либо не существует производная (т.е. некоторое число) $f'(a)$ функции f в точке a . Множество всех точек, где существует производная, и является областью определения $f'(x)$. Таким образом, первичным является существование производной в данной точке (заметьте, что я не даю определения!).

Чтобы определить, существует или нет у функции $f(x)$ производная в точке a , нам с вами достаточно руководствоваться следующим правилом:

- если найдется функция $g(x)$ и такие числа p и q , что $p < a < q$, производная $g'(x)$ вычисляется по правилам урока 22, определена во всех точках интервала (p, q) и $f(x) = g(x)$ при $x \in (p, q)$, то производная функции $f(x)$ в точке a существует и равна $g'(a)$.

Если такой функции не находится, можно смело считать, что производной в точке a не существует.

Хорошей иллюстрацией к названному правилу может служить функция $f(x) = |x|$. Если $a > 0$, то годятся $p = 0$, $q = a + 1$ и $g(x) = x$, так что производная $f'(a)$ существует для любой точки $a > 0$. Если $a < 0$, то можно взять $p = a - 1$, $q = 0$, $g(x) = -x$, так что и в отрицательных точках производная у модуля существует. В точке $a = 0$ функция $f(x) = |x|$ производной не имеет.

Мы с вами должны хорошо понимать, что такое возрастание и убывание функции. Ниже промежутком будет называться любое из следующих подмножеств прямой: интервал, отрезок, полуинтервал, луч (как содержащий, так и не содержащий начальную точку), а также вся прямая.

Говорится, что функция $y = f(x)$ *возрастает* на некотором промежутке I , если для любых $x, y \in I$ таких, что $x < y$, будет $f(x) < f(y)$. Геометрически это означает, что график функции идет подобно изображенному на рис. 1

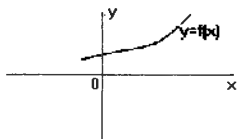


Рис. 1

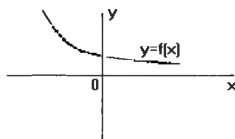


Рис. 2

Аналогично если для любых x, y , $x < y$ из промежутка I имеем $f(x) > f(y)$, то функция $f(x)$ *убывает* на этом промежутке. График ее в этом случае ведет себя примерно так, как на рис. 2.

Необходимо иметь в виду, что говорить о том, что функция, скажем, возрастает, без упоминания промежутка бессмысленно. Типичная ошибка здесь такова: поступающие хорошо знают, что если производная меньше нуля, то функция убывает. При этом они часто забывают добавить дважды «на промежутке». Если это проделать, то в результате получаем следующее (уже верное) правило:

*если производная функции $f(x)$ больше (меньше) нуля во всех точках (**), каз некоторого промежутка, то $f(x)$ возрастает (соответственно, убывает) на промежутке.*

Вот типичная ошибка на применение правила (**). Если дана функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$, то легко проверить, что ее производная равна $-\frac{1}{x^2}$. Из того факта, что производная отрицательна для всех $x \neq 0$, многие абитуриенты делают вывод, что $f(x)$ убывает на всей своей области определения. Но это неверно, ибо $-1 < 1$, но $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$. Правильным высказыванием будет « $f(x)$ убывает на множестве $(-\infty, 0)$, а также на множестве $(0, +\infty)$ ».

Вот рецепты для анализа поведения функций на промежутках.

1) Для нахождения областей возрастания и убывания функции $f(x)$ надо найти $f'(x)$ и решить неравенства $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$. После этого надо отобрать **промежутки**, на которых $f'(x) > 0$, и объявить, что на каждом из них (**отдельно!**) функция возрастает; аналогично на каждом из промежутков, где $f'(x) < 0$, исходная функция убывает.

2) Точки ОДЗ для $f(x)$, в которых производная равна нулю или не определена, называются *критическими*. Критическая точка a называется *точкой максимума*, если найдутся такие числа p и q , что

$$p < a < q \text{ и } f(a) \geq f(x) \text{ для любого } x \in (p, q).$$

Критическая точка называется *точкой минимума*, если найдутся такие числа p и q , что

$$p < a < q \text{ и } f(a) \leq f(x) \text{ для любого } x \in (p, q).$$

3) Если a — критическая точка, то ее характер (т.е. является ли она точкой минимума или максимума) определяется следующим образом:

- 3.1) если найдутся числа p и q такие, что $p < a < q$ и $f'(x) > 0$ при $p < x < a$, но $f'(x) < 0$ при $a < x < q$, то a есть точка максимума;
- 3.2) если найдутся числа p и q такие, что $p < a < q$ и $f'(x) < 0$ при $p < x < a$, но $f'(x) > 0$ при $a < x < q$, то a есть точка минимума;
- 3.3) если найдутся числа p и q такие, что $p < a < q$ и $f'(x)$ имеет одинаковый знак на интервалах (p, a) и (a, q) , то a не является ни точкой максимума, ни точкой минимума.

С первого взгляда может показаться, что эти правила трудно запомнить. Но вы же хорошо помните, возрастает или убывает функция в зависимости от знака производной. Если вы забыли, как определять характер точки, нарисуйте числовую ось, на ней точку a и знак производной слева и справа от a . Пусть, например, слева от a стоит знак минус, а справа — плюс (см. рис. 3). На этом же рисунке изображено стрелкой слева от a , что функция убывает на промежутке (p, a) , а стрелкой справа — что она возрастает на (a, q) .

Две стрелки, нарисованные на картинке, напоминают график функции. В действительности именно так себя будет вести сама функция, хотя график ее, разумеется, не обязан состоять из прямых линий. Из этого «графика» видно, что в точке a функция принимает наименьшее значение, т.е. точка a есть точка минимума.

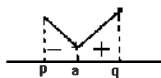


Рис. 3

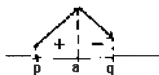


Рис. 4

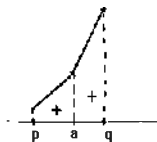


Рис. 5

Рисунок 4 объясняет, почему получается точка максимума, если слева от a производная имеет знак плюс, а справа — минус.

Если производная положительна слева и справа от a , то из рисунка 5 видно, почему a не есть ни точка минимума, ни точка максимума.

Аналогично выглядит ситуация, когда производная отрицательна как слева, так и справа от a .

4) Пусть функция $f(x)$ задана на некотором промежутке. Если требуется найти наибольшее (наименьшее) ее значение на этом промежутке, то нужно действовать следующим образом:

- 4.1) найти критические точки функции;
- 4.2) на промежутках знакопостоянства производной изобразить стрелками, возрастает или убывает функция на данном промежутке;
- 4.3) из получившегося рисунка будет видно, какие точки есть точки максимума, а какие — минимума;
- 4.4) вычислить значения в точках максимума (минимума) и на концах промежутка; наибольшее (соответственно, наименьшее) из них и будет наибольшим (соответственно, наименьшим) значением функции на исходном промежутке.

► **Задача 1.** Найти области возрастания и убывания функции $y = \frac{x+3}{x-5}$.

Решение. Производная функции равна $-\frac{8}{(x-5)^2}$. Она не определена в точке $a = 5$. Во всех остальных точках производная отрицательна. Отсюда получаем

Ответ: функция убывает на каждом из промежутков $(-\infty, 5)$ и $(5, +\infty)$.

◀

► **Задача 2.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^5 - x^3 - 2x + 4$ на отрезке $[-2, 2]$.

Решение. Поскольку $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2$, критические точки $f(x)$ совпадают с теми, для которых производная равна нулю. Легко найти, что это точки ± 1 . Из того, что $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2 = (5x^2 + 2)(x - 1)(x + 1)$, следует, что знак $f'(x)$ совпадает со знаком выражения $(x - 1)(x + 1)$, и можно уже нарисовать картинку поведения $f(x)$ на отрезке $[-2, 2]$.

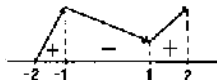


Рис. 6

Отсюда видно, что наименьшее значение $f(x)$ принимает либо в точке -2 , либо в точке 1 . Поскольку $f(-2) = -16 < 2 = f(1)$, наименьшее значение функции на отрезке $[-2, 2]$ равно -16 .

Наибольшее значение функции есть одно из двух чисел $f(-1)$ и $f(2)$. Поскольку $f(-1) = 6 < 24 = f(2)$, наибольшее значение $f(x)$ на $[-2, 2]$ равно 24 .

Ответ: наименьшее значение равно -16 , а наибольшее равно 24 . ◀

► **Задача 3.** Найти наименьшее значение функции $y = |3x - 2| + |x + 1|$.

Решение. Рассмотрим три случая.

1) $x \leq -1$. Тогда $y = 2 - 3x + (-1 - x) = 1 - 4x$. При таких x имеем $y' = -4 < 0$, т.е. функция убывает на $(-\infty, -1]$.

2) $-1 \leq x \leq \frac{2}{3}$. Тогда $y = 2 - 3x + x + 1 = 3 - 2x$. При таких x имеем $y' = -2 < 0$, т.е. y убывает и на множестве $[-1, \frac{2}{3}]$.

3) $x \geq \frac{2}{3}$. Тогда $y = 3x - 2 + x + 1 = 4x - 1$. Поскольку $y' = 4 > 0$, функция возрастает на $[\frac{2}{3}, +\infty)$.

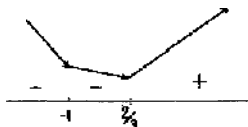


Рис. 7

Нарисуем картинку, характеризующую поведение функции (рис. 7). Отсюда видно, что наименьшее значение принимается в точке $\frac{2}{3}$ и равно $\frac{5}{3}$.

Ответ: наименьшее значение функции равно $\frac{5}{3}$. ◀

► **Задача 4.** Число 18 разбить на два слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

Решение. Пусть одно из слагаемых равно x , тогда другое есть по условию $18 - x$. Здесь x может принимать любые значения, а функция

$$f(x) = x^2 + (18 - x)^2 = 2x^2 - 36x + 324$$

должна принимать наименьшее значение.

Имеем $f'(x) = 4x - 36$. Итак, критическая точка всего одна и (проверьте сами!) является точкой минимума. Значит, минимальное значение $f(x)$ принимает при $x = 9$.

Ответ: искомое разбиение есть $18 = 9 + 9$. ◀

► **Задача 5** [2]. Имеет ли уравнение $2x^2 - x^3 - x + 3 = 0$ корни на отрезке $[0, 2]$?

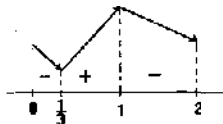


Рис. 8

Решение. Найдем наименьшее значение функции $f(x) = 2x^2 - x^3 - x + 3$ на отрезке $[0, 2]$. Имеем

$$f'(x) = 4x - 3x^2 - 1 = -(3x - 1)(x - 1).$$

Значит, картинка поведения функции такова, как на рисунке 8.

Тем самым, наименьшее значение $f(x)$ принимает либо в точке $x = 2$, либо при $x = \frac{1}{3}$. Но $f(2) = 1 > 0$ и $f(\frac{1}{3}) = \frac{65}{27} > 0$, так что функция $2x^2 - x^3 - x + 3$ строго больше нуля всюду на отрезке $[0, 2]$.

Ответ: не имеет. ◀

► **Задача 6.** Найти точку графика функции $y = x^2 + \frac{1}{2}$, ближайшую к точке $(\frac{1}{4}, 1)$.

Решение. Напомню, что график функции $y = f(x)$ есть множество точек на плоскости, каждая из которых имеет вид $(x, f(x))$, где x пробегает область определения (т.е. ОДЗ) функции $f(x)$.

В нашем конкретном случае график есть множество точек вида $(x, x^2 + \frac{1}{2})$, где x пробегает все числа.

Видимо, еще надо напомнить формулу расстояния между точками на плоскости. Если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — точки на плоскости, то расстояние d между ними вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Значит, если мы возьмем любую точку x на прямой, то расстояние между точками $(\frac{1}{4}, 1)$ и $(x, x^2 + \frac{1}{2})$ будет равно

$$d(x) = \sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{x^4 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{16}}.$$

Мы должны найти такое x , при котором $d(x)$ принимает наименьшее значение. Можно было бы брать производную непосредственно от функции $d(x)$. Но работу себе можно сократить, заметив, что наименьшее значение $d(x)$ принимается в той же точке, что и наименьшее значение $e(x) = x^4 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{16}$ ввиду того, что корень квадратный есть возрастающая функция. Имеем $e'(x) = 4x^3 - \frac{1}{2}$, откуда заключаем, что единственной критической точкой является $x = \frac{1}{2}$. Легко проверяется (сделайте рисунок сами!), что $x = \frac{1}{2}$ есть точка минимума. Следовательно, искомая точка графика есть $\left(\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$. ◀

► **Задача 7** [3]. Найти сумму $1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + 100 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{99}$.

Решение. Мы найдем даже сумму $g(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + 100x^{99}$ и подставим в нее $x = \frac{1}{3}$. Для этого нам потребуется вспомогательная функция $f(x) = x + x^2 + \dots + x^{100}$. Ясно, что $f'(x) = g(x)$. Кроме того, $f(x)$ есть сумма геометрической прогрессии. Легко подсчитывается (см. урок 17), что $f(x) = \frac{x - x^{101}}{1 - x}$. Значит,

$$g(x) = f'(x) = \frac{(1 - 101x^{100})(1 - x) - (x - x^{100})(-1)}{(1 - x)^2} = \frac{1 - 102x^{100} + 101x^{101}}{(1 - x)^2}.$$

Осталось подставить вместо x число $\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{4}(9 - 205 \cdot 3^{-99})$. ◀

Урок окончен. Оценка ставится стандартным образом.

Домашнее задание

- ▶ 1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$ на отрезке $[-2, 6]$.
- ▶ 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^2 - 5|x + 1| - 2$ на отрезке $[-3, 3]$.
- ▶ 3. Найти наименьшее значение функции $f(x) = -|x^3 - 6x^2 + 9x - 3|$ на отрезке $[-1, 4]$.
- ▶ 4. Найти наименьшее значение функции $y = \frac{2x^2 + x + 1}{3x^2 - x + 2}$.
- ▶ 5. Найти точки экстремума и отрезки монотонности функции $f(x) = x^3 + 6x^2 - 3x + 3$ на интервале $(-5, \frac{1}{5})$.
- ▶ 6. Найти все $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ такие, что $f'(x) = 0$, где

$$f(x) = \sin x \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) (\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) - \sin x).$$

- ▶ 7. Найти наименьшее значение функции $y = 2|x - 3| + |3x - 2|$.
- ▶ 8. Найти наибольшее значение функции $2 \sin x + \sin 2x$ на отрезке $[0, \frac{5\pi}{4}]$.
- ▶ 9. Найти наименьшее значение функции $y = -\cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}x$ на отрезке $[0, \pi]$.
- ▶ 10. Найти все x , при которых функция $y = 4 \cos^2 x + 3\sqrt{3} \sin x + 7 \sin^2 x$ принимает наименьшее значение.
- ▶ 11. Найти все x , при которых функция $y = 6 \cos^2 x + 6 \sin x - 2$ принимает наибольшее значение.
- ▶ 12. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = 18x - \sin 9x + 3 \sin 6x$ на отрезке $[-\frac{7\pi}{18}, \frac{\pi}{18}]$.
- ▶ 13 [2]. При каких x функция $f(x) = x^2(45 \sin 3x - 9 \cos 3x) + x(30 \cos 3x + 6 \sin 3x) + (80 \sin 3x - 16 \cos 3x)$ имеет минимумы?
- ▶ 14 [2]. При каких x функция $f(x) = x^2(6 \sin 2x - 8 \cos 2x) + x(6 \cos 2x + 8 \sin 2x) + (3 \sin 2x - 4 \cos 2x)$ имеет максимумы?
- ▶ 15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = |x^2 + x| + |x^2 + 5x + 6|$ на отрезке $[-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}]$.
- ▶ 16. Найти точки максимума функции $y = -5x^3 + x|x - 1|$ на отрезке $[0, 2]$ и ее наименьшее значение на этом же отрезке.

- ▶ 17. Найти промежутки возрастания и убывания функции $y = x + \frac{1}{x-1}$.
- ▶ 18. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = |\sin x| + |\cos x|$.
- ▶ 19. Найти наименьшее значение функции $y = |\operatorname{tg} x| + |\operatorname{ctg} x|$.
- ▶ 20 [3]. Найти сумму $1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + \dots + 100 \cdot 3^{99}$.

Урок 24

Касательная

Этот урок также посвящен приложениям производной. Однако из-за геометрического характера этих приложений я решил не включать данный материал в предыдущий урок.

Для того, чтобы быть способным решить любую задачу про касательные, необходимо хорошо знать, как пишется уравнение касательной, и уметь по уравнению прямой хорошо представлять, где она проходит, где пересекает оси координат и под какими углами, параллельна она данной прямой, или нет, и т.п.

По моему опыту, многие школьники неважно владеют материалом, связанным с графиками функций и часто могут встать в тупик, когда надо нарисовать график прямой линии по ее уравнению. Поэтому я начну с напоминания простейших свойств прямых и их уравнений.

Самое общее уравнение прямой имеет вид $ax + by + c = 0$, где a, b, c — произвольные числа, причем a и b не равны нулю одновременно. Заметим, что если $b \neq 0$, то оно эквивалентно уравнению $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = px + q$, где $p = -\frac{a}{b}$, $q = -\frac{c}{b}$. Если $b = 0$, то $a \neq 0$ и получаем уравнение $x = -\frac{c}{a}$.

Таким образом, уравнение любой прямой может быть приведено к одному из двух видов: $x = c$, или $y = px + q$ (здесь c, p, q — произвольные числа).

Проще всего разобраться со случаем, когда мы имеем уравнение $x = c$. Оно задает прямую, параллельную оси Oy и пересекающую ось Ox в точке c (см. рис. 1).

Геометрически совершенно понятно, почему именно такой вид у этой прямой. Ведь в уравнении написано, что у данного множества точек все абсциссы равны c , а прямая на рис. 1 есть как раз геометрическое место точек, абсциссы которых равны c .

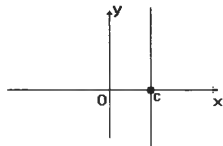


Рис. 1

Пусть теперь мы имеем уравнение прямой вида

$$(1) \quad y = px + q.$$

Анализируется оно следующим образом. Самые важные точки прямой — это точки пересечения с осями. Если $p \neq 0$, то прямая пересекается с каждой из осей. Точка (x, y) лежит на оси Ox только если $y = 0$. Отсюда $px + q = 0 \iff x = -\frac{q}{p}$. Тем самым, точка пересечения прямой (1)

с осью абсцисс имеет вид $(-\frac{q}{p}, 0)$. Точка пересечения прямой (1) с осью ординат получается, если мы положим $x = 0$. Получим точку $(0, q)$. Если мы нарисуем обе найденные на осях точки и соединим их прямой, получится требуемый график (см. рис. 2).

Если же $p = 0$, то получим уравнение $y = q$. Соответствующая прямая будет параллельна оси абсцисс и пересечет ось ординат в точке $(0, q)$ (рис. 3).

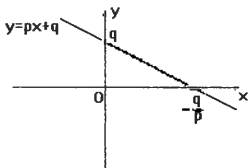


Рис. 2

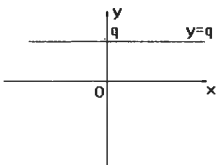


Рис. 3

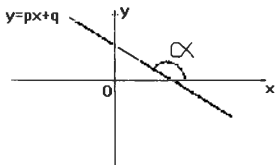


Рис. 4

Ну вот, кажется, все случаи рассмотрены. Последнее, что нам следовало бы понять, — это геометрический смысл коэффициента p в уравнении (1). Оказывается, если прямая (1) образует с осью Ox угол α , отсчитываемый против часовой стрелки (рис. 4), то $\operatorname{tg} \alpha = p$.

В частности, прямая параллельна Ox , т.е. образует с этой осью угол 0, если и только если $p = 0$. Кроме того, две прямые $y = p_1x + q_1$ и $y = p_2x + q_2$ параллельны, если и только если образуют с Ox равные углы, т.е. если $p_1 = p_2$.

► **Упражнение.** Какая связь между p_1 и p_2 равносильна перпендикулярности прямых $y = p_1x + q_1$ и $y = p_2x + q_2$?

Мне осталось только привести уравнение касательной, и можно будет начинать решать задачи.

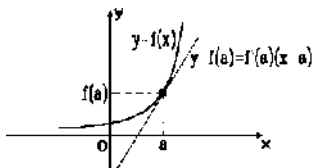


Рис. 5

Пусть дана функция $f(x)$, у которой существует производная $f'(a)$ в некоторой точке a . Тогда к графику функции $y = f(x)$ можно провести в этой точке касательную (см. рис. 5), уравнение которой записывается в виде

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \iff y = f'(a) \cdot x + f(a) - af'(a).$$

Первое из равенств удобнее для запоминания, зато второе показывает нам, что мы действительно имеем дело с уравнением вида $y = px + q$ (где $p = f'(a)$, $q = f(a) - af'(a)$), т.е. с уравнением прямой.

Из того, что $p = f'(a)$, следует, например, что касательная к графику функции в точке a параллельна оси абсцисс тогда и только тогда, когда производная в этой точке равна нулю; две касательные в разных точках параллельны, если и только если их производные в этих точках совпадают, и т.п.

- **Задача 1.** Показать, что ни одна касательная к графику функции $y = x^3 + x^2 + x + 1$ не параллельна оси Ox .

Решение. Пусть касательная в точке a к графику нашей функции параллельна оси абсцисс. Мы знаем, что тогда $f'(a) = 0 \iff 3a^2 + 2a + 1 = 0$, чего не может быть, так как дискриминант квадратного трехчлена $3x^2 + 2x + 1$ равен $-8 < 0$.

- **Задача 2.** В каких точках касательная к графику функции

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x - 4$$

образует с Ox угол 45° ?

Решение. Раз касательная образует с осью Ox угол 45° , ее коэффициент при x равен $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Если проведена касательная в точке a , то этот коэффициент равен $f'(a)$, и нам остается лишь решить уравнение $f'(a) = 1 \iff a^2 - 5a + 7 = 1 \iff a = 2, 3$.

Ответ: в точках $(2, \frac{8}{3})$ и $(3, \frac{7}{2})$ ◀

- **Задача 3.** Найти угол, который образует с осью ординат касательная к графику функции

$$y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3,$$

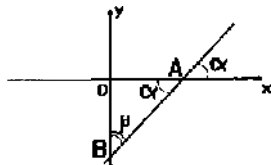
проведенная в точке с абсциссой $a = 1$.

Решение. Производная нашей функции равна $\frac{10}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^2$ и, следовательно, $y'(1) = 3$. Пусть α — угол образуемый касательной в точке с абсциссой 1. Мы знаем, что $\operatorname{tg} \alpha = y'(1) = 3$. Из $0 \leq \alpha < \pi$ следует, что $\alpha = \operatorname{arctg} 3$. Обозначим искомый угол через β и нарисуем картинку (рис. 6).

Точка A имеет координаты $(\frac{22}{27}, 0)$, а точка B — $(0, -\frac{22}{9})$. Прямая на этом рисунке изображает нашу касательную. Из того, что треугольник OAB прямоугольный, следует, что

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \iff \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Ответ: искомый угол равен $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 3 = \operatorname{arccotg} 3$. ◀ **Рис. 6**



- **Задача 4.** В точке $M(1, 8)$ к графику функции $y = \sqrt{(5 - x^{2/3})^3}$ проведена касательная. Найти длину ее отрезка, заключенного между осями координат.

Решение. Найдем производную нашей функции:

$$y' = \left((5 - x^{2/3})^{\frac{3}{2}} \right)' = \frac{3}{2} (5 - x^{2/3})^{\frac{1}{2}} \cdot (5 - x^{2/3})' = -x^{-\frac{1}{3}} \sqrt{5 - x^{2/3}}.$$

Значит, $y'(1) = -2$, и, учитывая, что $y(1) = 8$, можно записать уравнение касательной к графику нашей функции в точке $(1, 8)$:

$$y - 8 = (-2)(x - 1) \iff y = -2x + 10.$$

Изобразим полученную касательную.

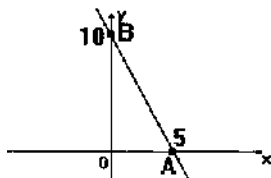


Рис. 7

Она пересекает ось Ox в точке $A(5, 0)$, а ось Oy — в точке $B(0, 10)$. Искомый отрезок касательной — это гипотенуза AB прямоугольного треугольника OAB с катетами $OA = 5$ и $OB = 10$. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$.

Ответ: $5\sqrt{5}$. ◀

- **Задача 5.** Дана функция $y = x + \frac{1}{x}$. Найти площадь треугольника, отсекаемого осями координат и касательной к графику этой функции в точке $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$.

Решение. Поскольку $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$, имеем $y'(\frac{1}{2}) = -3$, и уравнение касательной есть

$$y - \frac{5}{2} = (-3) \left(x - \frac{1}{2} \right) \iff y = -3x + 4.$$

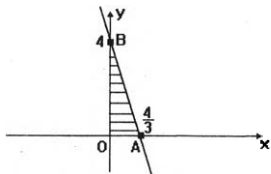


Рис. 8

Нарисуем эту касательную, заштриховав искомый треугольник (рис. 8). Его площадь равна половине произведения катетов OA и OB , т.е. $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$.

Ответ: $\frac{8}{3}$. ◀

Наш урок окончен. Оценка выставляется стандартным образом.

Домашнее задание

- 1. Найти все такие числа x_0 , что касательные к графикам функций $y = 3 \cos 5x$ и $y = 5 \cos 3x + 2$ в точках с абсциссой x_0 параллельны.
- 2. Найти уравнения тех касательных к графику функции $y = \frac{2x^2 - 1}{x}$, которые вместе с осями координат ограничивают треугольник площади 1.

- 3. К параболы $y = 4 - x^2$ в точке с абсциссой $a = 1$ проведена касательная. Найти точку ее пересечения с осью ординат.
- 4. Вычислить площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y = \frac{x}{2x-1}$ в точке с абсциссой $a = 1$.
- 5. Найти точки пересечения с осями координат тех касательных к графику функции $y = \frac{2x-3}{x+3}$, у которых угловой коэффициент равен 9.
- 6. Найти все a , при которых касательная к графику функции $y = \cos 7x + 7 \cos x$ в точке с абсциссой a параллельна касательной к этому же графику в точке с абсциссой $\frac{\pi}{6}$.
- 7 [3]. Найти координаты точки, лежащей на графике функции $y = 1 + \cos x$ при $0 \leq x \leq \pi$ и наименее удаленной от прямой $x\sqrt{3} + 2y + 4 = 0$.
- 8 [2]. Прямая касается графика функции $y = \sqrt[3]{x^2}$ в точке с абсциссой $a \in [\frac{1}{2}, 1]$. При каких a площадь треугольника, ограниченного этой прямой, осью Ox и прямой $x = 2$ будет наименьшей? Найти эту наименьшую площадь.
- 9. Найти координаты точки пересечения касательных к графику функции $y = \frac{3x+1}{2x-1}$ в точках с абсциссами $x_0 = -1$, $x_1 = 3$.
- 10. Проводятся касательные к графику функции $y = 3x - x^2$ в точке с абсциссой $a = 2$ и в точке минимума. Найти площадь треугольника, образованного осью ординат и этими касательными.
- 11. Найти координаты точки пересечения касательных к графику функции $y = \cos \pi x$ в точках с абсциссами $x_0 = \frac{1}{6}$ и $x_1 = \frac{7}{6}$.
- 12. Найти координаты точек пересечения с осью абсцисс касательных к графику функции $y = \frac{x+1}{x-3}$, которые образуют угол 135° с осью Ox .
- 13. Вычислить площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y = \sqrt{2x^2 - 4}$ в точке с абсциссой $a = 2$.
- 14 [2]. Прямая касается графика функции $y = \frac{1}{x^2}$ в точке с абсциссой $a \in [5, 9]$. Эта прямая, ось Ox и прямая $x = 4$ ограничивают треугольник. При каких a его площадь будет наибольшей? Найти эту наибольшую площадь.
- 15 [2]. На плоскости Oxy рассматриваются прямоугольные треугольники ABC (где $\angle ACB = 90^\circ$, $A = (2, 0)$, вершина C лежит на отрезке $[0, 2]$ оси Ox , а B — на параболы $y = 2x - x^2$). Какие координаты должна иметь точка B , чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей?

Урок 25

Плоские множества

На этом уроке вступительная часть будет не менее велика, чем на предыдущем, поскольку построение графиков и множеств на плоскости не является сильной стороной большинства школьников.

На предыдущем уроке я подробно рассказал, как строятся графики функций, задающих прямые на плоскости. Был даже приведен пример множества на плоскости, не являющегося графиком никакой функции (а именно, $x = c$).

Это не было отмечено на уроке 24, поэтому я поясню разницу между произвольными множествами на плоскости и графиками функций. Дело в том, что график функции $f(x)$ есть множество точек вида $(x, f(x))$, где x пробегает ОДЗ функции $f(x)$. В частности, если абсцисса точки графика равна a , то ее ордината непременно равна $f(a)$. Следовательно, *на графике функции не может быть двух разных точек с одинаковыми абсциссами*. Последнее означает геометрически, что каждая вертикальная прямая пересекает график функции максимум в одной точке. Поэтому на рис. 1 изображен график некоторой функции, а множество на рис. 2 графиком не является, поскольку содержит две различные точки P и Q с одинаковыми абсциссами.

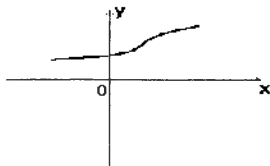


Рис. 1

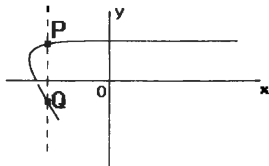


Рис. 2

В задачах письменного экзамена крайне редко встречается требование что-либо изобразить на плоскости. Умение рисовать графики функций и простейшие подмножества плоскости помогает при решении нестандартных задач. Например, если у вас не получается решить уравнение обычными методами, можно попытаться построить графики его левой и правой частей. Эти графики могут подсказать (но ни в коем случае не служат доказательством), что у уравнения нет решений, и нужно пытаться это

строго доказать. Если из графика видно, что уравнение имеет единственный корень, можно попробовать угадать его и доказать, что других нет. Незаменимы построения на плоскости и при решении задач с параметрами — мы скоро в этом убедимся.

Итак, я считаю, что простейшие множества на плоскости — прямые — вы изображать умеете. Следующий шаг — освоение графиков функций вида $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, т.е. парабол.

Легко проверить, что $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$.

Отсюда вытекает следующий рецепт построения графика параболы.

- 1) Если $a > 0$, то ветви идут вверх, если $a < 0$ — вниз.
- 2) Пунктиром рисуется ось параболы — прямая $x = -\frac{b}{2a}$.
- 3) Изображается вершина параболы — точка с координатами $x = -\frac{b}{2a}$, $y = c - \frac{b^2}{4a}$.
- 4) Изображаются на оси Ox корни (если они есть) параболы и точка $(0, c)$ пересечения параболы с осью Oy .

5) Через полученные точки проводится парабола (см. рис. 3). Любой рисунок приближителен, но надо непременно отразить тот факт, что ветви идут в нужную сторону, что парабола проходит через полученные точки (вершину и точки пересечения с осями) и симметрична относительно своей оси.

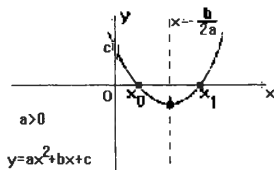


Рис. 3

Наш следующий рецепт показывает, как строить график дробно-линейной функции, т.е. функции вида $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Можно считать, что $c \neq 0$ (иначе функция будет просто линейной). Кроме того, как будет видно ниже, если $ad - bc = 0$, то выражения в числителе и знаменателе будут пропорциональны и функция будет просто константой $\frac{a}{c}$ при $x \neq -\frac{d}{c}$. Теперь уже можно дать рецепт построения графика.

- 1) Проводится следующее преобразование:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+d) + b - \frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x - (-\frac{d}{c})}.$$

- 2) Пунктиром проводится вертикальная прямая (вертикальная асимптота графика) $x = -\frac{d}{c}$.

- 3) Пунктиром проводится горизонтальная прямая $y = \frac{a}{c}$ (горизонтальная асимптота графика).

4) На оси Ox отмечается точка $-\frac{b}{a}$, если $a \neq 0$. Искомый график пересекает ось Ox как раз в этой точке.

5) На оси Oy отмечается точка $\frac{b}{d}$, если $d \neq 0$. Искомый график пересекает ось Oy в этой точке.

6) В зависимости от знака выражения $bc - ad$ рисуется график функции, проходящий через отмеченные точки и имеющий заданные асимптоты (рис. 4 и 5). Если представлять себе пунктирные прямые как новые оси координат, то при $bc - ad > 0$ график получается как у функции $\frac{1}{x}$, а при $bc - ad < 0$ — как у функции $-\frac{1}{x}$.

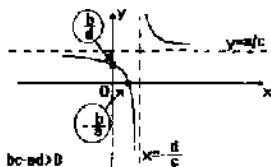


Рис. 4

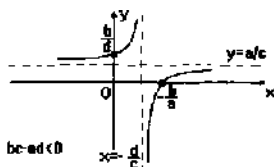


Рис. 5

В школьных учебниках неплохо изложено, как нужно строить графики функций $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \log_a x$, $y = a^x$, — пожалуйста, хорошенько повторите этот материал.

Единственный вид множеств на плоскости, не являющихся графиками, которые проходят в школе, — это окружности. Напомню, что окружность с центром в точке (a, b) и радиусом r задается уравнением $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

- 1. Какое множество задается неравенством $(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$? неравенством $(x - a)^2 + (y - b)^2 \geq r^2$?

После того как освоены приемы изображения простейших подмножеств плоскости, мы с вами должны понять, как с помощью ряда операций строить из них более сложные.

Операция 1. Есть график функции $y = f(x)$, надо построить график функции $y = f(x) + c$, где c — константа. Мы будем записывать эту операцию в виде $f(x) \rightarrow f(x) + c$.

График функции $f(x)$ сдвигается как твердое тело на $|c|$ вверх, если $c > 0$, и на $|c|$ вниз, если $c < 0$.

Операция 2. $f(x) \rightarrow f(x + c)$. График $f(x)$ сдвигается как твердое тело на c влево, если $c > 0$, и вправо на $|c|$, если $c < 0$.

Операция 3. $f(x) \rightarrow -f(x)$. График $f(x)$ отражается симметрично относительно оси абсцисс.

Операция 4. $f(x) \rightarrow f(-x)$. График $f(x)$ отражается симметрично относительно оси ординат.

Операция 5. $f(x) \rightarrow |f(x)|$. Та часть графика $f(x)$, которая находится ниже оси абсцисс, симметрично отражается относительно последней. Та часть, которая выше оси абсцисс, остается без изменений.

Операция 6. Если известен график функции $y = f(x)$, то можно построить множество (которое уже не обязано являться графиком) $x = f(y)$. Для этого надо переименовать оси координат (т.е. считать ось Ox осью Oy и наоборот), построить график функции $y = f(x)$ и снова переименовать оси.

► **Задача 1.** Построить график функции $y = 3x^2 - 7x + 1$.

Решение. Ветви этой параболы направлены вверх, ось ее — прямая $x = \frac{7}{6}$, вершина имеет координаты $(\frac{7}{6}, -\frac{37}{12})$, корни равны $\frac{7 \pm \sqrt{37}}{6}$. Искомая параболa пересекает ось Oy в точке $(0, 1)$. Она изображена на рис. 6.

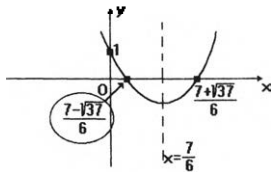


Рис. 6

► **Задача 2.** Изобразить множество точек (x, y) , удовлетворяющих уравнению $x = y - y^2$.

Решение. На рисунке 7 показана вспомогательная параболa $y = x - x^2 = -x^2 + x$, а на рисунке 8 — искомая, полученная путем переименования осей. Отметим, что, конечно же, после переименования осей систему координат надо повернуть так, чтобы ось Oy «смотрела вверх», а ось Ox — «вправо». Опыт показывает, что при переименовании осей поступающие часто допускают ошибки — например, ветви параболы могут пойти вправо или «шапочка» может оказаться ниже оси Ox . Поэтому после того как вы произвели переименование осей, проконтролируйте себя по основным свойствам графика — они должны быть одинаковы на основном и вспомогательном графиках. В данном случае следует убедиться, что раз на вспомогательном графике почти все точки параболы имеют отрицательные ординаты, то на окончательном изображении то же самое должно быть верно для ее абсцисс, т.е. ветви ее идут влево. Далее, корни параболы (т.е. их абсциссы) неотрицательны. Значит, должны быть неотрицательны их ординаты на окончательном изображении. Отсюда следует, что «шапочка» параболы лежит выше оси Ox .

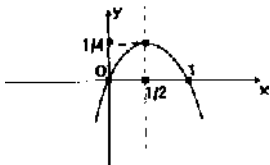


Рис. 7

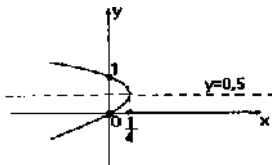


Рис. 8

► **Задача 3.** Изобразить график функции $\frac{x-1}{2x+3}$.

Решение. Имеем $\frac{x-1}{2x+3} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2(2x+3)}$. Следовательно, вертикальной асимптотой будет прямая $x = -\frac{3}{2}$, а горизонтальной — прямая $y = \frac{1}{2}$. Подставив

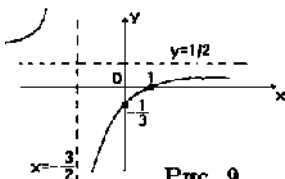


Рис. 9

$x = 0$, найдем, что график пересекает ось Oy в точке $-\frac{1}{3}$. Ясно, что $y = 0 \iff x = 1$ и, значит, именно в точке $(1, 0)$ график пересекает ось абсцисс. Наконец, ветви графика расположены аналогично ветвям графика $y = -\frac{1}{x}$. Ответ к задаче изображен на рис. 9.

► **Задача 4.** Какое множество точек (x, y) на плоскости задает неравенство $x^2 + xy + y^2 \leq 0$?

Решение. Из того, что $x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2$, следует, что наше неравенство эквивалентно тому, что $(x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 \leq 0$. Но сумма квадратов неположительна, если и только если каждый из этих квадратов равен нулю. Значит, $x = y = 0$.

Ответ: неравенство задает единственную точку $(0, 0)$. ◀

► **Задача 5.** Какое множество точек на плоскости задает неравенство $|x-2| + |y+3| \leq 1$?

Решение. Мы должны рассмотреть четыре случая:

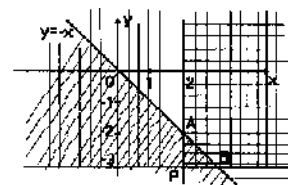


Рис. 10

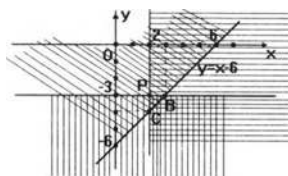


Рис. 11

1) $x \geq 2, y \geq -3$. Тогда $|x-2| = x-2, |y+3| = y+3$ и наше неравенство принимает вид $x-2+y+3 \leq 1 \iff y \leq -x$. Для того, чтобы получить множество, являющееся первой частью ответа, заштрихуем каждое из множеств $x \geq 2$ (это, очевидно, полуплоскость, лежащая правее прямой $x = 2$ — горизонтальная штриховка), $y \geq -3$ (полуплоскость, лежащая выше прямой $y = -3$ — вертикальная штриховка) и $y \leq -x$ (полуплоскость, лежащая ниже прямой $y = -x$ — косая штриховка). Посмотрим на рисунок 10.

Все три штриховки пересекаются на треугольнике PAB , где $P = (2, -3)$, $A = (2, -2)$, $B = (3, -3)$. Значит, этот треугольник есть первый кусок ответа.

2) $x \geq 2, y \leq -3$. Тогда $|x-2| = x-2, |y+3| = -y-3$ и наше неравенство

принимает вид $x - 2 - y - 3 \leq 1 \iff y \geq x - 6$. Так же, как и в первом случае, горизонтальной штриховкой отметим полуплоскость $x \geq 2$, вертикальной — полуплоскость $y \leq -3$ и косой — полуплоскость $y \geq x - 6$, лежащую выше прямой $y = x - 6$.

Ясно, что вторым куском ответа будет треугольник PBC , где P и B — такие же, как на рис. 10, а $C = (2, -4)$.

3) $x \leq 2$, $y \geq -3$. Тогда $|x - 2| = 2 - x$, $|y + 3| = y + 3$ и мы имеем неравенство $2 - x + y + 3 \leq 1 \iff y \leq x - 4$. Нарисуем соответствующую картинку (рис. 12).

Все три штриховки пересекаются по треугольнику PAD , где $D = (1, -3)$.

4) $x \leq 2$, $y \leq -3$. Тогда $|x - 2| = -x + 2$, $|y + 3| = -y - 3$ и имеем неравенство $-x + 2 - y - 3 \leq 1 \iff y \geq -x - 2$. Убедитесь сами, что соответствующим куском ответа здесь будет треугольник PDC , где точка C взята из случая 2, а точка D — из случая 3.

Ответ: искомое множество — квадрат, изображенный на рис. 13. ◀

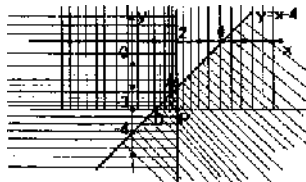


Рис. 12

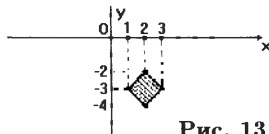


Рис. 13

► **Задача 6.** Нарисовать множество точек, задаваемых уравнением

$$|x - 2| + |x| = |y + 3| + |y + 5|.$$

Решение. Здесь ничего не поделаешь, придется разбирать девять случаев.

1) $x \leq 0 \Rightarrow |x - 2| = -x + 2$, $|x| = -x$.

1.1) $y \leq -5 \Rightarrow |y + 3| = -y - 3$, $|y + 5| = -y - 5$. Наше уравнение принимает вид $-x + 2 - x = -y - 3 - y - 5 \iff y = x - 5$. Мы не будем рисовать девять отдельных картинок, но на итоговой (рис. 14) отметим, какое множество из какого случая получилось. В данном случае это — кусок (вернее, луч) прямой $y = x - 5$, где $x \in (-\infty, 0]$.

1.2) $y \in [-5, -3] \Rightarrow |y + 3| = -y - 3$, $|y + 5| = y + 5$. Наше уравнение принимает вид $-x + 2 - x = -y - 3 + y + 5 \iff x = 0$. Здесь получается отрезок вертикальной прямой $x = 0$, $y \in [-5, -3]$.

1.3) $y \geq -3 \Rightarrow |y + 3| = y + 3$, $|y + 5| = y + 5$. Наше уравнение принимает вид $-x + 2 - x = y + 3 + y + 5 \iff y = -x - 3$. Здесь тоже имеем луч на прямой $y = -x - 3$, $x \leq 0$.

2) $x \in [0, 2] \Rightarrow |x| = x$, $|x - 2| = -x + 2$.

2.1) $y \leq -5 \Rightarrow |y + 3| = -y - 3$, $|y + 5| = -y - 5$. Наше уравнение принимает вид $-x + 2 + x = -y - 3 - y - 5 \iff y = -5$. Искомый кусок ответа есть отрезок на прямой $y = -5$, где x изменяется от 0 до 2.

2.2) $y \in [-5, -3] \Rightarrow |y+3| = -y-3, |y+5| = y+5$, и мы получаем уравнение $-x+2+x = -y-3+y+5 \iff 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$. Ввиду того, что этому уравнению удовлетворяют любые x и y , очередным куском ответа будет весь квадрат $x \in [0, 2], y \in [-5, -3]$.

2.3) $y \geq -3 \Rightarrow |y+3| = y+3, |y+5| = y+5$. В этом случае имеем уравнение $-x+2+x = y+5+y+3 \iff y = -3$ — получили «верхнюю» сторону квадратика.

3) $x \geq 2 \Rightarrow |x| = x, |x-2| = x-2$.

3.1) $y \leq -5 \Rightarrow |y+3| = -y-3, |y+5| = -y-5$. Наше уравнение принимает вид $2x-2 = -2y-8 \iff y = -x-3$. Опять имеем луч, лежащий на прямой $y = -x-3$, где $x \in [2, \infty)$.

3.2) $y \in [-5, -3] \Rightarrow |y+3| = -y-3, |y+5| = y+5$, и мы имеем уравнение $2x-2 = -y-3+y+5 \iff x = 2$. Здесь получается отрезок прямой $x = 2$ при $y \in [-5, -3]$, т.е. правая сторона квадрата.

3.3) $y \geq -3 \Rightarrow |y+3| = y+3, |y+5| = y+5$. В этом случае будет $2x-2 = 2y+8 \iff y = x-5$ — получили луч на прямой $y = x-5$, где ≥ 2 .

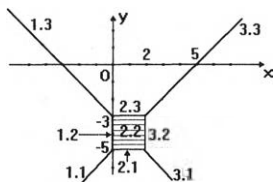


Рис. 14

ответ: искомое множество изображено на рисунке 14. Номера подслучаев около его подмножеств показывают, какой из подслучаев дает данный кусок ответа. Если из рисунка это не ясно, обратитесь к рассмотрению подслучая с данным номером. ◀

► **Задача 7.** Изобразить на плоскости множество точек (x, y) , заданных неравенством $(x-y)(x^2+y) \geq 0$.

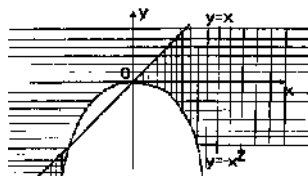


Рис. 15

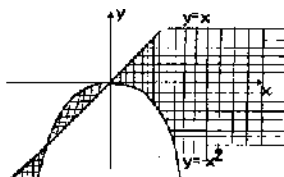


Рис. 16

решение. Произведение двух чисел неотрицательно, если и только если каждое из них либо неотрицательно, либо неположительно.

1) $x-y \geq 0$ и $x^2+y \geq 0$. Нарисуем каждое из множеств $x-y \geq 0$ и $x^2+y \geq 0$ отдельно. Их пересечение даст первый кусок ответа. На рис. 15 он совпадает с множеством пересечения вертикальной и горизонтальной штриховок.

2) $x-y \leq 0$ и $x^2+y \leq 0$. Эта часть ответа строится аналогично и представляет собой кусок плоскости внутри параболы $y = -x^2$, отсеченный прямой $y = x$.

Ответ: искомое множество изображено на рис. 16.

► **Задача 8.** Изобразить на плоскости множество решений неравенства

$$\frac{2x - 2y + 1}{x^2 + y^2 - 1} \geq 1.$$

Решение. Преобразуем исходное неравенство:

$$\frac{2x - 2y + 1}{x^2 + y^2 - 1} \geq 1 \iff$$

$$\frac{2x - 2y + 1 - x^2 - y^2 + 1}{x^2 + y^2 - 1} \geq 0 \iff \frac{4 - (x^2 - 2x + 1) - (y^2 + 2y + 1)}{x^2 + y^2 - 1} \geq 0$$

$$\iff \frac{(x-1)^2 + (y+1)^2 - 4}{x^2 + y^2 - 1} \leq 0 \iff \begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 - 4 \geq 0, \\ x^2 + y^2 - 1 \leq 0, \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 0, \\ x^2 + y^2 - 1 \geq 0. \end{cases}$$

Следовательно, ответ складывается из двух кусков: внешней части окружности радиуса 2 с центром в точке $(1, -1)$, пересеченной с внутренней частью круга радиуса 1 с центром в нуле, а также из внешней части второго круга, пересеченной с внутренней частью первого (см. рис. 17).

Ответ: искомое множество изображено на рис. 17. Центр меньшей окружности есть начало координат, а радиус равен 1; центр большей — точка $(1, -1)$, радиус — 2. ◀

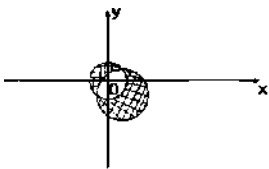


Рис. 17

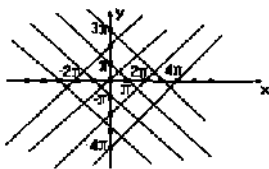


Рис. 18

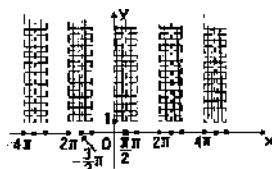


Рис. 19

► **Задача 9.** Изобразить на плоскости множество точек (x, y) таких, что $\sin x - \sin y = 0$.

Решение. Преобразуем эквивалентно наше равенство:

$$\sin x - \sin y = 0 \iff 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} = 0 \iff \begin{cases} x-y = 2n\pi \\ x+y = \pi + 2n\pi \end{cases}, n \in \mathbb{Z}.$$

Первая строчка полученной совокупности задает семейство прямых, параллельных прямой $y = x$, а вторая — семейство прямых, ей перпендикулярных.

Ответ: искомое множество изображено на рис. 18. ◀

- **Задача 10.** Изобразить на плоскости множество точек (x, y) таких, что $\log_y(\sin x) < 0$.

Решение. Наше неравенство эквивалентно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} y > 1, \\ 0 < \sin x < 1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 0 < y < 1, \\ \sin x > 1. \end{cases}$$

Вторая, ясное дело, решений не имеет, а первой удовлетворяют такие пары (x, y) , что $x \in (2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi) \cup (\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \pi + 2n\pi)$, $y > 1$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: искомое множество изображено на рис. 19. Его граница нарисована пунктирной линией, чтобы показать, что она не входит в заданное множество. Обратите внимание на то, что из прямоугольных областей выброшены «средние линии» — лучи $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $y > 1$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

Наш урок окончен. Оценку поставьте себе по стандартным критериям.

Домашнее задание

Во всех задачах требуется изобразить на плоскости множество точек (x, y) , заданное указанным соотношением.

- 1. $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$
- 2. $x^2 + y^2 + x - y + \frac{1}{2} \leq 0$
- 3. $y - x^2 - x \geq 0$
- 4. $3x + 2y \geq -1$
- 5. $x^2 - 5xy + 6y^2 \geq 0$
- 6. $xy + 1 \leq 0$
- 7. $y \geq \operatorname{tg} x$
- 8. $y - \sin x \leq 0$
- 9. $|x + 1| \geq |y|$
- 10. $|x| + |y| = 1$
- 11. $\log_x y > 0$
- 12. $|y| - |y + x| = 1$
- 13. $y + \operatorname{ctg} x \leq 1$
- 14. $x - y^2 = 1$
- 15. $\frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|}$
- 16. $|\frac{x}{y}| \leq 1$

- 17. $|x - 1| \leq 1$
- 18. $|y + 1| \leq 2$
- 19. $\begin{cases} |x + 2| \leq 1 \\ |y - 1| \geq 2 \end{cases}$
- 20. $y - \frac{x+1}{x} \leq 0$
- 21. $\log_{\sin(x-y)}(x+y) = 0$
- 22. $|x - y| + |x + y| = 2$
- 23. $|y| = \sin x$
- 24. $|x| = \sin y$
- 25. $\log_{|\sin x|} y > 0$
- 26. $|x + 1| + |y + 1| \leq 3$
- 27. $|x - y| + |x - 1| \geq 1$
- 28. $y = 2x^2 - 5x + 3$
- 29. $x = 3y - 2y^2 + 7$
- 30. $(xy - 2)(2x + y - 1) > 0$

Глава 7

Планиметрия

Урок 26

Общие треугольники

К моему великому сожалению, большая часть моих учеников, узнавая, что мы будем проходить задачи по планиметрии, задавала мне вопрос: «Планиметрия — а что это такое?» Поэтому отмечу и здесь, что планиметрия — это геометрия на плоскости. Задачи по планиметрии встречаются практически в каждом варианте вступительных экзаменов. Они, как правило, просты, но требуют совершенно иного мышления, нежели алгебраические задачи. Видимо, нельзя сказать, что существует какой-то набор рецептов для их решения, но тот, кто набирается достаточного опыта, справляется.

Отличительная особенность геометрических задач состоит в том, что по виду конкретной задачи невозможно сразу понять, простая она или сложная. Вполне может быть так, что на поиск очень простого решения придется потратить массу времени. Тем не менее, опыт показывает, что абитуриенты, освоившие мою программу по планиметрии, не испытывают трудностей на экзаменах.

Цель настоящего урока — дать вам возможность освоить алгебраический подход к решению планиметрических задач. Практически в каждой задаче необходимо найти какой-то числовой элемент (длину стороны, площадь, угол и т.п.). Часто для этого надо рассматривать треугольники. Мы должны научиться, используя данные элементы треугольника, составлять системы уравнений относительно любых других элементов и находить их.

Договоримся об обозначениях, которые будут употребляться на этом уроке. Если дан треугольник ABC , то буквы A , B , C будут обозначать как вершины треугольника, так и его углы в этих вершинах. Буквами a , b , c

обозначаются стороны, лежащие *напротив* углов A, B, C соответственно, m_a, m_b, m_c — медианы, проведенные к соответствующим сторонам, h_a, h_b, h_c — соответствующие высоты и l_a, l_b, l_c — биссектрисы. Через R и r будут обозначаться соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей, S — площадь треугольника, $p = \frac{a+b+c}{2}$ — его полупериметр.

Следующие теоремы мы должны знать идеально.

$$(1) \quad S = \frac{1}{2}ah_a = pr = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}ab \sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$(2) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \text{ — теорема косинусов.}$$

$$(3) \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ — теорема синусов.}$$

Естественно, и следствия этих теорем должны быть постоянно в нашей памяти и в любой момент готовы к применению. Например, мы написали, что $S = \frac{1}{2}ah_a$ и $S = \frac{1}{2}ab \sin C$. Но, конечно же, будет и $S = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B$. Если нам нужно найти, например, радиус r вписанной в треугольник окружности, то для него есть только одна формула — $r = \frac{S}{p}$. Если же мы ищем радиус R описанной окружности, то надо помнить четыре возможности для поиска R :

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C} = \frac{abc}{4S}.$$

Для поиска площади таких возможностей еще больше, и надо все их держать в памяти.

На сегодняшнем уроке я хочу разобрать две ситуации: когда даны все стороны и надо найти остальные элементы и когда даны две стороны и какой-либо элемент, а найти надо третью сторону. При этом я не выношу в качестве задачи нахождение площади по трем сторонам, поскольку ответ, очевидным образом, дается с применением последнего выражения для площади в формуле (1).

► **Задача 1.** Даны a, b, c . Найти угол A .

Решение. По теореме косинусов имеем $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, откуда $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \iff A = \arccos \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. Последняя эквивалентность имеет место, поскольку $0 < A < \pi$.

Ответ: $A = \arccos \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. ◀

► **Задача 2.** Даны a, b, c . Найти r .

Решение. Из того, что $S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, находим, что $r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$. Поскольку $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ известно, задача решена.

Ответ: $r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$. ◀

► **Задача 3.** Даны a, b, c . Найти R .

Решение. Снова найдем площадь двумя способами. Мы знаем, что

$$S = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

откуда получаем

$$\text{Ответ: } R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}. \quad \blacktriangleleft$$

► **Задача 4.** Даны a , b , c . Найти h_a .

Решение. Здесь снова работает формула для площади:

$$ah_a = 2S = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

и дальше все ясно.

$$\text{Ответ: } h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}. \quad \blacktriangleleft$$

► **Задача 5.** Даны a , b , c . Найти m_a .

Решение. Обозначим точку пересечения медианы m_a со стороной BC через D . Пусть $\angle ADB = \alpha$, тогда $\angle ADC = \pi - \alpha$, $BD = DC = \frac{a}{2}$. Запишем теоремы косинусов для треугольников ADB и ADC (см. рис. 1):

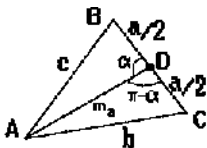


Рис. 1

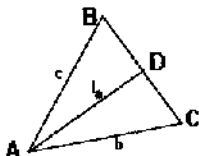


Рис. 2

$$c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2 - am_a \cos \alpha, \quad b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2 - am_a \cos(\pi - \alpha).$$

Из того, что $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, следует, что, сложив вышеприведенные равенства, мы получим

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2m_a^2 \iff m_a^2 = \frac{1}{2} \left(b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} \right).$$

$$\text{Ответ: } m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}. \quad \blacktriangleleft$$

► **Задача 6.[2]** Даны a , b , c . Найти l_a .

Решение. Мы найдем длину биссектрисы l_a в два приема и заодно получим для нее полезную промежуточную формулу. Посмотрим на рисунок 2. Идея решения состоит в том, чтобы подсчитать площадь треугольника ABC двумя способами: обычным образом и как сумму площадей треугольников ABD и ACD .

Пусть площади треугольников ABD , ACD и ABC равны S_1 , S_2 и S соответственно. Тогда $S_1 = \frac{1}{2}cl_a \sin \frac{A}{2}$, $S_2 = \frac{1}{2}bl_a \sin \frac{A}{2}$ и $S = \frac{1}{2}bc \sin A$. Подставим эти значения площадей в равенство $S = S_1 + S_2$:

$$\frac{1}{2}cl_a \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2}bl_a \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2}bc \sin A$$



$$(4) \quad l_a = \frac{bc \sin A}{(b+c) \sin \frac{A}{2}} = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}.$$

Полученная для биссектрисы формула также полезна и часто применяется. Для того, чтобы нам закончить решение задачи, надо исключить $\cos \frac{A}{2}$ из выражения для биссектрисы. Для этого запишем цепочку эквивалентностей, начиная с теоремы косинусов.

$$(5) \quad \begin{aligned} b^2 + c^2 - 2bc \cos A = a^2 &\iff b^2 + c^2 - 2bc(2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1) = a^2 \iff \\ 4bc \cos^2 \frac{A}{2} &= (b+c)^2 - a^2. \end{aligned}$$

Из формулы (4) получаем $\cos \frac{A}{2} = \frac{(b+c)l_a}{2bc}$. Подставляем это значение косинуса половинного угла в формулу (5):

$$(b+c)^2 - a^2 = 4bc \cdot \frac{(b+c)^2 l_a^2}{4b^2 c^2} \iff l_a^2 = \frac{bc((b+c)^2 - a^2)}{(b+c)^2}.$$

Ответ: $l_a = \frac{\sqrt{bc(b+c)(b+c-a)}}{b+c}$. ◀

► **Задача 7.** Даны a , b , A . Найти c .

Решение. Согласно теореме косинусов имеем $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \iff c^2 - 2b \cos A \cdot c + b^2 - a^2 = 0$. У данного квадратного уравнения относительно c четверть дискриминанта равна $b^2 \cos^2 A - b^2 + a^2 = a^2 - b^2 \sin^2 A$. Отсюда заключаем, что если $a < b \sin A$, то таких c не существует; если $a = b \sin A$, то $c = b \cos A$; если $b > a > b \sin A$, то существуют два числа c , удовлетворяющих условию задачи, а именно, $c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$; если $a = b$, то существует единственное $c = 2b \cos A$; и, наконец, если $a > b$, то существуют два возможных значения для c , а именно, $c = b \cos A + \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$ и $c = \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A} - b \cos A$.

Следующие рисунки поясняют геометрический смысл полученного ответа.

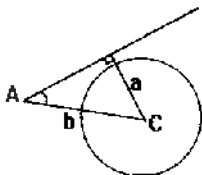


Рис. 3

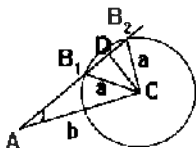


Рис. 4

Если известны стороны AC и BC треугольника ABC , а также его угол A , то вершина B лежит, с одной стороны, на прямой, образующей угол A с прямой BC , а с другой — на окружности радиуса a с центром в точке C . На рис. 3 видно, что если $a < b \sin A$, то данная окружность не пересекается с прямой AB , т.е. треугольника с такими данными не существует; если $a = b \sin A$, то существует единственный прямоугольный треугольник с так заданными a , b и A , причем $c = b \cos A$. Рисунок 4 показывает, что если $b > a > b \sin A$, то окружность пересекается с прямой AB в двух точках B_1 и B_2 , и тогда искомая сторона c равна AB_1 или AB_2 . Ясно, что когда $a = b$, точка B_1 совпадает с A , так что для c остается лишь возможность быть равным AB_2 . Нарисуйте, пожалуйста, сами картинку для случая $a > b$.

Ответ: если $a < b \sin A$, то таких треугольников не существует; если $a = b \sin A$, то $c = b \cos A$; если $b \sin A < a < b$, то $c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$; если $a = b$, то $c = 2b \cos A$; если $a > b$, то $c = \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A} \pm b \cos A$. ◀

► **Задача 8** [2]. Даны a , b , r . Найти c .

Решение. Если a , b , r заданы произвольно, то школьник решить эту задачу не сможет, поскольку она сводится к решению кубического уравнения. Покажем, тем не менее, как это уравнение получить. Если вам все-таки попала такая задача с числовыми значениями a , b , r , то единственный ваш шанс состоит в том, чтобы выписать кубическое уравнение и попытаться угадать его корни.

Само же уравнение получается так:

$$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c).$$

Если теперь подставить значение полупериметра в последнее уравнение, получим кубическое уравнение относительно c .

Ответ: длина c находится из кубического уравнения

$$4(a+b+c)r^2 = (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c),$$

которое в общем виде школьными методами решить нельзя. Если даны конкретные числа a , b , r , надо попытаться угадать корни. ◀

► **Задача 9.** Даны a , b , R . Найти c .

Решение. По теореме синусов имеем: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R$, откуда $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$. Отсюда видно, что если $a > 2R$, или $b > 2R$, то такого треугольника, как требуется, не существует. Если мы предположим, что $a = 2R$ или $b = 2R$, то синус соответствующего угла будет равен единице, а сторона, равная $2R$ — гипотенузой. Значит, в этом случае существует единственный прямоугольный треугольник с такими данными, и третья сторона находится по теореме Пифагора.

Пусть теперь $a < 2R$ и $b < 2R$. Опять-таки по теореме синусов имеем

$$c = 2R \sin C = 2R \sin(\pi - A - B) = 2R \sin(A + B) = 2R \sin A \cos B + 2R \sin B \cos A.$$

Нам осталось найти косинусы углов A и B .

Заметим сначала, что, если $a = b$, то оба угла A и B — острые, так что их косинусы определяются однозначно и равны $\sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}$ и $\sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{\sqrt{4R^2 - b^2}}{2R}$ соответственно. Следовательно, в этом случае существует единственный (равнобедренный) треугольник с такими данными, и тогда $c = \frac{a\sqrt{4R^2 - a^2}}{R}$.

Если $a \neq b$, то каждый из углов A и B может оказаться тупым, и тогда надо выбрать знак минус перед радикалом, определяющим косинус. Конечно же, другой косинус окажется положительным, и мы получим, что либо

$$c = \frac{1}{R}(a\sqrt{4R^2 - b^2} - b\sqrt{4R^2 - a^2}), \text{ либо } c = \frac{1}{R}(-a\sqrt{4R^2 - b^2} + b\sqrt{4R^2 - a^2}).$$

Сделайте, пожалуйста, сами рисунок, иллюстрирующий наши выкладки.

Ответ: если $a > 2R$, или $b > 2R$, или $a = b = 2R$, то таких треугольников нет; если $a = 2R$, $b < 2R$ (или $b = 2R$, $a < 2R$), то существует единственный прямоугольный треугольник такой, как требуется, причем тогда $c = \sqrt{4R^2 - b^2}$ (или $c = \sqrt{4R^2 - a^2}$ соответственно). ◀

Если $a = b < 2R$, то существует единственный треугольник как в условии; при этом $c = \frac{a\sqrt{4R^2 - a^2}}{R}$. Наконец, если $a < 2R$, $b < 2R$, $a \neq b$, то искомым треугольников два и $c = \frac{1}{R}|a\sqrt{4R^2 - b^2} \pm b\sqrt{4R^2 - a^2}|$.

► **Задача 10.** Даны a, b, h_a . Найти c .

Решение. Найдем двумя способами площадь треугольника:

$$2S = ah_a = ab \sin C \Rightarrow \sin C = \frac{h_a}{b}.$$

Если $b < h_a$, то такого треугольника, как в условии, не существует. Если $b = h_a$, то $C = \frac{\pi}{2}$ и $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Если $b > h_a$, то либо $C = \arcsin \frac{h_a}{b}$, либо $C = \pi - \arcsin \frac{h_a}{b}$. Отсюда и получаем

Ответ: если $b < h_a$, то такого треугольника, как в условии, не существует.

Если $b = h_a$, то $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; если $b > h_a$, то $c = \sqrt{a^2 + b^2 \pm 2ab\sqrt{1 - \frac{h_a^2}{b^2}}}$.

► **Задача 11.** Даны a, b, h_c . Найти c .

Решение. Так же, как и в предыдущей задаче, можно найти $\sin A = \frac{h_c}{b}$ и $\sin B = \frac{h_c}{a}$. Следовательно, при $a < h_c$, или $b < h_c$, или $a = b = h_c$ решений нет. Если $a = h_c$, $b > h_c$, то $B = \frac{\pi}{2}$ и $c = \sqrt{b^2 - a^2}$. Если $b = h_c$, $a > h_c$, то $A = \frac{\pi}{2}$ и $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Если $a = b > h_c$, то существует лишь один такой треугольник и $c = 2\sqrt{a^2 - h_c^2}$ (см. рис. 5).

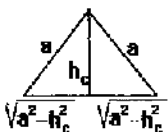


Рис. 5

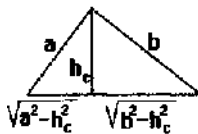


Рис. 6

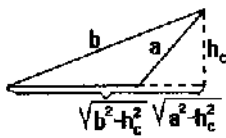


Рис. 7

Пусть, например, $b > a > h_c$. Тогда существуют два таких треугольника (см. рис. 6 и рис. 7).

В случае, когда угол B острый, получаем $c = \sqrt{a^2 - h_c^2} + \sqrt{b^2 - h_c^2}$ (рис. 6). Если же $B > \frac{\pi}{2}$, то $c = -\sqrt{a^2 - h_c^2} + \sqrt{b^2 - h_c^2}$.

Ответ: если $a < h_c$, или $b < h_c$, или $a = b = h_c$ — нет решений; если $b > a = h_c$, то $c = \sqrt{b^2 - a^2}$; если $a = b > h_c$, то $c = 2\sqrt{a^2 - h_c^2}$; если $b > a > h_c$, то $c = \pm\sqrt{a^2 - h_c^2} + \sqrt{b^2 - h_c^2}$. ◀

► **Задача 12.** Даны a, b, m_a . Найти c .

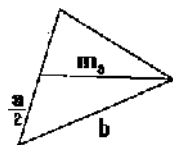


Рис. 8

Решение. Мы сделаем анализ задачи с помощью чертежа, а вычисления проведем отдельно. Посмотрим на рис. 8.

Из рисунка видно, что если существует треугольник со сторонами $\frac{a}{2}, m_a, b$, то продолжив отрезок длины $\frac{a}{2}$ до отрезка длины a , получим искомый треугольник. Разумеется, если существует искомый треугольник, то существует треугольник со сторонами $\frac{a}{2}, m_a, b$.

Приступим к вычислениям. В задаче 5 мы вычислили, что

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Отсюда легко находится $c = \sqrt{\frac{a^2 + 4m_a^2 - 2b^2}{2}}$.

Ответ: задача имеет решение если и только если существует треугольник со сторонами $\frac{a}{2}$, m_a , b , т.е. тогда, когда сумма любых двух из указанных отрезков больше третьего. В этом случае $c = \sqrt{\frac{a^2 + 4m_a^2 - 2b^2}{2}}$. ◀

► **Задача 13.** Даны a , b , m_c . Найти c .

Решение. Мы снова сделаем исследование с помощью чертежа. Взглянем на рис. 9.

Мы построили треугольник ABC до параллелограмма $ACBK$. При этом $KC = 2m_c$, $KB = a$ и если существует треугольник со сторонами $a, b, 2m_c$, то существует и треугольник ABC , причем сторона $AB = c$ равна удвоенной медиане треугольника KBC . Так же, как и в предыдущей задаче, из существования искомого треугольника очевидным образом следует, что существует треугольник со сторонами $a, b, 2m_c$.

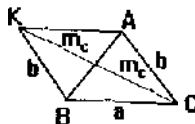


Рис. 9

Из равенства $4m_c^2 = 2b^2 + 2a^2 - c^2$ легко находим, что $c = \sqrt{4m_c^2 - 2a^2 - 2b^2}$.

Ответ: искомый треугольник существует тогда и только тогда, когда существует треугольник со сторонами $a, b, 2m_c$, и при этом $c = \sqrt{4m_c^2 - 2a^2 - 2b^2}$. ◀

► **Задача 14.** Даны a, b, l_a . Найти c .

Решение. Решить задачу школьными методами в общем виде невозможно, ибо, так же как и задача 8, она сводится к решению кубического уравнения. Действительно, согласно задаче 6 имеем

$$l_a = \frac{\sqrt{bc(b+c+a)(b+c-a)}}{b+c} \iff l_a^2(b+c)^2 = bc(b+c+a)(b+c-a).$$

Это и есть искомое кубическое уравнение относительно c . Так же, как и в случае с задачей 6, здесь можно надеяться лишь на то, что при конкретно заданных a, b, l_a корни этого уравнения можно будет угадать.

Ответ: длина стороны c является корнем уравнения $l_a^2(b+c)^2 = bc(b+c+a)(b+c-a)$, которое в общем виде не решается школьными методами. Если заданы конкретные числа a, b, l_a , надо попытаться угадать один из его корней. ◀

► **Задача 15.** Даны a, b, l_c . Найти c .

Решение. Воспользуемся еще раз формулой для биссектрисы из задачи 6.

$$\begin{aligned} l_c &= \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b} \iff l_c(a+b)^2 = ab(a+b+c)(a+b-c) \iff \\ &\iff \frac{l_c(a+b)^2}{ab} = (a+b)^2 - c^2 \iff c^2 = (a+b)^2 \left(1 - \frac{l_c^2}{ab}\right). \end{aligned}$$

Из последнего равенства уже легко находится c .

Для того, чтобы понять, при каких a , b , l_c задача имеет решение, воспользуемся другой формулой для биссектрисы, также полученной в задаче 6. Согласно этой формуле

$$l_c = \frac{2ab \cos \frac{C}{2}}{a+b} \iff \cos \frac{C}{2} = \frac{(a+b)l_c}{2ab}.$$

Искомый треугольник существует тогда и только тогда, когда можно определить угол C , т.е. тогда и только тогда, когда $\frac{(a+b)l_c}{2ab} < 1$.

Ответ: задача имеет решение если и только если $l_c < \frac{2ab}{a+b}$. В этом случае

$$c = (a+b) \sqrt{1 - \frac{l_c^2}{ab}}. \blacktriangleleft$$

► **Задача 16.** Даны a , b , S . Найти c .

Решение. Наши данные сразу позволяют найти синус угла C :

$$\frac{1}{2}ab \sin C = S \iff \sin C = \frac{2S}{ab}.$$

Дальше все ясно.

Ответ: если $ab < 2S$ — нет решений; если $ab = 2S$, то наш треугольник прямоугольный и $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; если $ab > 2S$, то существуют два треугольника таких, как в условии. При этом $c = \sqrt{a^2 + b^2 \pm \sqrt{4a^2b^2 - 16S^2}}$. ◀

Наш урок окончен. Оценку можете поставить себе по стандартным критериям, причем на первый раз можно считать задачу правильно решенной, даже если вы просто получили ответ, не проводя исследования. Ваш ответ может сильно отличаться от приведенного и быть, тем не менее, правильным. **Обязательно** проведите преобразования, приводящие ваш ответ к моему (или мой к вашему). В противном случае задачу верно решенной считать нельзя.

Домашнее задание

- 1. Даны a , A , B . Найти b , c .
- 2. Даны a , A , r . Найти b , c .
- 3. Даны a , A , S . Найти b , c .
- 4. Даны a , A , m_a . Найти b , c .
- 5. Даны a , A , m_b . Найти b , c .
- 6. Даны a , A , h_a . Найти b , c .
- 7. Даны a , A , h_b . Найти b , c .
- 8. Даны a , A , l_a . Найти b , c .
- 9. Даны a , B , R . Найти b , c .

- 10. Даны a , B , r . Найти b , c .
- 11. Даны a , B , S . Найти b , c .
- 12. Даны a , B , h_a . Найти b , c .
- 13. Даны a , B , h_b . Найти b , c .
- 14. Даны a , B , m_a . Найти b , c .
- 15. Даны a , B , m_b . Найти b , c .
- 16. Даны a , B , m_c . Найти b , c .
- 17. Даны a , B , l_b . Найти b , c .
- 18. Даны a , B , l_c . Найти b , c .
- 19. Даны a , S , R . Найти b , c .
- 20. Даны a , S , r . Найти b , c .
- 21. Даны a , S , h_b . Найти b , c .
- 22. Даны a , S , m_a . Найти b , c .
- 23. Даны a , S , m_b . Найти b , c .
- 24 [3]. Даны a , S , l_a . Найти b , c .
- 25. Даны a , R , r . Найти b , c .
- 26. Даны a , R , h_a . Найти b , c .
- 27. Даны a , R , h_b . Найти b , c .
- 28. Даны a , R , m_a . Найти b , c .
- 29. Даны a , R , m_b . Найти b , c .
- 30. Даны a , R , l_a . Найти b , c .
- 31. Даны a , r , h_a . Найти b , c .
- 32. Даны a , r , h_b . Найти b , c .
- 33. Даны a , h_a , h_b . Найти b , c .
- 34. Даны a , h_a , m_a . Найти b , c .
- 35. Даны a , h_a , m_b . Найти b , c .
- 36. Даны a , h_a , l_a . Найти b , c .
- 37. Даны a , h_b , m_a . Найти b , c .
- 38. Даны a , h_b , m_b . Найти b , c .
- 39. Даны a , h_b , m_c . Найти b , c .
- 40. Даны a , h_b , l_b . Найти b , c .
- 41. Даны a , h_b , l_c . Найти b , c .
- 42. Даны a , m_a , m_b . Найти b , c .
- 43 [3]. Даны a , m_a , l_a . Найти b , c .
- 44. Даны h_a , h_b , h_c . Найти b , c .
- 45. Даны m_a , m_b , m_c . Найти b , c .

Урок 27

Прямоугольные треугольники

На этом уроке мы опять будем решать задачи, поставленные в общем виде. Необходимо наработать уверенность в том, что, зная каких-нибудь два элемента прямоугольного треугольника, мы сможем найти все остальные. Формально сегодняшние задачи будут отличаться от задач урока 26 лишь тем, что $C = \frac{\pi}{2}$ для всех рассматриваемых треугольников.

Однако я выделил прямоугольные треугольники в отдельный урок: во-первых, для того чтобы вы еще раз потренировались решать геометрические задачи с применением алгебры, а во-вторых, для того чтобы у вас выработалось чутье именно к прямоугольным треугольникам и стала понятна их специфика. К примеру, если вы знаете гипотенузу прямоугольного треугольника, надо сразу понимать, что вы знаете и радиус описанной окружности, который равен половине гипотенузы, что радиус вписанной окружности также просто выражается через стороны, и т. п.

Приступим к решению задач. Напомню, что до конца этого урока угол C считается прямым. Ничего нового по сравнению с предыдущим уроком знать не надо, кроме теоремы Пифагора, — $a^2 + b^2 = c^2$, — которая очевидным образом вытекает из теоремы косинусов при $C = \frac{\pi}{2}$. Хорошо нужно владеть определениями тригонометрических функций: знать, что синус угла есть отношение противолежащего катета к гипотенузе, косинус его — отношение прилежащего катета к гипотенузе, тангенс есть отношение противолежащего катета к прилежащему, а котангенс — отношение прилежащего катета к противолежащему.

Отсюда следует, что $a = c \sin A = c \cos B = b \operatorname{tg} A = b \operatorname{ctg} B$, $b = c \cos A = c \sin B = a \operatorname{ctg} A = a \operatorname{tg} B$, $c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B} = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\cos A}$. Все приведенные равенства вы должны знать наизусть; в худшем случае — уметь вывести из определения.

► **Задача 1.** Даны a, b . Найти A, B .

Решение. Из того, что $0 < A, B < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg} B$ следует, что $A = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$, $B = \operatorname{arccotg} \frac{a}{b}$.

Ответ: $A = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$, $B = \operatorname{arccotg} \frac{a}{b}$. ◀

► **Задача 2.** Даны a, b . Найти R, r .

Решение. Проще всего находится $R = \frac{c}{2 \sin C} = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$. Отметим также, что во вписанной окружности сторона c является хордой и равна диаметру. Значит, она сама есть диаметр, и мы доказали, что в прямоугольном треугольнике центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы. Прошу вас хорошо запомнить этот факт.

Далее, $r = \frac{S}{p} = \frac{ab}{a+b+c}$. В эту формулу можно было бы подставить значение c и на этом остановиться. Мы покажем, что ее можно существенно упростить. Воспользовавшись тем, что $2ab = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) = (a+b)^2 - c^2 = (a+b+c)(a+b-c)$, получим

$$r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{\frac{1}{2}(a+b+c)(a+b-c)}{a+b+c} = \frac{1}{2}(a+b-c).$$

Я попрошу вас запомнить и эту формулу.

Ответ: $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$, $r = \frac{1}{2}(a+b-\sqrt{a^2 + b^2})$. ◀

► **Задача 3.** Даны a , b . Найти m_a , m_c .

Решение. Вспомним формулы прошлого урока для выражения медиан через стороны:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2a^2 + 2b^2 - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 + a^2}.$$

Аналогично

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - a^2 - b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ответ: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 + a^2}$, $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. ◀

► **Задача 4.** Даны a , b . Найти h_c .

Решение. Ясно, что $2S = ab = ch_c \iff h_c = \frac{ab}{c}$.

Ответ: $h_c = \frac{ab}{c}$. ◀

► **Задача 5.** Даны a , b . Найти l_a , l_c .

Решение. Можно было бы воспользоваться сложными формулами для биссектрис, которые были получены на прошлом уроке. Но в данном случае задача решается проще. Посмотрим на рисунок 1.

Мы увидим, что в прямоугольном треугольнике ACD известен катет AC и легко находится угол DAC , равный $\frac{A}{2}$. Значит, $l_a = \frac{b}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{b}{\cos(\frac{1}{2} \arctg \frac{b}{a})}$.

Для поиска l_c уже проще воспользоваться результатом задачи 6 предыдущего урока.

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b} = \frac{1}{a+b} \cdot \sqrt{ab((a+b)^2 - c^2)} = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}.$$

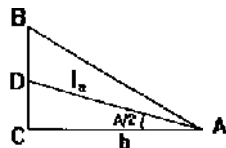


Рис. 1

Ответ: $l_a = \frac{b}{\cos(\frac{1}{2} \arctg \frac{a}{b})}$, $l_c = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. ◀

► **Задача 6.** Даны a , r . Найти b .

Решение. Мы уже знаем, что $a+b-\sqrt{a^2+b^2} = 2r \iff a+b-2r = \sqrt{a^2+b^2}$. Отметим еще, что всегда $a > 2r$ — это следует, например, из того, что

$$c > b \Rightarrow a+b+c > 2b \Rightarrow \frac{2b}{a+b+c} < 1 \Rightarrow 2r = \frac{2ab}{a+b+c} < a.$$

Значит, наше уравнение относительно b можно возвести в квадрат, не нарушая равносильности. Получим, что

$$(a+b)^2 - 4r(a+b) + 4r^2 = a^2 + b^2 \iff 2ab - 4ra - 4rb + 4r^2 = 0 \iff b = \frac{2r(a-r)}{a-2r}.$$

Ответ: если $a \leq 2r$ — нет решений; если $a > 2r$, то $b = \frac{2r(a-r)}{a-2r}$. ◀

► **Задача 7.** Даны a , R . Найти b .

Решение. Если мы с вами еще не забыли, что $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$, то найдем эту задачу совсем тривиальной. Из приведенного равенства следует, что $b = \sqrt{4R^2 - a^2}$, и надо только не забыть, что при $a \geq 2R$ решений нет.

Ответ: если $a \geq 2R$, то решений нет; если $a < 2R$, то $b = \sqrt{4R^2 - a^2}$. ◀

► **Задача 8.** Даны a , m_a . Найти b .

Решение. Применим формулу для m_a , полученную в задаче 3:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 + a^2} \iff 4m_a^2 = 4b^2 + a^2 \iff b = \frac{1}{2}\sqrt{4m_a^2 - a^2}.$$

Ответ: если $2m_a \leq a$, то нет решений; если $2m_a > a$, то $b = \frac{1}{2}\sqrt{4m_a^2 - a^2}$. ◀

► **Задача 9.** Даны a , m_b . Найти b .

Решение. Снова применяем результат задачи 3:

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + b^2} \iff 4m_b^2 = 4a^2 + b^2 \iff b = 2\sqrt{m_b^2 - a^2}.$$

Ответ: если $a \geq m_b$, то нет решений; если $a < m_b$, то $b = 2\sqrt{m_b^2 - a^2}$. ◀

► **Задача 10.** Даны a , h_c . Найти b .

Решение. Вычислим двумя способами площадь треугольника:

$$2S = ab = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot h_c \iff a^2 b^2 = a^2 h_c^2 + b^2 h_c^2 \iff b^2 = \frac{a^2 h_c^2}{a^2 - h_c^2}.$$

Ответ: если $a \leq h_c$, то нет решений; если $a > h_c$, то $b = \frac{ah_c}{\sqrt{a^2 - h_c^2}}$. ◀

► **Задача 11.** Даны a, l_a . Найти b .

Решение. Эта задача в общем виде решена школьными методами быть не может, так как сводится к решению кубического уравнения. Сделаем чертеж. Обозначим для простоты угол $\frac{A}{2}$ через α . Тогда $b = l_a \cos \alpha$ и $a = b \operatorname{tg} 2\alpha$, откуда и получаем уравнение на α :

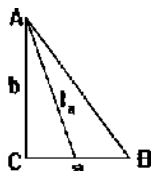


Рис. 2

$$l_a \cos \alpha \operatorname{tg} 2\alpha = a \iff \cos \alpha \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{a}{l_a} \iff \frac{\sin \alpha - \sin^3 \alpha}{1 - 2\sin^2 \alpha} = \frac{a}{2l_a}.$$

Ответ: $b = l_a \cos \alpha$, где α определяется из кубического уравнения

$$\frac{\sin \alpha - \sin^3 \alpha}{1 - 2\sin^2 \alpha} = \frac{a}{2l_a}.$$

Это уравнение не может быть в общем виде решено школьными методами, но при конкретных a и l_a надо попытаться угадать корень. ◀

► **Задача 12.** Даны a, l_b . Найти b .

Решение. Стоило нам заменить индекс у биссектрисы, как задача стала легко решаемой. В самом деле, $l_b \cos \frac{B}{2} = a$ (сделайте сами чертеж!). Значит, $\cos \frac{B}{2} = \frac{a}{l_b} \iff B = 2 \arccos \frac{a}{l_b}$ и $b = a \operatorname{tg} B$. Учитывая, что $\cos \frac{B}{2} < 1$ и $0 < \frac{B}{2} < \frac{\pi}{4}$, получаем

Ответ: если $a \geq l_b$ или $a \leq \frac{1}{\sqrt{2}} l_b$, то нет решений; если $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{a}{l_b} < 1$, то $b = a \operatorname{tg}(2 \arccos \frac{a}{l_b})$. ◀

► **Задача 13.** Даны a, l_c . Найти b .

Решение. Эта задача также решается просто. Вспомним формулу для биссектрисы из задачи 6 прошлого урока. Имеем

$$l_c = \frac{2ab \cos \frac{C}{2}}{a+b} = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b} \iff b = \frac{al_c}{\sqrt{2}a - l_c}.$$

Ответ: если $\sqrt{2}a \leq l_c$, то нет решений; если $\sqrt{2}a > l_c$, то $b = \frac{al_c}{\sqrt{2}a - l_c}$. ◀

Наш урок окончен. Оценка ставится по стандартным критериям. Задача, в которой получен правильный ответ, но не сделано исследования, когда имеется решение, оценивается как $\mp$.

Домашнее задание

- 1. Даны A , S . Найти a , b .
- 2. Даны A , R . Найти a , b .
- 3. Даны A , r . Найти a , b .
- 4. Даны A , h_c . Найти a , b .
- 5. Даны A , m_a . Найти a , b .
- 6. Даны A , m_b . Найти a , b .
- 7. Даны A , m_c . Найти a , b .
- 8. Даны A , l_a . Найти a , b .
- 9. Даны A , l_b . Найти a , b .
- 10. Даны A , l_c . Найти a , b .
- 11. Даны S , R . Найти a , b .
- 12. Даны S , r . Найти a , b .
- 13. Даны S , h_c . Найти a , b .
- 14. Даны S , m_a . Найти a , b .
- 15. Даны S , l_c . Найти a , b .
- 16. Даны r , h_c . Найти a , b .
- 17. Даны r , m_c . Найти a , b .
- 18. Даны r , l_a . Найти a , b .
- 19. Даны r , l_c . Найти a , b .
- 20. Даны h_c , m_a . Найти a , b .
- 21. Даны h_c , l_c . Найти a , b .
- 22. Даны m_a , m_b . Найти a , b .
- 23. Известно, что $l_a = \frac{9}{2}\sqrt{3}$, $l_b = 4\sqrt{6}$. Найти a , b .

Урок 28

Подобие

Использование подобия треугольников часто дает решающее продвижение в планиметрической задаче. Изредка попадаются и задачи, в которых надо работать с подобием четырехугольников и более сложных фигур. Подобие произвольных фигур в школе часто определяют через наличие гомотетии, переводящей одну фигуру в другую. Для решения задач письменного экзамена достаточно знать, что многоугольники подобны, если их соответствующие углы равны, а стороны пропорциональны. Слово «соответствующие» означает, что многоугольники обязаны иметь одинаковое число вершин, причем вершины каждого из многоугольников можно так пронумеровать, что углы при вершинах с одинаковыми номерами будут равны, а отношение сторон, соединяющих соответствующие пары вершин, будет одно и то же для всех пар вершин, соединенных сторонами.

Поскольку общие определения всегда трудно понять, я повторяю их для случая треугольников и четырехугольников. Думаю, что подобие фигур с числом сторон, большим четырех, на письменном экзамене вам не встретится.

Итак, два треугольника (соответственно, два четырехугольника) подобны, если можно обозначить вершины одного из них через A, B, C (A, B, C, D), а другого — через A_1, B_1, C_1 (соответственно, A_1, B_1, C_1, D_1) так, что будет $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1$ (соответственно, $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1, \angle D = \angle D_1$) и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ (соответственно, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$).

Мы с вами должны хорошо знать три следующих признака признака подобия треугольников. Треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ в каждом из следующих случаев:

- 1) если $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1$;
- 2) если $\angle A = \angle A_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$;
- 3) если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Мы с вами должны научиться, во-первых, чувствовать, что подобие может играть в задаче решающую роль, а во-вторых, находить пары подобных треугольников, даже в порой очень запутанных случаях.

Чаще всего подобие треугольников встречается в двух следующих ситуациях.

Ситуация 1. В треугольнике ABC проведена прямая $A_1C_1 \parallel AC$ (см. рис. 1).

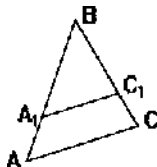


Рис. 1

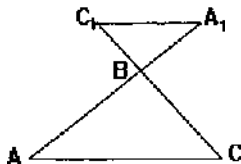


Рис. 2

Тогда треугольник ABC подобен треугольнику A_1BC_1 (по первому признаку — ибо $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ как внутренние односторонние углы секущих AB и BC при параллельных прямых AC и A_1C_1).

Ситуация 2. Прямая A_1C_1 пересекает продолжения сторон AB и BC (см. рис. 2).

Тогда треугольник ABC подобен треугольнику A_1BC_1 (по первому признаку — ибо $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ как внутренние накрест лежащие углы секущих AA_1 и CC_1 при параллельных прямых AC и A_1C_1).

Задачи на подобие — это в первую очередь задачи на отношения отрезков. Проще всего здесь разобраться, когда все они лежат на одной прямой. Вы поймете, как это сделать, на примере задач 1 и 2.

► **Задача 1.** Точка B лежит на отрезке AC и $\frac{AB}{BC} = k \neq 0$. Найти $\frac{AC}{AB}$.

Решение. Пусть $AB = x$; тогда из соотношения, заданного в условии, следует, что $BC = \frac{x}{k}$. Значит, $AC = AB + BC = x + \frac{x}{k}$. Отсюда заключаем, что

$$\frac{AC}{AB} = \frac{x + \frac{x}{k}}{x} = 1 + \frac{1}{k}.$$

Ответ: $1 + \frac{1}{k}$. ◀

► **Задача 2.** Точки A, B, C, D лежат на одной прямой в том же порядке, как они записаны (т.е. B лежит между A и C , а C — между B и D). Известно, что $\frac{AB}{CD} = k$, $\frac{BC}{BD} = l$. Найти $\frac{AB}{BC}$.

Решение. Пусть $CD = x$. Тогда по условию $AB = kx$. Воспользуемся вторым отношением условия для того, чтобы найти BC .

$$\frac{BC}{BD} = l \iff \frac{BC}{BC + CD} = l \iff \frac{BC}{BC + x} = l \iff BC = \frac{lx}{1-l}.$$

Следовательно, $AD = AB + BC + CD = kx + \frac{lx}{1-l} + x = x(1 + k + \frac{l}{1-l})$. Теперь уже легко находится искомое отношение:

$$\frac{AD}{BC} = \frac{x(1 + k + \frac{l}{1-l})}{x \cdot \frac{l}{1-l}} = \frac{1 + k - kl}{l}.$$

Ответ: $\frac{1+k-kl}{l}$. ◀

- **Задача 3.** Пусть ABC — произвольный треугольник и AD — его биссектриса (точка D лежит на стороне BC). Доказать, что $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Решение. Проведем через B прямую параллельно AC и продолжим биссектрису AD до пересечения с этой прямой в точке E (рис. 3).

Углы BAD и DAC равны, так как AD — биссектриса. Кроме того, угол BED равен углу DAC , ибо эти углы являются внутренними накрест лежащими при секущей AE параллельных прямых AC и BE . Тем самым, в треугольнике ABE имеем $\angle BAE = \angle BEA$, откуда $AB = BE$. Треугольники ADC и BDE подобны (ситуация 2). Следовательно,

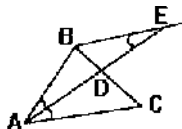


Рис. 3

$$\frac{BE}{AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Свойство биссектрисы, доказанное в задаче 3, часто применяется при решении планиметрических задач. Я попрошу вас хорошенько его запомнить. На экзаменах вы можете применять его без доказательства, так как оно входит в школьную программу.

- **Задача 4.** Пусть ABC — остроугольный треугольник, AA_1 и BB_1 — его высоты, точка A_1 лежит на стороне BC , точка B_1 — на AC . Доказать, что треугольник A_1B_1C подобен треугольнику ABC .

Решение. У треугольников ABC и A_1B_1C общий угол. Согласно второму признаку подобия, достаточно доказать, что $\frac{A_1C}{AC} = \frac{B_1C}{BC}$. Но каждое из этих отношений равно косинусу угла C : первое — из треугольника AA_1C , а второе — из треугольника BB_1C .

Значит, эти отношения равны и указанные треугольники подобны, что и требовалось доказать.

- **Задача 5.** В треугольник со сторонами 10, 17 и 21 см вписан прямоугольник с периметром 24 см так, что одна его сторона лежит на большей стороне треугольника. Найти стороны прямоугольника.

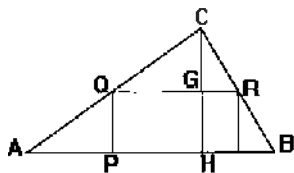


Рис. 4

Решение. Пусть в треугольнике ABC будет $AB = 21$, $BC = 10$, $AC = 17$. Против большей стороны всегда лежит больший угол, так что оба угла A и B острые и основание высоты $CH = h_c$ попадает именно на сторону AB , а не на ее продолжение (см. рис. 4).

В нашем треугольнике $a = 10$, $b = 17$, $c = 21$. Значит, $p = 24$ и

$$S = \sqrt{24(24 - 10)(24 - 17)(24 - 21)} = 84.$$

Теперь можно и найти высоту h_c , ибо $\frac{1}{2} \cdot 21h_c = 84 \iff h_c = 8$.

Пусть сторона $PS = QR$ вписанного прямоугольника равна x . Из того, что периметр прямоугольника равен $2PQ + 2x = 24$, получаем, что $PQ = GH = 12 - x$.

Треугольники ABC и QRC подобны, так же как и треугольники AHC и QGC (ситуация 1). Следовательно,

$$\frac{AB}{QR} = \frac{AC}{QC} = \frac{AH}{QG} = \frac{CH}{CG}.$$

Итак, $\frac{AB}{QR} = \frac{CH}{CG}$. Вспоминая, что $AB = 21$, $QR = x$, $CH = 8$ и $CG = 8 - GH = 8 - (12 - x) = x - 4$, получаем уравнение на x :

$$\frac{21}{x} = \frac{8}{x - 4} \iff x = \frac{84}{13}.$$

Наконец, $PQ = 12 - x = \frac{72}{13}$.

Ответ: $\frac{84}{13}$ см и $\frac{72}{13}$ см. ◀

► **Задача 6.** Дана произвольная трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$. Пусть точка O есть пересечение диагоналей трапеции. Через O параллельно основаниям трапеции проведена прямая, пересекающая ее боковые стороны AB и CD в точках P и Q соответственно. Доказать, что $PO = OQ$.

Решение. Треугольники AOD и BOC подобны согласно ситуации 2 (сделайте сами чертеж, пожалуйста). Значит, $\frac{BO}{OD} = \frac{CO}{OA}$. Прибавив единицу к обеим частям этого равенства, получим

$$(1) \quad \frac{BO}{OD} + 1 = \frac{CO}{OA} + 1 \iff \frac{BO + OD}{OD} = \frac{CO + OA}{OA} \iff \frac{BD}{OD} = \frac{CA}{OA}.$$

Треугольник BCD подобен треугольнику OQD (ситуация 1). Следовательно, $\frac{BC}{OQ} = \frac{BD}{OD}$. По той же самой причине треугольник BCA подобен треугольнику POA и $\frac{BC}{PO} = \frac{CA}{OA}$.

Но $\frac{CA}{OA} = \frac{BD}{OD}$ согласно формуле (1). Отсюда следует, что $\frac{BC}{PO} = \frac{BC}{OQ} \iff PO = OQ$, что и требовалось доказать.

- **Задача 7.** Дана произвольная трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$. Пусть точка O есть пересечение диагоналей трапеции, а точка E — пересечение продолжений сторон AB и CD . Прямая OE пересекает основание AD в точке K , а основание BC в точке L . Доказать, что $AK = KD$ и $BL = LC$.

Решение. Здесь уже необходим рисунок.

Отрезок PQ проведен параллельно основаниям трапеции через точку O . Согласно предыдущей задаче $PO = OQ$. Треугольник AKE подобен треугольнику POE и, значит, $\frac{AK}{PO} = \frac{KE}{OE}$. Аналогично $\frac{KD}{OQ} = \frac{KE}{OE}$. Отсюда получаем, что $\frac{AK}{PO} = \frac{KD}{OQ}$. Теперь уже видно, что из $PO = OQ$ следует, что $AK = KD$, что и требовалось доказать. Точно так же доказывается, что $\frac{PO}{BL} = \frac{OE}{EL} = \frac{OQ}{LC} \Rightarrow BL = LC$, и все доказано.

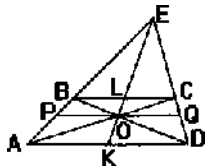


Рис. 5

- **Задача 8.** Хорды AB и CD некоторой окружности пересекаются в точке O . Доказать, что $AO \cdot OB = CO \cdot OD$.

Решение. Посмотрим на рисунок 6. Треугольники AOD и BOC подобны по первому признаку ($\angle AOD = \angle BOC$ как вертикальные и $\angle DAO = \angle BCO$ как вписанные в окружность и опирающиеся на одну и ту же дугу). Отсюда следует, что

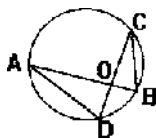


Рис. 6

$$\frac{AO}{OC} = \frac{DO}{OB} \iff AO \cdot OB = CO \cdot OD,$$

что и требовалось доказать.

- **Задача 9.** Точка A находится вне некоторой окружности. Из точки A к этой окружности проведена касательная AP , где P — точка касания. Через точку A проведена еще одна прямая, пересекающая окружность в точках R и S . Доказать, что $AR \cdot AS = AP^2$.

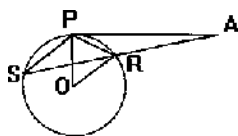


Рис. 7

Решение. Ситуация, указанная в задаче, изображена на рис. 7. В нашем решении я буду пользоваться свойствами вписанных в окружность углов. Они все проходятся в школе, но относятся к материалу, который большинство поступающих знает отвратительно. Если свойства, на которые я буду ссылаться, вы (как вам кажется) слышите впервые в жизни, пролистайте учебник для седьмых-

восьмых классов. Впрочем, окружностями мы еще будем заниматься отдельно, и все необходимые свойства я еще раз напомним.

У нас O — центр окружности. Докажем, что треугольники APR и APS подобны. Они имеют общий угол A , так что достаточно доказать, что $\angle PSR = \angle APR$. В треугольнике OPR имеем $OP = OR$, ибо это — радиусы. Значит, $\angle OPR = \frac{1}{2}(\pi - \angle POR) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \angle POR$. Угол APO прямой, так как AP — касательная. Следовательно, $\angle APR = \frac{\pi}{2} - \angle OPR = \frac{1}{2}\angle POR$.

Угол PSR вписан в окружность, так что он равен половине центрального угла, опирающегося на одну с ним дугу, т.е. половине угла POR . Наши предыдущие выкладки показывают, что угол APR также равен половине угла POR . Значит, эти углы равны, и подобие треугольников APR и ASP доказано. Заметьте, что я выписал вершины треугольников так, чтобы они соответствовали их равным углам.

Итак, $\frac{AP}{AS} = \frac{AR}{AP} \iff AP^2 = AR \cdot AS$, что и требовалось доказать.

► **Задача 10.** (Теорема Менелая). Пусть прямая пересекает произвольный треугольник ABC , причем C_1 — точка ее пересечения со стороной AB , A_1 — точка ее пересечения со стороной BC и B_1 — точка ее пересечения с продолжением стороны AC . Доказать, что тогда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Решение. Проведем через точку C прямую параллельно AB . Пусть K — точка ее пересечения с прямой B_1C_1 (см. рис. 8).

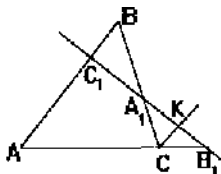


Рис. 8

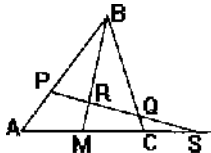


Рис. 9

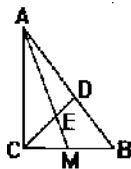


Рис. 10

Треугольники AC_1B_1 и CKB_1 подобны по первой ситуации. Значит,

$$(2) \quad \frac{AC_1}{CK} = \frac{B_1A}{B_1C}.$$

Треугольники BC_1A_1 и CKA_1 подобны по второй ситуации. Следовательно,

$$(3) \quad \frac{C_1B}{CK} = \frac{BA_1}{A_1C}.$$

Из равенства (2) находим, что $CK = \frac{AC_1 \cdot B_1C}{B_1A}$, а из равенства (3) следует, что $CK = \frac{C_1B \cdot A_1C}{BA_1}$. Отсюда имеем

$$\frac{AC_1 \cdot B_1C}{B_1A} = \frac{C_1B \cdot A_1C}{BA_1} \iff \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1,$$

что и требовалось доказать.

- **Задача 11.** Дан треугольник ABC , в котором BM — медиана. Точка P лежит на стороне AB , точка Q — на стороне BC , причем $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{5}$, $\frac{BQ}{QC} = 6$. Отрезок PQ пересекает медиану BM в точке R . Найти $\frac{BR}{RM}$.

Решение. Прямая PQ не параллельна AC , так как $\frac{AP}{PB} \neq \frac{CQ}{QB}$. Продолжим ее до пересечения с прямой AC в точке S (см. рис. 9)

Запишем теорему Менелая (см. предыдущую задачу) для треугольника ABC и секущей PS :

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CS}{SA} = 1 \iff \frac{2}{5} \cdot 6 \cdot \frac{CS}{SA} = 1,$$

откуда находим, что $\frac{CS}{SA} = \frac{5}{12}$.

Пусть $AM = MC = x$, тогда $\frac{CS}{CS+2x} = \frac{5}{12} \iff CS = \frac{10}{7}x$. Следовательно, $SM = CS + x = \frac{17}{7}x$, $SA = CS + 2x = \frac{24}{7}x$.

Запишем теперь теорему Менелая для треугольника ABM и секущей PS :

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BR}{RM} \cdot \frac{MS}{SA} = 1 \iff \frac{2}{5} \cdot \frac{BR}{RM} \cdot \frac{17/7x}{24/7x} = 1 \iff \frac{2}{5} \cdot \frac{BR}{RM} \cdot \frac{17}{24} = 1,$$

откуда и находим, что $\frac{BR}{RM} = \frac{60}{17}$.

Ответ: $\frac{60}{17}$. ◀

- **Задача 12.** В треугольнике ABC угол C прямой, $BC = 3$, $AC = 4$ и проведены биссектриса CD и медиана AM . Найти площадь треугольника CEM .

Решение. В треугольнике CEM известны угол $ECM = \frac{\pi}{4}$ и $CM = \frac{1}{2}BC = \frac{3}{2}$. Значит, остается только найти сторону CE (рис. 10).

Легко находится $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Кроме того, по свойству биссектрисы, установленному в задаче 3, имеем $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{3}$, откуда $AD = \frac{20}{7}$, $BD = \frac{15}{7}$.

По одной из выведенных нами формул для биссектрисы имеем

$$CD = \frac{2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos \frac{\pi}{4}}{BC + AC} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{3 + 4} = \frac{12}{7}\sqrt{2}.$$

Наконец, применим теорему Менелая к треугольнику BCD и секущей MA :

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CE}{ED} \cdot \frac{DA}{AB} = 1 \iff \frac{1}{1} \cdot \frac{CE}{ED} \cdot \frac{20/7}{5} = 1 \iff \frac{CE}{ED} = \frac{7}{4}.$$

Значит, $CE = \frac{7}{11} \cdot \frac{12}{7}\sqrt{2} = \frac{12}{11}\sqrt{2}$.

Окончательно, искомая площадь равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{12}{11}\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{9}{11}$.

Ответ: $\frac{9}{11}$. ◀

► **Задача 13.** Основания трапеции равны a и b . Определить длину отрезка, параллельного основаниям и делящего трапецию на равновеликие части.

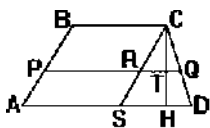


Рис. 11

Решение. Обозначим через y длину искомого отрезка. На рис. 11 это отрезок PQ . Кроме того, $AD = a$, $BC = b$. Пусть высота CH исходной трапеции равна h . Найдем высоту $h_1 = TH$ в трапеции $APQD$. Треугольник SCD подобен треугольнику RCQ и $SD = a - b$, $RQ = y - b$, $CT = h - h_1$. Из подобия названных треугольников получаем

$$\frac{SD}{RQ} = \frac{DC}{QC} = \frac{HC}{TC} \Rightarrow \frac{a - b}{y - b} = \frac{h}{h - h_1},$$

откуда $h_1 = h \cdot \frac{a - y}{a - b}$.

Запишем теперь тот факт, что площадь $APQD$ равна половине площади $ABCD$:

$$\frac{a + y}{2} \cdot h \cdot \frac{a - y}{a - b} = \frac{a + b}{4} \cdot h \iff a^2 - y^2 = \frac{a^2 - b^2}{2} \iff y^2 = \frac{a^2 + b^2}{2},$$

и наша задача решена.

Ответ: $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$. ◀

- **Задача 14.** Отрезок BE разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника ABE и BEC , причем коэффициент подобия равен $\sqrt{3}$. Найти углы треугольника ABC .

Решение. Я буду вести рассуждение без рисунка, вам же советую его нарисовать. Раз треугольник ABE подобен треугольнику BEC , один из углов треугольника BEC равен углу AEB . Но $\angle BEC + \angle ECB + \angle CBE = \pi$. Отсюда следует, что $\angle EBC + \angle BCE = \pi - \angle BEC = \angle AEB$.

Тем самым, угол AEB не может равняться ни одному из углов EBC или BCE , поскольку он равен их сумме. Значит, он равен своему смежному углу BEC и, следовательно, является прямым углом.

Посмотрим теперь, какому из углов равняется угол BAE . Если $\angle BAE = \angle BCE$, то треугольники ABE и BCE равны по катету и острому углу, т.е. не могут иметь коэффициент подобия, равный $\sqrt{3}$. Этим доказано, что $\angle BAE = \angle EBC$ и $\angle BCE = \angle ABE$, откуда $\angle ABC = \angle BAE + \angle ABE = \frac{\pi}{2}$. Кроме того, $\operatorname{ctg} A = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff A = \frac{\pi}{3}$.

Нам, в принципе, не сказано, какой из треугольников ABE и BEC «больше» другого, так что может быть так, что $\operatorname{ctg} A = \sqrt{3} \iff A = \frac{\pi}{3}$. Но это все равно не изменит

Ответ: углы треугольника ABC равны $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$. ◀

- **Задача 15.** Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и что эта точка пересечения делит каждую из медиан в отношении 2:1, считая от вершины.

Решение. Пусть в треугольнике ABC проведены медианы BM и AN , причем K — точка их пересечения (см. рис. 12). Достаточно доказать, что

$\frac{BK}{KM} = 2$, поскольку можно будет повторить буква

в букву доказательство и для медианы, проведенной из вершины C . Поскольку она также разделит

BM в отношении 2:1, она обязана будет пройти через точку K , т.е. будет доказано, что все три медианы пересекаются в одной точке. Опять-таки, доказательство того, что точка K делит BM в отношении 2:1, можно дословно повторить для остальных медиан.

Итак, доказываем, что $\frac{BK}{KM} = 2$. Применим теорему Менелая к треугольнику MBC и секущей AN :

$$\frac{CN}{NB} \cdot \frac{BK}{KM} \cdot \frac{MA}{AC} = 1 \iff 1 \cdot \frac{BK}{KM} \cdot \frac{1}{2} = 1 \iff \frac{BK}{KM} = 2,$$

что и требовалось доказать.

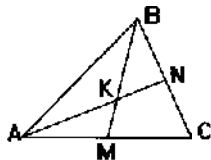


Рис. 12

Наше занятие окончено. Если вы не справились с ним за один раз и перенесли окончание на другое время, это в рамках нормы.

Оценку себе можно поставить по следующим критериям:

Самостоятельно решено ≥ 10 задач — пятерка.

Самостоятельно решено ≥ 7 задач — четверка.

Разобран, понят и может быть воспроизведен весь текст (без подглядывания) — тройка.

Если не все решения понятны или, закрыв книгу, вы их забыли (хотя бы одно!) — двойка.

При любой оценке нужно решать домашнее задание. Если оно написано на тройку и выше, можно переходить к следующему уроку. Если нет, надо вернуться к первым двум урокам по планиметрии (урок 26 и урок 27).

Домашнее задание

- ▶ 1. Точки A, B, C, D лежат на одной прямой, причем C находится между A и D , а точка B — между A и C . Известно, что $\frac{AB}{BC} = k$, $\frac{BC}{CD} = l$. Найти $\frac{AC}{BD}$.
- ▶ 2. Точки A, B, C, D лежат на одной прямой, причем C находится между A и D , а точка B — между A и C . Известно, что $\frac{AD}{CD} = k$, $\frac{AC}{BC} = l$. Найти $\frac{AB}{BD}$.
- ▶ 3. Точки A, B, C, D лежат на одной прямой, причем C находится между A и D , а точка B — между A и C . Известно, что $\frac{AC}{BD} = k$, $\frac{AD}{BC} = l$. Найти $\frac{AB}{CD}$.
- ▶ 4. Дан угол с вершиной O . На одном из его лучей расположены точки A, B, C таким образом, что B лежит между A и O , а C — между B и O . Через каждую из этих точек проведены параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла соответственно в точках A_1, B_1 и C_1 . Известно, что $\frac{A_1C_1}{B_1C_1} = p$, $\frac{BC}{BO} = q$. Найти $\frac{AA_1}{CC_1}$.
- ▶ 5. В равносторонний треугольник со стороной 1 вписан квадрат так, что одна из сторон квадрата лежит на стороне треугольника, а на каждой из остальных сторон лежит по одной вершине квадрата. Найти сторону квадрата.
- ▶ 6. В трапеции $ABCD$ основание BC равно 1 и $\frac{AC}{OC} = \frac{5}{2}$, где O — точка пересечения диагоналей трапеции. Найти длину основания AD .
- ▶ 7. В треугольнике ABC угол C прямой, $AC = b$, $BC = a$. Найти $\frac{AH}{HE}$, где CH — высота, опущенная из вершины C .
- ▶ 8. Две окружности радиусов R и r ($R > r$) касаются внешним образом. Пусть M — точка пересечения линии центров с общей касательной названных окружностей, а K — точка касания большей окружности с общей касательной. Найти длину отрезка MK .
- ▶ 9. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается стороны BC в точке L . Точка P лежит на стороне AB , а точка Q — на стороне BC

так, что PQ касается окружности и $PQ \parallel AC$. Известно, что $BL = 3$ и $\frac{AP}{PE} = \frac{7}{5}$. Найти периметр треугольника ABC .

- 10. В треугольнике ABC имеем $AB = 6$, $AC = 5$. Точка A_1 лежит на стороне BC таким образом, что AA_1 есть биссектриса угла A . Точка C_1 лежит на стороне AB таким образом, что $A_1C_1 \parallel AC$. Найти A_1C_1 .
- 11. В треугольнике ABC сторона AB равна 7 и угол BAC равен 30° . На стороне AB лежит точка D такая, что $AD : DB = 5 : 2$ и $\angle BCD = \angle BAC$. Найти $\operatorname{tg} C$.
- 12. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы ABD и ACD равны, диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Известно, что $AB = 2$, $CD = 3$, $BD = 4$ и $BO : OD = 1 : 3$. Найти длину диагонали AC .
- 13. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC имеем $AD = 3$, $BC = 1$. Точка P лежит на стороне AB , а точка Q — на стороне CD , причем отрезок PQ параллелен основаниям и проходит через точку пересечения диагоналей трапеции. Найти длину отрезка PQ .
- 14. В трапеции $ABCD$ основание AD равно 2, а основание BC равно 1. Точка P лежит на стороне AB , а точка Q — на стороне CD , причем отрезок PQ параллелен основаниям и $AP : PB = 3 : 2$. Найти длину отрезка PQ .
- 15. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы ABD и ACD прямые, диагонали AC и BD пересекаются в точке O , причем AC — биссектриса угла BAD . Найти длину отрезка AO , если известно, что $AC = 5$, $CD = 3$.
- 16. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC , причем известно, что $AD = 3$, $BC = 2$, $\angle ABC + \angle ADB = \pi$ и косинус угла BDC равен $\frac{13}{20}$. Найти периметр ABC .
- 17. Точка K лежит на стороне AB , а точка M — на стороне AC треугольника ABC , причем $AK : KB = 3 : 2$, $AM : MC = 4 : 5$. Прямая, проходящая через точку K параллельно BC , пересекает отрезок BM в точке P . Найти отношение $BP : PM$.
- 18. Точка K лежит на стороне AB , а точка M — на стороне AC треугольника ABC , причем $AK : KB = 3 : 2$, $AM : MC = 4 : 5$. Отрезки KC и BM пересекаются в точке O . Найти отношение $BO : OM$.
- 19. Точка D лежит на стороне AC , а точка E — на стороне BC треугольника ABC , причем $DE \parallel AB$, $BC = CD$, $AB = 8$, $DE = 3$, $\angle ACB = 60^\circ$. Найти длину стороны BC .
- 20. На стороне AC треугольника ABC взята точка E . Через точку E проведена прямая DE параллельно стороне BC и прямая EF параллельно стороне AB (точка D лежит на стороне AB , а точка F — на стороне BC). Площадь треугольника ADE равна 9, а площадь треугольника EFC равна 4. Найти площадь параллелограмма $BDEF$.

Урок 29

Площади

Добрая половина, если не больше, планиметрических задач для поступающих заканчиваются словами «найти площадь...». Примерно половина из них может быть решена посредством нахождения отрезков и углов, необходимых для вычисления площади данной фигуры. В таких случаях работают методы, изложенные на трех предыдущих уроках.

На этом уроке я хочу обратить ваше внимание на метод поиска площадей фигур путем сравнения с известными площадями. Он, как правило, работает, когда задана площадь какой-то фигуры, по этой фигуре построена другая, и надо найти площадь этой другой фигуры.

Чаще всего нужно сводить задачу к поискам площадей треугольников, разбивая при необходимости более сложные фигуры на треугольники. Для сравнения площадей треугольников полезно применять следующие простые факты:

Факт 1. Пусть треугольники ABC и A_1B_1C таковы, что их стороны AB и A_1B_1 лежат на одной прямой (рис. 1).

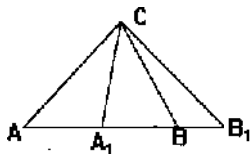


Рис. 1

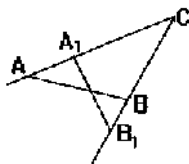


Рис. 2

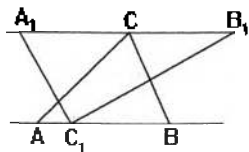


Рис. 3

Тогда

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C}} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Факт 2. Пусть треугольники ABC и A_1B_1C имеют общий угол C (см. рис. 2). Тогда

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C}} = \frac{AC \cdot BC}{A_1C \cdot B_1C}.$$

Факт 3. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ расположены так, что стороны AB и A_1B_1 параллельны, вершина C лежит на прямой A_1B_1 , а вершина C_1

лежит на прямой AB (рис. 3). Тогда

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C}} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Факт 4. Если треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$, то

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C}} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = \left(\frac{AC}{A_1C_1}\right)^2 = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2,$$

т.е. отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

- **Задача 1.** В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Доказать, что площади треугольников AOB и COD равны.

Решение. Заметим сначала, что площади треугольников ABC и BCD равны. В самом деле, у этих треугольников общее основание BC , а высоты, опущенные из точек A и D на прямую BC , равны вследствие параллельности сторон AD и BC . Теперь равенство площадей треугольников ABC и BCD следует из того, что площадь треугольника есть половина произведения основания на высоту.

Наконец, $S_{AOB} = S_{ABC} - S_{BOC} = S_{BCD} - S_{BOC} = S_{COD}$, что и требовалось доказать.

- **Задача 2.** В треугольнике ABC на стороне AB взята точка C_1 , а на стороне BC взята точка A_1 таким образом, что $\frac{AC_1}{C_1B} = p$, $\frac{BA_1}{A_1C} = q$. Найти отношение площадей треугольников ABC и A_1C_1C .

Решение. Пусть площадь треугольника ABC равна S . Выразим через S площадь треугольника A_1C_1C с тем, чтобы при взятии отношения площадей S сократилось и получился бы просто числовой ответ. Следующую последовательность треугольников можно назвать планом решения задачи.

$$ABC \rightarrow BC_1C \rightarrow A_1C_1C.$$

Каждая из стрелок означает, что соединенные ею треугольники подпадают под один из четырех фактов, перечисленных выше. В нашем случае соответствующие пары треугольников подпадают уже под факт 1.

Действительно, у треугольников ABC и BC_1C общая вершина C , а противолежащие ей стороны лежат на одной прямой AB . У треугольников BC_1C и A_1C_1C общая вершина C_1 , а противоположные ей стороны обе лежат на прямой BC .

Теперь применяем два раза факт 1:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BC_1C}} = \frac{AB}{C_1B} = p + 1 \Rightarrow S_{BC_1C} = \frac{S_{ABC}}{p + 1} = \frac{S}{p + 1}.$$

Наконец,

$$\frac{S_{BC_1C}}{S_{A_1C_1C}} = \frac{BC}{A_1C} = q + 1 \Rightarrow S_{A_1C_1C} = \frac{S_{BC_1C}}{q + 1} = \frac{S}{(p + 1)(q + 1)}.$$

Отсюда получаем, что $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1C_1C}} = (p + 1)(q + 1)$.

Ответ: $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1C_1C}} = (p + 1)(q + 1)$. ◀

- **Задача 3.** В треугольнике ABC точка L делит пополам отрезок BC , а точка K делит пополам отрезок BL . Из точки A через точки K и L проведены лучи и на них отложены вне треугольника ABC отрезки $LD = AL$ и $KF = \frac{1}{3}AK$. Найти отношение площади треугольника ABC к площади четырехугольника $KLDF$.

Решение. План решения будет выглядеть так:

$$ABC \rightarrow AKL \rightarrow AFD$$

с учетом того, что $S_{KLDF} = S_{AFD} - S_{AKL}$.

Отметим что первая стрелка задает переход согласно факту 1, а вторая — согласно факту 2.

Пусть площадь треугольника ABC равна S . Тогда

$$\frac{S_{AKL}}{S} = \frac{KL}{BC} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{AKL} = \frac{1}{4}S.$$

Согласно факту 2 имеем

$$\frac{S_{AFD}}{S_{AKL}} = \frac{AF \cdot AD}{AL \cdot AK} = \frac{AD}{AL} \cdot \frac{AF}{AK} = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3},$$

откуда $S_{AFD} = \frac{8}{3} \cdot S_{AKL} = \frac{8}{3} \cdot \frac{S}{4} = \frac{2}{3}S$. Площадь $KLDF$ равна, тем самым, $\frac{2}{3}S - \frac{1}{4}S = \frac{5}{12}S$.

Ответ: $\frac{12}{5}$. ◀

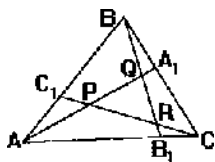


Рис. 4

Найти отношение площадей треугольников PQR и ABC .

Решение. Наш план решения будет выглядеть следующим образом:

$$ABC \rightarrow BC_1C \rightarrow BC_1R \rightarrow PQR,$$

причем при первых двух переходах применяется факт 1, а при последнем — факт 2.

- **Задача 4 [2].** На сторонах треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 , делящие его стороны в отношениях $BA_1 : A_1C = p$, $CB_1 : B_1A = q$ и $AC_1 : C_1B = r$. Точки пересечения отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 расположены так, как показано на рис. 4.

Пусть площадь треугольника ABC равна S . Тогда

$$\frac{S_{BC_1C}}{S} = \frac{BC_1}{BA} = \frac{1}{r+1} \Rightarrow S_{BC_1C} = \frac{S}{r+1}.$$

Нам придется применить два раза следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть даны положительные числа x, y, z , причем известно, что $\frac{x}{y+z} = a$ и $\frac{x+y}{z} = b$. Тогда $\frac{x+y}{y} = \frac{b(a+1)}{b-a}$.

Доказательство леммы. Оно совсем простое. Действительно, из второго равенства имеем $x + y = bz$, а из первого — $x = ay + az$. Подставив выражение для x во второе равенство, получим

$$ay + az + y = bz \iff y = \frac{b-a}{a+1}z \Rightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{bz}{\frac{b-a}{a+1}z} = \frac{b(a+1)}{b-a},$$

что и требовалось доказать.

Ищем площадь треугольника BC_1R . Имеем $\frac{S_{BC_1R}}{S_{BC_1C}} = \frac{C_1R}{C_1C}$, так что нам надо найти $\frac{C_1R}{C_1C}$.

Применим теорему Менелая к треугольнику AC_1C и секущей BB_1 :

$$\frac{C_1R}{RC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AB}{BC_1} = 1 \iff \frac{C_1R}{RC} \cdot q \cdot (r+1) = 1 \iff \frac{C_1R}{RC} = \frac{1}{q(r+1)}.$$

Отсюда

$$\frac{CC_1}{C_1R} = \frac{C_1R + RC}{C_1R} = 1 + \frac{RC}{C_1R} = 1 + q(r+1).$$

Отсюда находим, что $S_{BC_1R} = \frac{S_{BC_1C}}{1+q+qr} = \frac{S}{(r+1)(1+q+qr)}$.

Применим теорему Менелая к треугольнику BC_1C и секущей AA_1 :

$$\frac{C_1P}{PC} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BA}{AC_1} = 1 \iff \frac{C_1P}{PC} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{r+1}{r} = 1 \iff \frac{C_1P}{PC} = \frac{pr}{r+1}.$$

Если мы положим теперь $x = C_1P$, $y = PR$, $z = RC$, то окажемся в условиях леммы для $a = \frac{pr}{r+1}$, $b = \frac{1}{q(r+1)}$.

Следовательно,

$$\frac{x+y}{z} = \frac{C_1R}{PR} = \frac{\frac{1}{q(r+1)} \cdot \left(1 + \frac{pr}{r+1}\right)}{\frac{1}{q(r+1)} - \frac{pr}{r+1}} = \frac{1+r+rp}{(r+1)(1-pqr)}.$$

Мы сейчас применим еще два раза теорему Менелая и один раз лемму для того, чтобы найти отношение $\frac{BR}{QR}$.

Применяем теорему Менелая к треугольнику BB_1C и секущей AA_1 :

$$\frac{BQ}{QB_1} \cdot \frac{B_1A}{AC} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} = 1 \iff \frac{BQ}{QB_1} \cdot \frac{1}{q+1} \cdot \frac{1}{p} = 1 \iff \frac{BQ}{QB_1} = p(q+1).$$

Применяем теорему Менелая к треугольнику BB_1A и секущей CC_1 :

$$\frac{BR}{RB_1} \cdot \frac{B_1C}{CA} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1 \iff \frac{BR}{RB_1} \cdot \frac{q}{q+1} \cdot r = 1 \iff \frac{BR}{RB_1} = \frac{q+1}{qr}.$$

Еще раз применяем лемму для $x = BQ$, $y = QR$, $z = RB_1$ и $a = p(q+1)$, $b = \frac{q+1}{qr}$:

$$\frac{x+y}{y} = \frac{BR}{QR} = \frac{\frac{q+1}{qr} \cdot (1+p+pq)}{\frac{q+1}{qr} - p(q+1)} = \frac{1+p+pq}{1-pqr}.$$

Теперь мы готовы к отысканию площади треугольника PQR . Имеем

$$\frac{S_{BC_1R}}{S_{PQR}} = \frac{C_1R}{PR} \cdot \frac{BR}{QR} = \frac{(1+r+rp)(1+p+pq)}{(r+1)(1-pqr)^2}.$$

Вспомяная, что $S_{BC_1R} = \frac{S}{(r+1)(1+q+qr)}$, находим, что

$$S_{PQR} = \frac{S(1-pqr)^2}{(1+p+pq)(1+q+qr)(1+r+rp)}.$$

Ответ: $\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}} = \frac{(1-pqr)^2}{(1+p+pq)(1+q+qr)(1+r+rp)}.$ ◀

- **Задача 5.** Площадь треугольника ABC равна S . На каждой стороне треугольника выбраны две точки, делящие ее в отношении $m : n : m$. Найти площадь шестиугольника, вершинами которого служат выбранные точки.

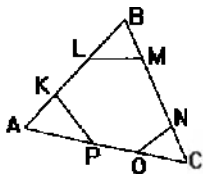


Рис. 5

Решение. Посмотрим на рис. 5. Площадь шестиугольника $KLMNOP$ равна $S_{ABC} - S_{AKP} - S_{CON} - S_{BML}$. Согласно факту 2 имеем

$$\frac{S_{AKP}}{S_{ABC}} = \frac{AP}{AC} \cdot \frac{AK}{AB} = \frac{m}{(2m+n)} \cdot \frac{m}{2m+n} = \frac{m^2}{(2m+n)^2}.$$

Следовательно, $S_{AKP} = \frac{Sm^2}{(2m+n)^2}$.

Ввиду одинаковости отношений на всех сторонах получаем, что $S_{BLM} = S_{CON} = S_{AKP}$, и, подставляя эти площади в формулу для S_{KLMNOP} , получаем

Ответ: $S \left(1 - \frac{3m^2}{(2m+n)^2} \right).$ ◀

- **Задача 6.** В треугольнике ABC имеем $AB = BC$, $\angle B = \beta$. Биссектриса AD угла A пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке E . Найти отношение площади треугольника BDE к площади треугольника ABC .

Решение. Наш план решения будет иметь вид

$$ABC \rightarrow ADC \rightarrow BDE,$$

причем первая стрелка дает переход по факту 1, а вторая — по факту 4.

Заметим, что здесь мы можем вычислить все углы, которые потребуются. Ясно, что $\angle A = \angle C = \frac{\pi - \beta}{2}$ и $\angle BAE = \angle EAC = \frac{\pi - \beta}{4}$. Отсюда $\angle BDA = \frac{3}{4}(\pi - \beta)$.

Пусть площадь треугольника ABC равна S . Согласно факту 1 имеем

$$\frac{S_{ADC}}{S} = \frac{CD}{CB} = \frac{CD}{CD + BD} = \frac{1}{1 + \frac{BD}{CD}}.$$

Вспоминая теперь, что AD — биссектриса и поэтому делит BC пропорционально сторонам AB и AC , получим $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2 \sin \frac{\beta}{2}}$. Следовательно,

$$S_{ADC} = \frac{2S \sin \frac{\beta}{2}}{2 \sin \frac{\beta}{2} + 1}.$$

Коэффициент подобия треугольников ADC и BDE равен $\frac{AD}{BD}$. Последнее отношение равно по теореме синусов отношению $\frac{\sin \beta}{\sin \frac{\pi - \beta}{4}}$.

Итак,

$$S_{BDE} = S_{ADC} \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi - \beta}{4} \right)}{\sin^2 \beta} = \frac{2S \sin \frac{\beta}{2}}{2 \sin \frac{\beta}{2} + 1} \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi - \beta}{4} \right)}{\sin^2 \beta}.$$

Ответ: $\frac{2 \sin \frac{\beta}{2}}{2 \sin \frac{\beta}{2} + 1} \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi - \beta}{4} \right)}{\sin^2 \beta}.$ ◀

- **Задача 7.** Точка B_1 лежит на стороне AC треугольника ABC , причем $AB_1 = 3$, $B_1C = 5$. Точка O , лежащая на отрезке BB_1 , такова, что площадь треугольника BOC равна 25. Найти площадь треугольника AOB .

Решение. Посмотрим на рис. 6. Ситуация с треугольниками AOB и BOC не подходит непосредственно ни под один из четырех приведенных фактов, хотя и является весьма простой. Мы знаем, что площадь треугольника есть произведение стороны на соответствующую высоту. Поэтому если треугольники имеют общую сторону, то отношение их площадей равно отношению их соответствующих высот.

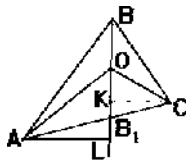


Рис. 6

Если вы вдруг задались вопросом, сколько всего случаев сравнения площадей треугольников может возникнуть в задачах, имейте в виду, что их достаточно много для того, чтобы было разумно их запоминать. Если вы хорошо усвоите и запомните факты 1–4, то любую другую ситуацию сможете разглядеть.

Вернемся к рисунку 6. Здесь CK и AL — перпендикуляры, опущенные из точек C и A на прямую BB_1 . Треугольники AOB и BOC имеют общую сторону OB , и высоты их равны соответственно AL и CK . Значит,

$$\frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{AL}{CK} = \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{3}{5}.$$

Предпоследнее равенство выполняется ввиду подобия прямоугольных треугольников AB_1L и CB_1K по острому углу.

Теперь видно, что $S_{AOB} = \frac{3}{5}S_{BOC} = 15$.

Ответ: 15. ◀

- **Задача 8** (Теорема Чевы). Точки A_1 , B_1 , C_1 лежат соответственно на сторонах BC , AC и AB треугольника ABC , причем отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Доказать, что

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Решение. Обозначим через O точку пересечения трех заданных отрезков. В предыдущей задаче мы доказали, что $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{S_{BOC}}{S_{AOB}}$. Аналогичным образом

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{S_{AOC}}{S_{BOC}} \quad \text{и} \quad \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_{BOA}}{S_{AOC}}.$$

Перемножив эти три равенства, получим

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{S_{AOC}}{S_{BOC}} \cdot \frac{S_{AOB}}{S_{AOC}} \cdot \frac{S_{BOC}}{S_{AOB}} = 1,$$

что и требовалось доказать.

- **Задача 9** (Обратная теорема Чевы). Точки A_1 , B_1 , C_1 лежат соответственно на сторонах BC , AC и AB треугольника ABC , причем

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Доказать, что отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть O — точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1 , и прямая CO пересекает сторону AB в некоторой точке C_2 . Достаточно доказать, что $C_1 = C_2$.

Применим прямую теорему Чевы к точкам A_1 , B_1 и C_2 :

$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Тогда $\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{A_1C}{BA_1} \cdot \frac{B_1A}{B_1C} = \frac{AC_1}{C_1B}$. Значит, точки C_1 и C_2 делят отрезок AB в одном и том же отношении и потому совпадают, что и требовалось доказать.

► **Задача 10** [3]. Точки A_1 , B_1 , C_1 лежат соответственно на сторонах BC , AC и AB треугольника ABC , причем отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Доказать, что тогда $S_{A_1B_1C_1} \leq \frac{1}{4}S_{ABC}$.

Решение. Пусть $\frac{AC_1}{C_1B} = p$, $\frac{BA_1}{A_1C} = q$, $\frac{CB_1}{B_1A} = r$. Тогда $pqr = 1$ по теореме Чевы. Пусть площадь треугольника ABC равна S . Тогда

$$S_{AB_1C_1} = \frac{pS}{(p+1)(r+1)}, \quad S_{BC_1A_1} = \frac{qS}{(q+1)(p+1)}, \quad S_{CA_1B_1} = \frac{rS}{(q+1)(r+1)}.$$

Достаточно доказать, что $S_{AB_1C_1} + S_{BC_1A_1} + S_{CA_1B_1} \geq \frac{3}{4}S$.

Подставив в последнее неравенство значения площадей указанных треугольников и произведя сокращение на S , получим эквивалентное ему неравенство

$$\frac{p}{(p+1)(r+1)} + \frac{q}{(p+1)(q+1)} + \frac{r}{(p+1)(r+1)} \geq \frac{3}{4}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{p+q+r+pq+pr+qr}{(p+1)(q+1)(r+1)} \geq \frac{3}{4}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{p+q+r+pq+pr+qr}{p+q+r+pq+pr+qr+1+pqr} \geq \frac{3}{4}$$

$$\Updownarrow$$

$$p+q+r+pq+pr+qr \geq 3(1+pqr) = 6$$

согласно теореме Чевы (ибо $pqr = 1$).

И, наконец,

$$p+q+r+pq+pr+qr = p+q+r + \frac{1}{r} + \frac{1}{q} + \frac{1}{p} =$$

$$= \left(\sqrt{p} - \frac{1}{\sqrt{p}}\right)^2 + \left(\sqrt{q} - \frac{1}{\sqrt{q}}\right)^2 + \left(\sqrt{r} - \frac{1}{\sqrt{r}}\right)^2 + 6 \geq 6,$$

что и требовалось доказать.

Наш урок окончен. Оценку поставьте себе стандартным образом.

Домашнее задание

- 1. Точка D лежит между точками A и B (на прямой AB), точка C находится между точками A и D (на той же прямой). Точка M такова, что AM перпендикулярно MD и CM перпендикулярно MB . Известно, что $\angle CMD = \alpha$, $S_{AMD} = S_1$, $S_{BMC} = S_2$. Найти площадь треугольника AMB .
- 2. Площадь треугольника ABC равна единице. На стороне BC взята точка A_1 , а на стороне AC — точка B_1 . При этом $\frac{AB_1}{B_1C} = p$ и $\frac{CA_1}{A_1B} = q$. Найти площадь четырехугольника B_1CA_1K , где K — точка пересечения прямых BB_1 и AA_1 .
- 3. Площадь треугольника ABC равна единице. На стороне BC взята точка P , а на стороне AC взяты точки M и N таким образом, что

$$\frac{AM}{MC} = a, \quad \frac{MN}{NC} = b, \quad \text{и} \quad \frac{CP}{PB} = c.$$

Прямая AP пересекает прямые BM и BN в точках R и S соответственно. Найти площадь треугольника BRS .

- 4. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ лежит точка P , а на стороне CD — точка Q , причем $AP/PB = p$, $DQ/QC = q$. Диагональ AC пересекает отрезок PQ в точке K . Найти площадь четырехугольника $PKCB$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна S .
- 5. На стороне AB параллелограмма $ABCD$, имеющего площадь S , взяты точки P и Q , а на стороне CD — точки R и S , причем

$$\frac{AP}{PB} = p, \quad \frac{AQ}{QB} = q, \quad \frac{DS}{SC} = s, \quad \frac{DR}{RC} = r$$

и, кроме того, $p < q$ и $s < r$. Отрезки PR и QS пересекаются в точке K . Найти площадь треугольника KRS .

- 6. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC на стороне AB взята точка P , а на стороне CD — точка Q , причем $AP/PB = p$, $DQ/QC = q$. Площадь трапеции равна S и $AD/BC = k$.

Найти площадь треугольника PRA , где R есть точка пересечения отрезков PQ и AC .

- 7. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC и имеющей площадь S на стороне AB взяты точки P и R , а на стороне CD — точки Q и S таким образом, что

$$AP/PB = p, \quad AR/RB = r > p, \quad DS/SC = s, \quad DQ/QC = q > s.$$

Отрезки PQ и RS пересекаются в точке O . Найти площадь треугольника PRO , если $\frac{AD}{BC} = \alpha$.

- 8. Дан квадрат $ABCD$. На сторонах AB , BC , CD и AD соответственно выбраны точки P , Q , R , S таким образом, что $AP/PB = p$, $BQ/QC = q$, $CR/RD = r$, $DS/SA = s$. Отрезки PR и QS пересекаются в точке O . Найти PO/OR .
- 9. Дан квадрат $ABCD$ единичной площади. На стороне AB выбрана точка P , на стороне BC выбраны точки R и S , на сторонах CD и AD — точки Q и T соответственно. Известно, что $AP/PB = p$, $BR/RS = r$, $BS/SC = s > r$, $CQ/QD = q$, $DT/TA = t$. Отрезок PQ пересекает отрезки TR и TS в точках M и N соответственно. Найти площадь треугольника TMN .
- 10. В окружность вписан выпуклый четырехугольник $ABCD$, причем AB — диаметр окружности, и диагонали AC и BD пересекаются в точке M . Известно, что $BC = 3$, $CM = 3/4$, $S_{ABC} = 3 \cdot S_{ACD}$. Найти длину отрезка AM .
- 11. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Диагонали AC и BD пересекаются в точке O , а прямые AB и CD — в точке K . Прямая KO пересекает стороны BC и AD в точках M и N соответственно, причем известно, что $\angle BAD = \frac{\pi}{6}$ и что в трапеции $ABNM$ и $NMCD$ можно вписать окружность. Найти отношение площади треугольника BKC к площади трапеции $ABCD$.
- 12. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 16 и 9 соответственно. На продолжении стороны BC взята точка M такая, что $CM = 3,2$. В каком отношении прямая AM делит площадь трапеции $ABCD$?
- 13. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся сторон AC , AB и BC в точках D , E и F соответственно. Известно, что длина AD равна R , а длина DC равна a . Найти площадь треугольника BEF .
- 14. Треугольник ABC вписан в круг, $AB = BC$, $\angle ABC = \beta$. Параллельно AC проведена средняя линия треугольника, продолженная до пересечения с окружностью в точках D и E . Найти отношение площади треугольника DBE к площади треугольника ABC .
- 15. Пусть $ABCD$ — квадрат и точка O лежит вне квадрата, причем $OA = OB = 5$, $OD = \sqrt{13}$. Найти площадь квадрата $ABCD$.
- 16. Известно, что $ABCD$ — ромб и радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и ABD соответственно, равны R и r . Найти площадь ромба $ABCD$.
- 17. В трапеции диагонали равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найти площадь трапеции.
- 18. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапе-

ции и ее основаниями, равны S_1 и S_2 . Найти площадь трапеции.

- 19. В круг вписан треугольник ABC , в котором $AB = BC$, $\angle ABC = \alpha$. Из точки A проведена медиана к стороне BC , пересекающая BC в точке D , а окружность — в точке E . Найти отношение площади треугольника ABE к площади треугольника BDE .
- 20. В четырехугольнике $ABCD$ имеем $AB = BC$, $AC = CD$, $\angle ACB = \angle ACD$. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC и ACD , относятся как 3:4. Найти отношение площадей этих треугольников.

Урок 30

Параллелограммы и трапеции

К этому уроку мы с вами прорешали уже достаточно много задач на трапеции и параллелограммы. Правда, эти задачи давались лишь для иллюстрации — либо метода подобия, либо методов решения задач на сравнение площадей.

Цель сегодняшнего урока — научиться «выжимать» все что можно из параллельности. Мы будем рассматривать только четырехугольники, у которых есть хотя бы одна пара параллельных сторон — квадраты, ромбы, прямоугольники, параллелограммы и трапеции. Заметьте, что заголовок покрывает все эти случаи, ибо квадраты, ромбы и прямоугольники все являются параллелограммами.

Я, пожалуй, уже должен прочитать вам нравоучение о роли чертежа в решении геометрической задачи. Главное, что вы должны понять, — это необходимость разумного компромисса между чисто формальным и чисто интуитивным подходами.

Чисто формальный подход состоит в том, что чертеж в задаче вообще не нужен, ибо он лишь иллюстрирует геометрические свойства объектов задачи, **но ничего никогда не доказывает**. Это совершенно справедливо, но, тем не менее, хорошо выполненный чертеж может навести на мысль о каких-то свойствах объекта (параллельность прямых, равенство углов и т.п.). Необходимо помнить, что все, что привиделось вам из чертежа, **должно быть строго доказано без ссылок на него**. Довольно часто интуиция подсказывает правильные свойства. Но будьте настороже! Иногда (это касается уровней 2 и 3) задачи специально составляются так, чтобы чертеж подсказывал неверные факты. Этого трудно (но можно) достичь в планиметрии, а в стереометрии это совсем просто, учитывая,

что часто нужно иметь незаурядные художественные способности для выполнения правильного пространственного чертежа.

Давайте теперь приступим непосредственно к занятию.

Я хотел бы, чтобы вы **блестяще** овладели следующими фактами (как всегда, блестящее владение для первого уровня состоит в знании наизусть, а для второго и третьего — в знании наизусть с доказательствами).

1) Если диагонали произвольного выпуклого четырехугольника равны d_1 и d_2 и образуют угол α , то площадь четырехугольника может быть найдена по формуле

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha.$$

2) Для того, чтобы в выпуклый четырехугольник $ABCD$ можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы было $AB + CD = BC + AD$.

3) Для того, чтобы вокруг выпуклого четырехугольника $ABCD$ можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма каких-нибудь двух его противоположных углов равнялась π .

4) Выпуклый четырехугольник является параллелограммом, если и только если его диагонали в точке пересечения делятся пополам.

5) Площадь параллелограмма $ABCD$ равна

$$S = AB \cdot BC \cdot \sin(\angle DAB) = AB \cdot h,$$

где h есть перпендикуляр, опущенный из точки B на сторону AD (т.е. высота параллелограмма).

6) Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC равна

$$\frac{1}{2}(AD + BC) \cdot h,$$

где h есть перпендикуляр, опущенный из точки B на сторону AD (т.е. высота трапеции).

7) Если $ABCD$ — параллелограмм, то

$$AC^2 + BD^2 = 2(AD^2 + AB^2),$$

т.е. сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

8) Параллелограмм описан вокруг некоторой окружности тогда и только тогда, когда он является ромбом; он вписан в некоторую окружность, если и только если является прямоугольником.

9) Ромб вписан в некоторую окружность, если и только если он есть квадрат.

10) Трапеция вписана в некоторую окружность тогда и только тогда, когда она является равнобедренной.

Я не цитирую здесь признаки параллелограмма, а также определения всех названных четырехугольников. Они есть во всех учебниках и вы должны их знать.

► **Задача 1.** Диагонали трапеции равны 7 см и 8 см, а ее основания — 6 см и 3 см. Найти ее площадь.

Решение. Я продемонстрирую два решения этой задачи — чисто аналитическое и чисто геометрическое. Сначала решим задачу аналитически.

Пусть $ABCD$ — наша трапеция, причем $AD = 6$ см и $BC = 3$ см — ее основания. Обозначим через O точку пересечения ее диагоналей. Пусть $AC = 7$ см, $BD = 8$ см. Из подобия треугольников AOD и BOC следует, что

$$AO/OC = DO/OB = AD/BC = 2,$$

откуда легко находится, что $AO = \frac{14}{3}$ см, $OC = \frac{7}{3}$ см и $DO = \frac{16}{3}$ см, $OB = \frac{8}{3}$ см. В треугольнике AOD нам известны все стороны, так что можно найти его площадь по формуле Герона — она равна $\frac{16}{3}\sqrt{5}$ см².

Мы знаем из предыдущего урока, что площади треугольников AOB и COD равны, причем они сравниваются с площадью AOD по факту 1.

Имеем $\frac{S_{AOB}}{S_{AOD}} = \frac{BO}{OD} = \frac{1}{2}$, откуда $S_{BOC} = S_{COD} = \frac{8}{3}\sqrt{5}$ см².

Вспомнив, что коэффициент подобия треугольников AOD и BOC равен 2, получим, согласно факту 4, что $S_{BOC} = \frac{1}{4}S_{AOD} = \frac{4}{3}\sqrt{5}$ см².

И, наконец, полная площадь трапеции равна

$$\frac{16}{3}\sqrt{5} + \frac{8}{3}\sqrt{5} + \frac{8}{3}\sqrt{5} + \frac{4}{3}\sqrt{5} = 12\sqrt{5} \text{ см}^2.$$

Второе решение. Проведем через точку C прямую параллельно диагонали BD . Она пересечет прямую AD в точке E (см. рис. 1).

Четырехугольник $BCED$ — параллелограмм по построению. Значит, имеем $DE = BC$ и $CE = BD$.

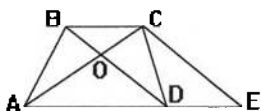


Рис. 1

В треугольнике ACE известны все стороны: $AE = 6 + 3 = 9$ см, $BD = 7$ см, $AC = 8$ см. Кроме того, его площадь равна половине произведения AE на высоту, опущенную из точки C , т.е. на высоту трапеции. Из того, что AE равна сумме оснований трапеции, следует, что площадь треугольника ACE равна площади трапеции. Применяя формулу Герона, находим, что искомая площадь равна $12\sqrt{5}$ см².

Ответ: $12\sqrt{5}$ см². ◀

- **Задача 2.** В трапецию $ABCD$ с основаниями $AD = 10$ и $BC = 2$ можно вписать, а вокруг нее можно описать окружность. Определить, где (т.е. внутри, извне или на стороне) находится центр описанной вокруг трапеции окружности.

Решение. Из того, что трапеция вписанная, следует, что боковые ее стороны равны. Обозначим их длину через x . Из того, что в трапецию можно вписать окружность, следует, что $x + x = 10 + 2 \iff x = 6$.

Центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам, в частности, на общем серединном перпендикуляре к сторонам AD и BC . Пусть радиус описанной окружности равен R , а K — середина стороны BC . Тогда расстояние d от центра O окружности до стороны BC равно OK и по теореме Пифагора совпадает с $\sqrt{R^2 - KB^2} = \sqrt{R^2 - 1}$.

Ясно, что если d меньше, чем высота трапеции, то центр окружности лежит внутри нее, если больше, то вне, и, наконец, если d равно высоте трапеции, то центр описанной окружности лежит на стороне AD . (Нарисуйте, пожалуйста сами рисунки для этих трех случаев).

Чтобы найти высоту трапеции, опустим на сторону AD перпендикуляры BB_1 и CC_1 из точек B и C соответственно. Тогда $B_1C_1 = BC = 2$ и $AB_1 = C_1D = 4$. Теперь высоту BB_1 можно найти по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ABB_1 :

$$BB_1 = \sqrt{AB^2 - AB_1^2} = \sqrt{36 - 16} = 2\sqrt{5}.$$

Нам осталось найти R . Мы сделаем это, заметив, что данная окружность описана, в частности, вокруг треугольника ABC . Площадь ABC равна

$$\frac{1}{2} \cdot BC \cdot h = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BB_1 = 2\sqrt{5}.$$

Сторону AC найдем по теореме Пифагора: $AC = \sqrt{AB_1^2 + CC_1^2} = \sqrt{56}$.

Теперь R можно найти из формулы $R = \frac{abc}{4S}$. Подставляя в нее найденные значения сторон и площади, получим, что $R = 3\sqrt{\frac{14}{5}}$.

Наконец, $R^2 - 1 = \frac{121}{5} > 20 = h^2$, что означает, что центр окружности лежит вне трапеции.

Ответ: центр описанной окружности лежит вне трапеции. ◀

- **Задача 3.** Диагонали трапеции равны. Доказать, что она равнобедренная.

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, O — точка пересечения ее диагоналей. Через точку C проведем прямую, параллельную диагонали BD . Точку пересечения этой прямой с прямой AD обозначим через E (см. рис. 1).

Из того, что $BCED$ — параллелограмм, следует, что $CE = BD$, значит, треугольник ACE — равнобедренный. Следовательно,

$$\angle CAD = \angle CED = \angle ODA,$$

где последнее равенство выполняется из-за параллельности прямых BD и CE . Мы доказали, что и треугольник AOD равнобедренный ($AO = OD$). Поэтому то же самое можно сказать и о треугольнике BOC , который подобен треугольнику AOD .

Теперь видно, что треугольники AOB и COD равны по двум сторонам ($AO = OD$ и $BO = OC$) и углу между ними ($\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные углы). Тем самым, $AB = CD$, что и требовалось доказать.

- **Задача 4.** В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD углы DAB и ADC прямые. Известно, что $AD = 5$, $AB = 1$, $CD = 4$. На стороне AD взята точка M такая, что $\angle CMD = 2 \cdot \angle BMA$. Найти $AM : MD$.

Решение. Обозначим угол BMA через α . Тогда угол CMD равен 2α . Треугольник ABM прямоугольный с катетом $AB = 1$ и острым углом α . Значит, $AM = AB \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha$. Аналогично, $MD = 4 \operatorname{ctg} 2\alpha$. Равенство $AM + MD = 5$ дает уравнение на α :

$$\operatorname{ctg} \alpha + 4 \operatorname{ctg} 2\alpha = 5 \iff \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + 4 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} = 5 \iff \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}, -3.$$

Из того, что угол α острый, следует, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$.

Тогда $AM = \operatorname{ctg} \alpha = 2$ и $MD = 5 - 2 = 3$.

Ответ: $\frac{AM}{MD} = 2 : 3$. ◀

- **Задача 5.** Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании. Найти все стороны трапеции, если ее высота равна 12, а биссектрисы 15 и 13.

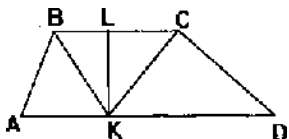


Рис. 2

Решение. Пусть $ABCD$ — наша трапеция и BC — ее основание с тупыми углами. Пусть K — точка пересечения биссектрис углов ABC и BCD , причем $BK = 15$, $CK = 13$. Из точки K опустим перпендикуляр KL на сторону BC

(см. рис. 2). Оба угла KBC и BCK острые, будучи половинами углов ABC и BCD . Поэтому L лежит именно на отрезке BC (как на рис. 2), а не на его продолжении.

Пусть $\angle KBC = \alpha$ и $\angle BCK = \beta$. Ясно, что $\sin \alpha = \frac{12}{15}$ и $\sin \beta = \frac{12}{13}$. По теореме Пифагора $BL = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$, $CL = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$. Отсюда $\cos \alpha = \frac{9}{15}$, $\cos \beta = \frac{5}{13}$. Кроме того, одну сторону мы уже нашли: $BC = 9 + 5 = 14$.

Заметим, что $\angle ABK = \alpha$, ибо BK — биссектриса, и $\angle AKB = \angle KBL = \alpha$ по теореме о внутренних накрест лежащих углах. Мы доказали, что $AB = AK$. По теореме синусов для треугольника ABK имеем

$$\frac{15}{\sin(\pi - 2\alpha)} = \frac{AB}{\sin \alpha} \iff \frac{15}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{AB}{\sin \alpha} \iff AB = \frac{15}{2 \cos \alpha} = 12,5.$$

Аналогично устанавливается, что $CD = DK = 16,9$. И, наконец, $AD = AK + KD = 29,4$.

Ответ: 14, 16,9, 29,4, 12,5. ◀

- **Задача 6.** Пусть $ABCD$ — произвольный четырехугольник, K, L, M, N есть соответственно середины сторон AB, BC, CD, AD . Доказать, что $KLMN$ — параллелограмм.

Решение. Согласно одному из признаков параллелограмма, достаточно доказать, что $KL = MN$ и $KL \parallel MN$. В треугольнике ABC отрезок KL есть средняя линия. Значит, $KL \parallel AC$ и $KL = \frac{1}{2}AC$. Аналогично MN есть средняя линия в треугольнике ACD и, следовательно, $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$. Отсюда имеем $KL \parallel MN$ и $KL = MN = \frac{1}{2}AC$, что и требовалось доказать.

- **Задача 7.** Дан параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = 2$ и $BC = 3$. Найти площадь этого параллелограмма, если известно, что диагональ AC перпендикулярна к отрезку BE , соединяющему вершину B с серединой E стороны AD .

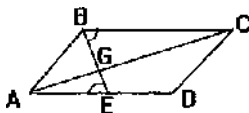


Рис. 3

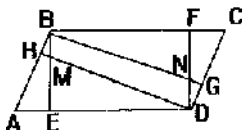


Рис. 4

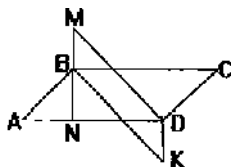


Рис. 5

Решение. Пусть G — точка пересечения отрезков BE и AC (см. рис. 3). Обозначим угол CBG через α . Тогда и угол AEG равен α . Кроме того, $BC = 3$, $AE = 1,5$, откуда $BG = 3 \cos \alpha$, $AG = 1,5 \sin \alpha$. Записывая теорему Пифагора для треугольника ABG , получаем уравнение на α :

$$(3 \cos \alpha)^2 + (1,5 \sin \alpha)^2 = 2^2 \iff \cos \alpha = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Значит, высота BG в треугольнике ABC равна $\sqrt{\frac{7}{3}}$. Сторону AC находим, применяя дважды теорему Пифагора:

$$AC = \sqrt{AB^2 - BG^2} + \sqrt{BC^2 - BG^2} = \sqrt{15}.$$

Следовательно,

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABC} = AC \cdot BG = \sqrt{15} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} = \sqrt{35}.$$

Ответ: $\sqrt{35}$. ◀

► **Задача 8** [2]. Известно, что $ABCD$ — параллелограмм, в котором $AB = 1$, $BC = 2$ и угол ABC тупой. Через каждую из точек B и D проведено по две прямые, одна из которых перпендикулярна AB , а вторая перпендикулярна CB . В пересечении этих четырех прямых получился параллелограмм, подобный $ABCD$. Найти площадь $ABCD$.

Решение. В этой задаче мы должны рассмотреть два случая: когда оба перпендикуляра BE и BG , опущенные из точки B , попали на отрезки AD и CD (рис. 4).

Пусть угол BAD равен α . По условию $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Из прямоугольного треугольника ABE находим, что $BE = \sin \alpha$, $AE = \cos \alpha$.

Значит, $ED = 2 - \cos \alpha$. Треугольник MDE прямоугольный и $\angle EMD = \alpha$. Следовательно, $ME = ED \cdot \operatorname{ctg} \alpha = (2 - \cos \alpha) \cdot \operatorname{ctg} \alpha$, $MD = \frac{ED}{\sin \alpha} = \frac{2 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$. Теперь уже можно найти вторую сторону нового параллелограмма:

$$BM = \sin \alpha - (2 - \cos \alpha) \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

Из того, что новый параллелограмм подобен исходному, следует, что $2 \cdot BM = MD$. Мы получили тригонометрическое уравнение на α :

$$\begin{aligned} 2(\sin \alpha - (2 - \cos \alpha) \cdot \operatorname{ctg} \alpha) &= \frac{2 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \iff \\ \iff 2 \sin^2 \alpha - 2 \cos \alpha (2 - \cos \alpha) &= 2 - \cos \alpha \iff \\ \iff 2 \sin^2 \alpha - 4 \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha &= 2 - \cos \alpha \iff \cos \alpha = 0 \iff \alpha = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

— противоречие с тем, что α — острый угол.

Отсюда заключаем, что ситуация, изображенная на рисунке 4, невозможна.

Переходим к случаю, когда один из перпендикуляров, опущенных из точки B , попадает не на сторону CD , а на ее продолжение (см. рис. 5).

Рассуждения здесь аналогичны. По-прежнему $ND = 2 - \cos \alpha$, $MN = ND \cdot \operatorname{ctg} \alpha = (2 - \cos \alpha) \operatorname{ctg} \alpha$, $MD = \frac{ND}{\sin \alpha}$. Наконец, $MB = MN - BN = (2 - \cos \alpha) \operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha$.

Теперь уже, исходя из условия $MD = 2 \cdot BM$, можно составить уравнение на α :

$$\begin{aligned}
 2((2 - \cos \alpha) \operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha) &= \frac{2 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \iff \\
 \iff 2(2 - \cos \alpha) \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha &= 2 - \cos \alpha \iff \\
 \iff 4 \cos \alpha - 2 \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha &= 2 - \cos \alpha \iff \\
 \iff 5 \cos \alpha = 4 \iff \cos \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin \alpha &= \frac{3}{5}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, площадь параллелограмма $ABCD$ равна $S = AB \cdot AD \cdot \sin \alpha = \frac{6}{5}$.

Ответ: $\frac{6}{5}$. ◀

- **Задача 9.** Длины диагоналей ромба относятся как 3:4. Во сколько раз площадь ромба больше площади вписанного в него круга?

Решение. Пусть сторона ромба равна a . Обозначим через O центр вписанной в ромб окружности (см. рис. 6). Диагонали ромба перпендикулярны, так что треугольник AOB — прямоугольный, причем каждый из его катетов равен половине соответствующей диагонали. Отсюда следует, что если $MO = x$, то $AO = \frac{4}{3}x$ и

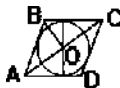


Рис. 6

$$x^2 + \left(\frac{4x}{3}\right)^2 = a^2 \iff x = \frac{3}{5}a.$$

Значит, диагонали трапеции равны $\frac{6}{5}a$ и $\frac{8}{5}a$. Следовательно, ее площадь есть $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5}a \cdot \frac{8}{5}a = \frac{24}{25}a^2$.

Радиус вписанной окружности равен, очевидно, половине высоты ромба, которая, в свою очередь, вычисляется по формуле $h = \frac{S}{a} = \frac{24}{25}a$. Тем самым, радиус вписанной окружности равен $\frac{12}{25}a$. Площадь вписанного круга равна $\frac{144}{625}\pi a^2$.

Взяв отношение площади ромба к площади вписанного круга, получим (после сокращения на a^2 и упрощения дробей), что оно равно $\frac{25}{6\pi}$.

Ответ: в $\frac{25}{6\pi}$ раз. ◀

- **Задача 10.** В ромб вписана окружность радиуса R . Найти площадь ромба, если его большая диагональ равна $4R$.

Решение. Пусть $ABCD$ — наш ромб и O — центр окружности, совпадающий с точкой пересечения его диагоналей. Если $AC = 4R$ — большая

диагональ, то $AO = 2R$. В прямоугольном треугольнике AOD пусть OK — высота, опущенная на гипотенузу AD . Имеем $\sin \angle OAK = \frac{OK}{AO} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$. Значит, угол OAD равен $\frac{\pi}{6}$ и $AD = \frac{2R}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{4R}{\sqrt{3}}$.

Мы нашли сторону ромба. Высота его равна $2R$, так что площадь находится как произведение стороны на высоту.

Ответ: $\frac{8R^2}{\sqrt{3}}$. ◀

- **Задача 11.** Диагонали ромба равны 2 и 3. Его повернули на 90° вокруг центра. Найти площадь общей части этих двух ромбов.

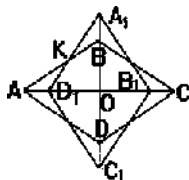


Рис. 7

Решение. Посмотрим на рисунок 7. Здесь $ABCD$ — исходный ромб, а $A_1B_1C_1D_1$ — ромб, полученный из него поворотом на $\frac{\pi}{2}$ по часовой стрелке. Нам даже не потребовалось обозначать буквами все вершины восьмиугольника, получившегося в пересечении. Действительно, нам ведь нужно найти только его площадь, а она равна площади ромба без учетверенной площади треугольника AKD_1 ,

поскольку восьмиугольник получается из ромба выкидыванием четырех треугольников, равных AKD_1 .

Найдем площадь треугольника AKD_1 . Ясно, что $AO = \frac{3}{2}$, $OD_1 = OB = 1$, так что $AD_1 = \frac{1}{2}$. Треугольники AOB и AKD_1 позволяют сравнивать их площади по факту 2. Надо лишь найти $\frac{AK}{AB}$.

По теореме Менелая для треугольника AOB и секущей D_1A_1 имеем:

$$\frac{AD_1}{D_1O} \cdot \frac{OA_1}{A_1B} \cdot \frac{BK}{KA} = 1 \iff \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{BK}{KA} = 1 \iff \frac{BK}{KA} = \frac{2}{3},$$

откуда уже легко найти, что $\frac{AK}{AB} = \frac{3}{5}$.

Площадь треугольника AOB равна $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$. Отсюда

$$S_{AKD_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20}.$$

Площадь ромба равна $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$. И, наконец, площадь пересечения равна $3 - 4 \cdot \frac{3}{20} = \frac{12}{5}$.

Ответ: $\frac{12}{5}$. ◀

- **Задача 12.** Вершины прямоугольника, вписанного в окружность, делят ее на четыре дуги. Найти расстояния от середины одной из больших дуг до вершин прямоугольника, если стороны его равны 24 и 7.

Решение. Обозначим середину одной из таких дуг через E . Центр O описанной окружности совпадает с точкой пересечения диагоналей прямоугольника. Пусть K и L — точки пересечения прямой EO со сторонами прямоугольника (см. рис. 8).

Прямая EO перпендикулярна BC , так как EO является биссектрисой угла BOC в равнобедренном треугольнике BOC (а биссектрисой эта прямая является, поскольку дуга BE есть половина дуги BC).

Поскольку $BD = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$, радиус окружности равен $\frac{25}{2}$. Отрезок OK составляет половину AB , т.е. равен $\frac{7}{2}$. Значит,

$$EK = EO - OK = \frac{25}{2} - \frac{7}{2} = 9.$$

Отсюда $BE = \sqrt{BO^2 + EK^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$, и $AE = \sqrt{AL^2 + EL^2} = \sqrt{(9+7)^2 + 12^2} = 20$.

Ответ: 15 и 20. ◀

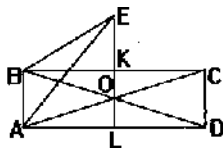


Рис. 8

- **Задача 13.** В прямоугольнике со сторонами a и b проведены биссектрисы всех углов до взаимного пересечения. Найти площадь четырехугольника, образованного биссектрисами.

Решение. Наш прямоугольник может (при $a = b$) оказаться квадратом. Тогда биссектрисы всех углов пересекутся в одной точке — центре квадрата — и площадь искомого четырехугольника можно считать равной нулю.

Пусть наш прямоугольник $ABCD$ не является квадратом. Предположим к примеру, что $AD = b > a = AB$. Пусть $KLMN$ — искомый четырехугольник (см. рис. 9).

Треугольник ABK равнобедренный прямоугольный, поскольку $\angle KAB = \angle KBA = \frac{\pi}{4}$. То же самое верно и для треугольников CMD , ALD и BCN . Следовательно, все углы четырехугольника $KLMN$ прямые. Кроме того, $AK = DM = \frac{a}{\sqrt{2}}$ и

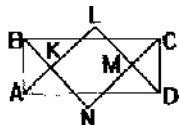


Рис. 9

$$KL = AL - AK = DL - DM = KM = \frac{b}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{2}},$$

т.е. наш четырехугольник есть квадрат со стороной $\frac{b}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{2}}$. Его площадь, очевидно, равна $\frac{1}{2}(b-a)^2$. Ясно, что эта формула дает правильный ответ и при $a = b$.

Ответ: $\frac{1}{2}(b-a)^2$. ◀

- **Задача 14** [2]. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка E такая, что $DE = EC$ и $\angle EDC = 15^\circ$. Доказать, что $AE = EB = AB$.

Решение. Пусть сторона квадрата равна a . Ясно, что $DE = \frac{a}{2 \cos 15^\circ}$. Найдем AE по теореме косинусов из треугольника AED :

$$AE^2 = AD^2 + DE^2 - 2AD \cdot DE \cdot \cos 75^\circ = a^2 + \frac{a^2}{4 \cos^2 15^\circ} - \frac{a^2}{\cos 15^\circ} \cos 75^\circ.$$

Найдем, чему равен $\operatorname{tg} 15^\circ$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 15^\circ &= \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} : \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}} = \\ &= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

В выражении для AE^2 вынесем a^2 за скобки и воспользуемся равенствами

$$\frac{1}{\cos^2 15^\circ} = 1 + \operatorname{tg}^2 15^\circ, \quad \text{и} \quad \frac{\cos 75^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \operatorname{tg} 15^\circ.$$

Получим, что

$$AE^2 = a^2 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 15^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ \right) = a^2 \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{4} (2 - \sqrt{3})^2 - 2 + \sqrt{3} \right) = a^2,$$

что и требовалось доказать.

Урок окончен. Оценку поставьте себе стандартным образом.

Домашнее задание

- 1. В параллелограмме $ABCD$ угол C острый, $AB = 3$, $BC = 6$. Точка F лежит на середине стороны AD . Прямая, перпендикулярная к AB и проходящая через точку C , пересекает продолжение отрезка AB за точку B в точке E . Известно, что $\angle AEF = \alpha$. Найти площадь четырехугольника $AECD$.
- 2. Площадь трапеции $ABCD$ равна 6, E — точка пересечения продолжений боковых сторон. Через точку E и точку пересечения диагоналей проведена прямая, пересекающая меньшее основание BC в точке P , а большее основание AD в точке Q . Точка F лежит на отрезке EC , причем

$$\frac{EF}{FC} = \frac{EP}{EQ} = \frac{1}{3}.$$

Найти площадь треугольника EPF .

- 3. В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются под прямым углом, и одно основание ее в два раза больше другого. Отношение длин боковых сторон равно m . Найти боковые стороны, если сумма квадратов длин диагоналей равна d^2 .
- 4. В трапеции $ABCD$ основание AD больше основания BC . Известно, что

$$AD = CD = \frac{14}{3}, \angle BAD = \frac{\pi}{2}, \angle BCD = \frac{5}{6}\pi.$$

На основании AD построен треугольник AED . Точки B и E лежат по одну сторону от AD и $AE = ED$. Длина высоты, опущенной из точки E на прямую AD , равна $\frac{7}{5}$. Найти площадь общей части трапеции $ABCD$ и треугольника AED .

- 5. В трапеции $ABCE$ основание AE равно 16. Боковая сторона CE равна $8\sqrt{3}$. Известно, что окружность, проходящая через точки A, B, C , пересекает сторону AE в точке H , причем $\angle AHB = 60^\circ$. Найти BH .
- 6. Сторона ромба $ABCD$ равна 6, а угол BAD равен 60° . Точка E лежит на стороне BC , причем $CE = 2$. Найти длину отрезка OE , где O — центр ромба.
- 7. В трапеции $PQRS$ основание QR равно 10. Известно также, что $QS = 19$ и $\angle QSP = 30^\circ$. Что больше, QR или RS ?
- 8. Около трапеции $KLMN$ описана окружность. Основание KN трапеции является ее диаметром, причем $KN = 4$, $LM = 2$. Хорда MT пересекает KN в точке S такой, что $KS : SN = 1 : 3$. Найти площадь треугольника STN .
- 9. Дан прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 6$, $AD = 3(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$. В нем лежат две окружности. Окружность радиуса 2 с центром в точке K касается сторон AB и AD . Окружность радиуса 1 с центром в точке L касается стороны CD и первой окружности. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую KL . Найти площадь треугольника CML .
- 10. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD диагонали AC и BD пересекаются в точке O , причем треугольник BOC равносторонний. Известно, что $AB = 5$, $CD = 3$. Найти длину стороны BC .
- 11. В трапецию $ABCD$ вписана окружность. Продолжения боковых сторон AD и BC за точки D и C пересекаются в точке E . Периметр треугольника DCE равен 60, сторона AB равна 20 и $\angle ADC = \beta$. Найти радиус окружности.
- 12. Площадь трапеции $ABCD$ равна 30. Ее основание AD в два раза больше основания BC . Точка P лежит на середине боковой стороны AB , а точка R — на стороне CD , деля ее в отношении $DR : RC = 2 : 1$. Прямые AR и PD пересекаются в точке Q . Найти площадь треугольника APQ .

- 13. В параллелограмме $PQRS$ биссектриса угла RPQ , равного 80° , пересекает сторону RS в точке L . Найти радиус окружности, касающийся отрезка PQ и лучей QR и PL , если $PQ = 7$.
- 14. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке M , причем $DM/MC = 2$. Известно, что угол CAM равен α . Найти угол BAD .
- 15. Окружность, проходящая через точку D и касающаяся сторон AB и BC равнобедренной трапеции $ABCD$, пересекает стороны AD и CD соответственно в точках M и N . Известно, что $AD \parallel BC$ и

$$AB = 7, AD = 6, \frac{AM}{MD} = \frac{1}{3}, \frac{CN}{ND} = \frac{4}{3}.$$

Найти длину основания BC .

- 16. Известно, что $ABCD$ — параллелограмм, $BD = 2$, $\angle ACB = 45^\circ$. Прямая CD касается окружности, описанной около треугольника ABD . Найти площадь параллелограмма $ABCD$.
- 17. Параллелограммы $ABCD$ и $A'BCD'$ имеют общую сторону BC , причем точка A симметрична A' , а точка D симметрична D' относительно прямой BC . Отрезки BD и BA' лежат на одной прямой. Угол между AC и $A'C$ равен 45° . Площадь пятиугольника $ADCD'A'$ равна $15\sqrt{2}$. Найти AB и AD .
- 18. Около квадрата $BEFC$ описана окружность радиуса $2\sqrt{2}$. Точка P лежит на продолжении отрезка BC за точку C , причем $PC = \sqrt{28} - 2$. Через точку P проведена секущая PA , пересекающая окружность в точках D и A . Известно, что $PD = 4$ и угол BAC тупой. Найти угол BPA .
- 19. В прямоугольнике $ABCD$ известны длины сторон $AB = 12$ и $AD = 5$. Точка пересечения диагоналей обозначена через E . Пусть O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник AED , и O_2 — центр окружности, вписанной в треугольник DEC . Найти $\frac{EO_1}{EO_2}$.
- 20 [2]. В параллелограмме лежат две окружности радиуса 1, касающиеся друг друга и трех сторон параллелограмма каждая. Один из отрезков стороны параллелограмма от вершины до точки касания равен $\sqrt{3}$. Найти площадь параллелограмма.

Урок 31

Окружности

Мы уже решали много задач с окружностями. В них подчеркивалось, что главную роль в решении играет то метод подобия, то методы сравнения площадей, и т.п. Я уже много раз подчеркивал, что в жизни почти не бывает задач на какой-то один метод. Каждый из методов служит для того, чтобы упростить задачу, и решить полученную более простую задачу другими методами.

Сегодняшний урок посвящен тому, чтобы вкупе со всеми пройденными методами, мы научились упрощать (иногда решающим образом) задачи, используя свойства окружностей. Практически все из них уже применялись на предыдущих занятиях, но на сегодняшнем я выпишу важнейшие из них и попрошу вас хорошо их запомнить.

1) Вписанный угол, т.е. угол, образованный двумя хордами, исходящими из одной точки окружности, равен по величине половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу (см. рис. 1), т.е. $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

На данном рисунке $\beta = \angle ACB$ — вписанный угол, а $\alpha = \angle AOB$ — центральный.



Рис. 1

Как следствие получаем, что два вписанных угла, опирающихся на одну и ту же дугу, равны. Другое следствие состоит в том, что вписанный угол равен 90° если и только если он опирается на диаметр.

2) Пусть точка A лежит вне окружности, AB — касательная к окружности, AC и AF — секущие (см. рис. 2). Тогда $AD \cdot AC = AF \cdot AE = AB^2$, т.е. квадрат касательной, проведенной к окружности из произвольной точки, равен произведению любой секущей, проведенной из той же точки, на ее внешнюю часть. В частности, если из одной точки проведены к окружности две секущие, то произведения их длин на внешние части равны между собой. Мы даже доказали этот факт (см. урок 28, задача 9).

3) Пусть хорды AB и CD некоторой окружности пересекаются в точке O . (см. рис. 3). Тогда $AO \cdot OB = CO \cdot OD$. Этот факт мы тоже доказали (в задаче 8 урока 28).

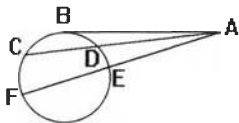


Рис. 2

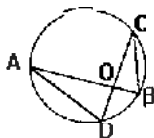


Рис. 3

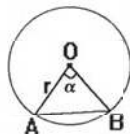


Рис. 4

4) Пусть мы имеем окружность с центром O радиуса r и точки A и B лежат на окружности, причем угол AOB равен α (рис. 4). Тогда площадь сектора AOB равна $\frac{1}{2}r^2\alpha$ (угол α обязательно должен быть выражен в радианах!). Площадь сегмента, ограниченного хордой AB , равна $\frac{1}{2}r^2(\alpha - \sin \alpha)$. Длина дуги AB равна $r\alpha$. В частности, площадь круга (т.е. сектора при $\alpha = 2\pi$) равна πr^2 , а длина окружности (т.е. дуги при $\alpha = 2\pi$) есть $2\pi r$.

К материалу про окружности, бесспорно, относятся условия, при которых четырехугольник можно вписать в окружность или описать его около окружности. Я привел их во вводной части предыдущего урока. Проверьте себя. Если вы в них все еще путаетесь, то дело плохо.

5) Если существует окружность, вписанная в многоугольник, то центр ее лежит в точке пересечения всех биссектрис этого многоугольника. Если существует окружность, описанная около многоугольника, то ее центр лежит в точке пересечения всех серединных перпендикуляров к сторонам многоугольника. Разумеется, все сказанное относится и к треугольникам, с той лишь разницей, что у них всегда существуют и вписанная и описанная окружности.

6) Окружности радиусов R и r касаются внешним образом тогда и только тогда, когда расстояние между их центрами равно $R + r$; их касание будет внутренним, если и только если расстояние между их центрами равно $R - r$.

► **Задача 1.** Хорды AC и BD некоторой окружности пересекаются в точке O . Центральный угол, опирающийся на дугу AD , равен α , а на дугу BC — β . Известно, что $AO = 6$, $OC = 1$, $BD = 5$ и $DO > OB$. Найти площадь треугольника AOD .

Решение. Мы знаем, что $S_{AOD} = \frac{1}{2}AO \cdot OD \cdot \sin \angle AOD$. Пусть $OD = x$, $OB = y$. Тогда $x > y$, $x + y = 5$ и $xy = AO \cdot OC = 6$, откуда легко найти, что $x = 3$, $y = 2$.

Для того чтобы найти угол AOD , рассмотрим треугольник COD . Имеем

$$\angle OCD + \angle ODC + \angle COD = \pi \Rightarrow \angle OCD + \angle ODC = \pi - \angle COD = \angle AOD,$$

и остается лишь заметить, что углы OCD и ODC вписанные, так что они равны $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$ соответственно.

Итак, искомая площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \sin \frac{\alpha+\beta}{2} = 9 \sin \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Ответ: $9 \sin \frac{\alpha+\beta}{2}$. ◀

- **Задача 2.** Точка P лежит вне окружности. Из нее проведены к окружности две секущие PBA и PCD (эта запись означает, что первая секущая пересекает окружность в точках B и A , а вторая — в точках C и D , считая от точки P). Центральный угол, опирающийся на дугу AD равен α , а опирающийся на дугу BC — β . Известно, что $AB = 3$, $BP = 2$, $PC = 5/2$. Найти площадь треугольника ADP .

Решение. Искомая площадь равна $S = \frac{1}{2} AP \cdot PD \cdot \sin \angle APD$. Поскольку $AP = 2 + 3 = 5$, нам надо найти PD и угол APD .

По теореме о секущих имеем $DP \cdot PC = PB \cdot PA = 2 \cdot 5 = 10$, откуда $PD = \frac{10}{PC} = \frac{10}{2,5} = 4$.

Рассмотрим треугольник BPD . Имеем

$$\angle BPD + \angle BDP + \angle DBP = \pi \Rightarrow \angle BPD = (\pi - \angle DBP) - \angle BDP,$$

а последняя разность равна $\angle ABD - \angle BDP = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}$, поскольку углы ABD и BDP вписанные, опирающиеся соответственно на дуги AD и BC .

Подставляя найденные величины в формулу для площади, получаем

Ответ: $S = 10 \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$. ◀

- **Задача 3.** Три окружности попарно касаются друг друга внешним образом. Радиусы их относятся как $1 : 2 : 3$. Найти углы треугольника, составленного из точек касания окружностей.

Решение. Пусть C — центр окружности наименьшего радиуса, равного r , тогда одна из оставшихся окружностей имеет радиус $2r$ — обозначим ее центр через B . Центр последней из окружностей, имеющей радиус $3r$, обозначим через A . Пусть B_1 , C_1 , и A_1 есть соответственно точки касания окружностей, лежащие на сторонах AC , AB и BC . Тогда

$$B_1C = CA_1 = r, BA_1 = BC_1 = 2r \text{ и } AB_1 = AC_1 = 3r \text{ (см. рис. 5)}.$$

Легко проверить, что $AC^2 + BC^2 = AB^2$, т.е. треугольник, составленный из центров окружностей является прямоугольным. Кроме того,

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{3r}{5r} = \frac{3}{5} = \cos B,$$

откуда $A = \arcsin \frac{3}{5}$, $B = \arccos \frac{3}{5}$.

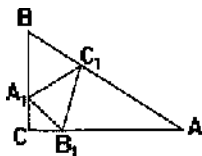


Рис. 5

Треугольник AB_1C_1 равнобедренный, и, значит, легко найти, что угол B_1C_1A равен $\frac{\pi - \arcsin \frac{3}{5}}{2}$. Аналогичным образом находим, что $\angle BC_1A_1 = \angle BA_1C_1 = \frac{\pi - \arccos \frac{3}{5}}{2}$. Треугольник CB_1A_1 — прямоугольный равнобедренный, и, значит, $\angle CB_1A_1 = \angle CA_1B_1 = \frac{\pi}{4}$.

Теперь уже легко находятся все нужные углы:

$$\begin{aligned} \angle AC_1B_1 + \angle BC_1A_1 + \angle B_1C_1A_1 &= \pi \\ \Rightarrow \angle B_1C_1A_1 &= \pi - \angle AC_1B_1 - \angle BC_1A_1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\angle B_1C_1A_1 = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{5} \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} \right) = \frac{1}{2} \left(\arcsin \frac{3}{5} + \arccos \frac{3}{5} \right).$$

Последняя сумма в скобках равна $\frac{\pi}{2}$, будучи равной сумме острых углов прямоугольного треугольника. Значит, угол $A_1C_1B_1$ равен $\frac{\pi}{4}$. Совершенно таким же образом находятся остальные углы треугольника $A_1B_1C_1$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5}$. ◀

- **Задача 4** [2]. Из точки A , лежащей на окружности радиуса R проведены две хорды — AC и AB . Эти хорды лежат по одну сторону от диаметра окружности, проходящего через точку A . Дана длина b большей хорды и угол $BAC = \alpha$. Найти радиус окружности, которая касается хорд AB и AC и дуги $\widehat{BC}$.

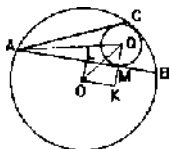


Рис. 6

Решение. Пусть O — центр исходной окружности. Радиус искомой окружности обозначим через x , а ее центр — через Q . Тогда AQ — биссектриса угла BAC . Отрезок OQ равен $R - x$ (см. рис. 6).

Здесь $OL \perp AB$ и $QK \perp AC$. Тогда $QM = x$ и $MK = OL = \sqrt{R^2 - \frac{b^2}{4}}$. Из прямоугольного треугольника AQM находим, что $AM = x \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Теперь уже можно составить теорему Пифагора для треугольника OQK , которая даст нам уравнение на x :

$$\left(x \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \frac{b}{2} \right)^2 + \left(x + \sqrt{R^2 - \frac{b^2}{4}} \right)^2 = (R - x)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - bx \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \frac{b^2}{4} + x^2 + 2x \sqrt{R^2 - \frac{b^2}{4}} + R^2 - \frac{b^2}{4} = R^2 - 2Rx + x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - bx \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + 2x \sqrt{R^2 - \frac{b^2}{4}} = -2Rx \Leftrightarrow$$

$$x \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = b \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \sqrt{4R^2 - b^2} - 2R \Leftrightarrow$$

$$x = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \left(b \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \sqrt{4R^2 - b^2} - 2R \right).$$

Наша задача полностью решена.

Ответ: $x = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} (b \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \sqrt{4R^2 - b^2} - 2R)$. ◀

- **Задача 5.** В круговой сектор, ограниченный радиусами OA и OB с центральным углом $\alpha < \frac{\pi}{2}$ вписан квадрат так, что две его соседние вершины лежат на радиусе OA , третья вершина — на радиусе OB , а четвертая вершина — на дуге AB . Найти отношение площадей квадрата и сектора.

Решение. Пусть вершины P и Q квадрата лежат на радиусе OA , вершина R — на радиусе OB , и вершина S — на окружности. Пусть радиус окружности равен R , а сторона квадрата — x (см. рис. 7).

Из прямоугольного треугольника OQR имеем $OQ = x \operatorname{ctg} \alpha$. Теорема Пифагора для прямоугольного треугольника OPS дает уравнение на x :

$$(x + x \operatorname{ctg} \alpha)^2 + x^2 = R^2 \iff x^2(2 + 2 \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha) = R^2,$$

откуда находим, что

$$\frac{S_{PQRS}}{S_{OAB}} = \frac{x^2}{\frac{1}{2}R^2\alpha} = \frac{2}{\alpha(2 + 2 \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha)}.$$

Ответ: $\frac{2}{\alpha(2 + 2 \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha)}$. ◀

- **Задача 6 [3].** Из точки A , лежащей вне окружности радиуса r , проведена секущая, не проходящая через центр O окружности. Пусть B и C — точки, в которых секущая пересекает окружность. Найти

$$\operatorname{tg} \frac{\angle AOB}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\angle AOC}{2},$$

если $OA = a$.

Решение. Проведем через точку A диаметр APQ данной окружности (см. рис. 8). Полагая $\angle AOB = \alpha$, $\angle AOC = \beta$, и пользуясь тем, что вписанный угол равен половине соответствующего центрального, находим, что $\angle BQP = \frac{\alpha}{2}$, $\angle CQP = \frac{\beta}{2}$.

Треугольник BPQ прямоугольный, так как вписанный угол B в нем опирается на диаметр PQ окружности. Значит, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{BP}{BQ}$. Аналогично, $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{PC}{CQ}$. Следовательно, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{BP \cdot PC}{BQ \cdot QC}$.

В треугольниках BPC и BQC углы BPC и BQC равны как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу BC . Отсюда следует, что

$$\frac{S_{BPC}}{S_{BQC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BP \cdot PC \cdot \sin \angle BPC}{\frac{1}{2} \cdot BQ \cdot QC \cdot \sin \angle BQC} = \frac{BP \cdot PC}{BQ \cdot QC},$$

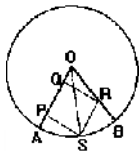


Рис. 7

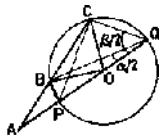


Рис. 8

так что искомая величина равна отношению площадей треугольников BPQ и BQC . Но эти треугольники имеют общее основание BC , и, значит, их площади относятся как высоты PP_1 и QQ_1 , опущенные соответственно из точек P и Q на прямую BC (точки P_1 и Q_1 не изображены, чтобы не загромождать чертеж). Треугольники APP_1 и AQQ_1 подобны, откуда получаем, что $\frac{PP_1}{QQ_1} = \frac{AP}{AQ} = \frac{a-r}{a+r}$, что и требовалось.

Ответ: $\frac{a-r}{a+r}$. ◀

- **Задача 7.** В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC . Окружность проходит через точки C и D и касается отрезка AB в точке E . Найти расстояние от точки E до прямой CD , если $AD = 4$, $BC = 3$.

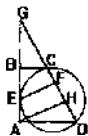


Рис. 9

Решение. Основания AD и BC имеют разную длину, так что прямые AB и CD не параллельны. Пусть G — точка их пересечения. Опустим перпендикуляры EF и AH на прямую DG из точек E и A соответственно. Угол CDA обозначим через α (см. рис. 9).

Треугольники AGD , AHD и BGC прямоугольные, так что

$$GD = \frac{4}{\cos \alpha}, \quad AG = 4 \operatorname{tg} \alpha, \quad GC = \frac{3}{\cos \alpha}, \quad AH = 4 \sin \alpha.$$

По теореме о секущих и касательной имеем $GE^2 = GC \cdot GD = \frac{12}{\cos^2 \alpha} \iff$
 $GE = \frac{2\sqrt{3}}{\cos \alpha}.$

Треугольники AHG и EFG подобны. Следовательно,

$$\frac{AH}{EF} = \frac{AG}{EG} \iff \frac{4 \sin \alpha}{EF} = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{\frac{2\sqrt{3}}{\cos \alpha}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \alpha,$$

откуда легко находим, что $EF = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{3}$. ◀

- **Задача 8.** Даны две концентрические окружности. Доказать, что сумма квадратов расстояний от точки одной окружности до концов диаметра другой окружности не зависит ни от выбранной точки, ни от выбранного диаметра.

Решение. Пусть O — общий центр окружностей, AOB — диаметр одной из них, C — точка, лежащая на другой окружности. Нас интересует сумма $AC^2 + BC^2$.

Заметим, что CO — медиана в треугольнике ABC . Мы с вами обязаны помнить формулу, выражающую ее длину через длины сторон:

$$CO^2 = \frac{1}{4}(2AC^2 + 2BC^2 - AB^2) \iff AC^2 + BC^2 = \frac{1}{2}(4CO^2 + AB^2).$$

Теперь заметим, что в скобках стоят четыре квадрата радиуса одной окружности плюс квадрат диаметра (т.е. тоже четыре квадрата радиуса) другой. Значит, сумма квадратов, указанная в задаче, равна удвоенной сумме квадратов радиусов окружностей, и, следовательно, не зависит ни от выбранной точки, ни от выбранного диаметра, что и требовалось доказать.

- **Задача 9.** В некоторый угол вписана окружность радиуса 5. Длина хорды, соединяющей точки касания, равна 8. К окружности проведены две касательные, параллельные хорде. Найти стороны полученной трапеции.

Решение. Рассматриваемая ситуация изображена на рис. 10. Треугольник EOL прямоугольный и EK — высота в нем (так как в равнобедренном треугольнике EFL прямая LK является биссектрисой, а, значит, и высотой). Отсюда следует, что треугольники EOK и KLE подобны как прямоугольные с равными острыми углами. Следовательно, $\frac{EK}{KO} = \frac{KL}{EK}$. Ясно, что $EK = \frac{1}{2}EF = 4$. По теореме Пифагора $KO = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. Значит, $KL = \frac{16}{3}$ и $PL = 5 + 3 + \frac{16}{3} = \frac{40}{3}$. Из подобия треугольников BPL и EKL получаем соотношение

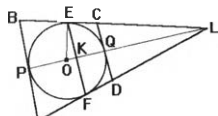


Рис. 10

$$\frac{BP}{EK} = \frac{PL}{KL} \iff \frac{BP}{4} = \frac{40/3}{16/3} \iff BP = 10.$$

Но BP составляет половину искомой стороны AB . Итак, $AB = 20$.

Отрезок QL равен $\frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$. Воспользуемся теперь подобием треугольников EKL и CQL :

$$\frac{EK}{CQ} = \frac{KL}{QL} \iff \frac{4}{CQ} = \frac{16/3}{10/3} \iff CQ = \frac{5}{2}.$$

Следовательно, сторона CD равна 5. Равные стороны BC и AD находятся из условия описанности четырехугольника $ABCD$:

$$AB + CD = BC + AD \iff BC = AD = 12,5.$$

Ответ: основания трапеции — 20 и 5, а обе боковые стороны — 12,5. ◀

- **Задача 10 [2].** К двум внешне касающимся окружностям радиусов R и r построена секущая так, что окружности отсекают на ней три равных отрезка. Найти длины этих отрезков

Решение. Ясно, что три равных отрезка состоят из двух хорд и одной внешней части. Пусть x — длина каждого из отрезков, P и Q — центры окружностей, PA и QB — перпендикуляры, опущенные на данную секущую. Получилась прямоугольная трапеция $APQB$, в которой отрезок AB состоит из двух половинок хорд, равных x , и одной внешней части, тоже равной x . Следовательно, $AB = 2x$ (см. рис. 11).

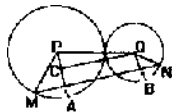


Рис. 11

Из прямоугольных треугольников PMA и QNB находим, что

$$PA = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}, \quad QB = \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}}.$$

Считая, что $R \geq r$, запишем теорему Пифагора для треугольника PQC (здесь $QC \perp PA$):

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} - \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} \right)^2 + (2x)^2 = (R + r)^2 \\ \Leftrightarrow & R^2 - \frac{x^2}{4} + r^2 - \frac{x^2}{4} - 2\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} \cdot \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} + 4x^2 = R^2 + 2Rr + r^2 \\ \Leftrightarrow & \frac{7}{2}x^2 - 2Rr = 2\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} \cdot \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} \\ \Leftrightarrow & \frac{49}{4}x^4 - 14x^2Rr + 4R^2r^2 = 4R^2r^2 + \frac{x^4}{4} - x^2(R^2 + r^2) \\ \Leftrightarrow & 12x^4 + x^2(R^2 + r^2 - 14Rr) = 0, \end{aligned}$$

откуда и находим, что $x = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{14Rr - R^2 - r^2}$.

Ответ: $x = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{14Rr - R^2 - r^2}$. ◀

Урок окончен. Оценка по стандартным критериям.

Домашнее задание

1. Точка D лежит вне окружности. Из нее проведены к окружности касательная DB и секущая DCA (здесь указан порядок, в котором идут точки пересечения с окружностью). Известно, что $\angle BAC = 30^\circ$, $AC = 2$, $CD = 4$. Найти площадь треугольника BCD .
2. Окружность касается прямых AB и BC в точках D и E соответственно. При этом точка A лежит между точками B и D , а C — между точками B и E . Известно, что $AB = 13$, $AC = 1$ и точки A, D, E, C лежат на одной окружности. Найти площадь треугольника ABC .
3. [2]. В полукруг помещены две окружности диаметров d и D , где $d < D$. Обе окружности касаются друг друга, касаются дуги и диаметра полукруга. Через их центры проведена прямая, пересекающая продолжение диаметра в точке M . Пусть MN — касательная к дуге полукруга (N — точка касания). Найти длину отрезка MN .
4. Продолжение медианы треугольника ABC , проведенной из A , пересекает описанную около него окружность в точке D . Известно, что $AC = DC = 1$. Найти длину BC .

- 5. Дан квадрат со стороной 1. Пусть A — одна из его вершин, O — центр квадрата и M — середина отрезка AO . С центром M радиусом $\frac{5}{16}$ проведена окружность. Найти площадь части квадрата, лежащей вне окружности.
- 6. В треугольнике ABC каждая из сторон AB и BC равна 1. Точка H есть середина стороны AC и $BH = \frac{3}{4}$. Радиус круга равен $\frac{4}{5}$, центр его находится в точке B . Найти площадь общей части круга и треугольника ABC .
- 7. В треугольнике ABC имеем $AB = BC$, $\frac{r}{R} = k$, где r и R есть соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей. Считая число k известным, найти углы треугольника.
- 8. Известно, что AOB есть сектор круга радиуса r . Угол AOB равен $\alpha < \pi$. Найти радиус окружности, лежащей внутри этого сектора и касающейся хорды AB , дуги AB и биссектрисы угла AOB .
- 9 [2]. Вокруг равностороннего треугольника ABC описана окружность, и на дуге BC взята произвольная точка M . Доказать, что $AM = BM + CM$.
- 10. Дан ромб со стороной a и острым углом α . Найти радиус окружности, проходящей через две соседние вершины ромба и касающейся противоположной стороны или ее продолжения.
- 11. В окружности радиуса R проведены две взаимно перпендикулярные равные хорды MN и PQ . Известно, что $NQ = a$. Найти MP .
- 12. В треугольнике ABC угол B прямой, BE — биссектриса угла B (точка E лежит на стороне AC). Известно, что $BO/OE = \sqrt{3}/\sqrt{2}$, где O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Найти углы треугольника ABC .
- 13. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC , пересекает сторону AB в точке D и сторону BC в точке E . Известно, что $AD = 5$, $AC = 2\sqrt{7}$, $BE = 4$, $BD : CE = 3 : 2$. Найти угол CDB .
- 14. Площадь треугольника ABC равна $2\sqrt{3} - 3$, и $\angle BAC = 60^\circ$. Радиус окружности, касающийся стороны BC и продолжений сторон AB и AC равен 1. Найти углы ABC и ACB этого треугольника.
- 15. Центр O окружности лежит на стороне AB треугольника AMB , причем окружность касается сторон AM и MB . Известно, что $AO = 6$, $OB = 4$, $OM = 12$. Найти радиус окружности.
- 16. В окружности радиуса $\sqrt{6}$ проведены хорда MN и диаметр MP . В точке N проведена касательная к окружности, которая пересекает продолжение отрезка MP в точке Q под углом 60° . Найти медиану QD треугольника MQN .
- 17. Дан треугольник ABC с $AB = BC$ и $\angle BAC = \frac{\pi}{6}$. Построен круг радиуса $\frac{2}{\sqrt{3}}$ с центром в точке B . Длина медианы к боковой стороне

равна $\sqrt{7}$. Найти отношение площади общей части треугольника и круга к площади треугольника.

- 18. В треугольнике ABC периметр равен $2p$. Известно, что длина стороны AC равна a , а угол ABC равен $\alpha < 90^\circ$. Вписанная в треугольник ABC окружность имеет центр O и касается стороны BC в точке K . Найти площадь треугольника BOK .
- 19 [3]. Некоторая прямая, параллельная основаниям прямоугольной трапеции, пересекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Боковые стороны трапеции равны c и d , $c < d$. Найти ее основания.
- 20. В равнобокую трапецию, верхнее основание которой равно 1, вписана окружность радиуса 1. Найти площадь трапеции.
- 21. Около окружности единичного радиуса описана равнобокая трапеция, у которой одно основание вдвое больше другого. Найти среднюю линию трапеции.
- 22. В окружность радиуса 1 вписана трапеция, у которой нижнее основание вдвое больше, чем каждая из остальных сторон. Найти площадь трапеции.
- 23. Известно, что в трапецию $ABCD$ с основаниями $BC = 1$, $AD = 3$ можно вписать и вокруг нее можно описать окружность. Где находится центр описанной окружности (внутри трапеции, извне ее, или на ее стороне)?

Тот же вопрос, если $BC = 2$, $AD = 10$.

- 24. Периметр равнобокой трапеции, описанной около круга, равен P . Найти радиус этого круга, если острый угол при основании равен α .

Урок 32

Общие ≥ 4 -угольники

Этот урок задуман как тренировка на решение задач с применением всех пройденных методов. Помните, что если вам попала задача на произвольный четырехугольник, или многоугольник с большим числом сторон, то надо отыскать в нем такие треугольники, которые помогут упростить и решить задачу. Например, если ищется площадь произвольного пятиугольника, то уже никуда не деться от разбиения его на треугольники и нахождения их площадей. Конечно, необходимо найти оптимальное разбиение.

Хочу также обратить ваше внимание на то, что нами пройден ряд

свойств произвольных четырехугольников: формула площади через диагонали и угол между ними (напишите ее сами, пожалуйста!), условия вписанности и описанности четырехугольника, тот факт, что четырехугольник, составленный из середин сторон произвольного четырехугольника, является параллелограммом (задача 6, урок 30). Если вы их подзабыли, непременно повторите. А вот очередная порция новых свойств и формул.

1) Сумма углов произвольного выпуклого n -угольника равна $\pi(n-2)$.

2) Правильный n -угольник может быть вписан в окружность и описан около окружности.

3) Если a — сторона правильного n -угольника, то его площадь равна $\frac{1}{4}na^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$, радиус описанной около него окружности равен $R = \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$, радиус вписанной в него окружности равен $\frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$.

► **Задача 1.** Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром O . Доказать, что

$$\angle AOB + \angle COD = \pi.$$

Решение. Пусть K, L, M, N — точки касания окружности соответственно со сторонами AB, BC, CD и DA . Тогда $OK = OL = OM = ON$ как радиусы окружности. Треугольники KBO и BOL равны по катету и гипотенузе (общей). Значит, угол KOB равен углу BOL .

Аналогично, $\angle LOC = \angle COM$, $\angle MOD = \angle DON$, $\angle NOA = \angle AOK$. Наконец,

$$\begin{aligned} \angle AOB + \angle COD &= \angle AOK + \angle KOB + \angle COM + \angle MOD = \\ &= \frac{1}{2}(\angle BOK + \angle BOL) + \frac{1}{2}(\angle LOC + \angle COM) + \frac{1}{2}(\angle MOD + \angle DON) \\ &+ \frac{1}{2}(\angle NOA + \angle AOK) = \frac{1}{2}(\angle BOK + \angle BOL + \angle LOC + \angle COM + \angle MOD + \angle DON \\ &+ \angle NOA + \angle AOK) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

► **Задача 2.** Центр вписанной в четырехугольник окружности совпадает с точкой пересечения диагоналей. Доказать, что этот четырехугольник — ромб.

Решение. Пусть $ABCD$ — наш четырехугольник, диагонали AC и BD которого пересекаются в точке O , которая является также и центром вписанной окружности. Согласно предыдущей задаче, имеем $\angle AOB + \angle COD = \pi$. Но эти углы равны как вертикальные, так что каждый из них равен $\frac{\pi}{2}$. Значит, диагонали четырехугольника перпендикулярны. Кроме того, каждая из диагоналей является биссектрисой, так как центр вписанной в любой угол окружности лежит на биссектрисе этого угла. Следовательно, треугольники AOB и BOC равны по (общему) катету и острому углу. Значит, $AO = OC$. Аналогично, $BO = OD$, т.е. диагонали в точке пересечения делятся пополам. Отсюда следует, что $ABCD$ — параллелограмм с перпендикулярными диагоналями. Все четыре прямоугольных треугольника, на которые диагонали разбивают четырехугольник $ABCD$ равны между собой, так что равны и их гипотенузы, т.е. стороны четырехугольника $ABCD$, чем и доказано, что $ABCD$ — ромб.

- **Задача 3.** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны. Кроме того, вокруг него можно описать окружность. Из точек B и C опущены перпендикуляры на прямую AD . Они пересекают прямые AC и BD соответственно в точках E и F . Известно, что $BC = 1$. Найти длину отрезка EF .

Решение. Углы BFC и CAD являются углами с взаимно перпендикулярными сторонами (ибо $CF \perp AD$ и $CA \perp BF$). Значит, они либо равны, либо дополняют друг друга до 180° . Кроме того, угол CBD равен углу CAD как вписанный, опирающийся на одну с ним дугу. Следовательно, либо угол CFB равен углу CBF , либо он дополняет его до угла в 180° . Но такое в треугольнике CBF может случиться только, если точки B и F совпадают — ведь сумма двух углов треугольника не может равняться 180° . Если эти точки совпадают, то ясно, что $OB = OF$. В противном случае углы CBF и BFC равны. Отрезок CO , будучи высотой в равнобедренном треугольнике BCF , является и медианой, и опять получаем, что $OB = OF$. Точно так же доказывается, что $OE = OC$. Теперь осталось заметить, что

$$EF^2 = OF^2 + OE^2 = OB^2 + OC^2 = BC^2 = 1,$$

откуда находим, что $EF = 1$, что и требовалось.

Ответ: $EF = 1$. ◀

- **Задача 4.** Четырехугольник $KLMN$ вписан в окружность. Через его вершины проведены касательные к этой окружности, образующие также вписанный четырехугольник. Найти площадь четырехугольника $KLMN$, если его периметр равен p , и $MN = 2 \cdot ML = 8 \cdot KL$.

Решение. Для этой задачи нам понадобятся два рисунка.

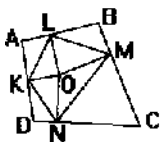


Рис. 1

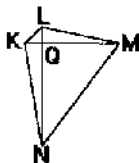


Рис. 2

На рисунке 1 точка O есть центр описанной окружности, AB, BC, CD и DA — касательные к ней. Углы AKO и ALO прямые, как углы между касательной и радиусом, проведенным в точку касания. Отсюда следует, что сумма углов KAL и KOL равна π . То же самое верно и для углов MON и MCN . В условии сказано, что четырехугольник $ABCD$ вписанный, так что $\angle LAK + \angle MCN = \pi$. Значит,

$$\angle KOL + \angle MON = (\pi - \angle KAL) + (\pi - \angle MCN) = 2\pi - \pi = \pi.$$

Углы MKN и LNK вписанные, опирающиеся на те же дуги, что и соответственно центральные углы MON и KOL . Следовательно,

$$\angle MKN = \frac{1}{2} \cdot \angle MON \text{ и } \angle LNK = \frac{1}{2} \cdot \angle LOK \Rightarrow$$

$$\angle MKN + \angle LNK = \frac{1}{2}(\angle MON + \angle LOK) = \frac{\pi}{2}.$$

Значит, треугольник KQN (см. рис. 2) прямоугольный, т.е. мы доказали, что у четырехугольника $KLMN$ диагонали перпендикулярны.

Пусть $KL = x$ и $KQ = a$, $LQ = b$. Тогда $LM = 4x$, $MN = 8x$. Треугольники KLQ и NMQ подобны как прямоугольные, имеющие равные острые углы KLQ и QMN (как вписанные, опирающиеся на одну дугу). Отсюда следует, что

$$\frac{LQ}{QM} = \frac{KQ}{QN} = \frac{KL}{MN} = \frac{1}{8} \Rightarrow QM = 8b, QN = 8a.$$

Записывая теорему Пифагора для треугольников KLQ и LQM , получаем

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = x^2 \\ b^2 + (8b)^2 = (4x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{4}{\sqrt{65}}x \\ a = \frac{7}{\sqrt{65}}x \end{cases}.$$

Треугольники KQN и LQM подобны, так что

$$\frac{KN}{LM} = \frac{KQ}{LQ} \Leftrightarrow \frac{KN}{4x} = \frac{a}{b} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow KN = 7x.$$

Поскольку периметр четырехугольника $KLMN$ нам известен, можно найти x :

$$x + 4x + 8x + 7x = p \Leftrightarrow x = \frac{p}{20}.$$

Площадь $KLMN$ равна половине произведения его диагоналей, т.е.

$$S = \frac{1}{2}(a + 8b)(b + 8a) = x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(4 + 56)(7 + 32)}{65} = 18x^2 = \frac{9p^2}{200},$$

что и требовалось.

Ответ: $\frac{9r^2}{200}$. ◀

- **Задача 5.** На диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ находится центр окружности радиуса r , касающейся сторон AB , AD и BC . На диагонали BD находится центр окружности того же радиуса r , касающейся сторон BC , CD и AD . Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если известно, что указанные окружности касаются друг друга внешним образом.

Решение. Заметим сначала, что стороны AD и BC нашего четырехугольника являются общими касательными к двум окружностям равного радиуса, так что они параллельны. Заметьте, что в этом месте мы пользуемся выпуклостью четырехугольника $ABCD$ — из нее следует, что если первая окружность вписана в угол BAD , то вторая окружность непременно касается прямой AD не в той же точке, что первая, ибо в противном случае центры окружностей и точка B , не могли бы находиться по одну сторону от прямой AD , как обьязаны согласно выпуклости $ABCD$.

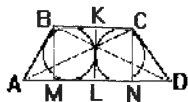


Рис. 3

Посмотрим на рисунок 3. Центр первой окружности лежит на диагонали AC . Значит, AC — биссектриса угла BAD . Поэтому $\angle BAC = \angle CAD = \angle ACB$ (последнее равенство верно, так как углы CAD и BCA — внутренние накрест лежащие). Тем самым, треугольник ABC равнобедренный и $AB = BC$. Аналогично, $BC = CD$, т.е. $AB = CD$ и наша трапеция является равнобедренной. Пусть $AB = BC = CD = x$. Проведем третью общую касательную KL к окружностям. Она будет перпендикулярна основаниям и разделит их пополам (докажите это сами). Точки M и N взяты на стороне AD так, что $BM \perp AD$ и $CN \perp AD$. Тогда $AL = \sqrt{x^2 - 4r^2} + \frac{x}{2}$, $BK = \frac{x}{2}$, $KL = 2r$. Из описанности четырехугольника $ABKL$ следует, что

$$AB + KL = AL + BK \iff x + 2r = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 4r^2} \iff x = 2\sqrt{2}r.$$

Мы нашли основание BC . Основание AD находится теперь легко:

$$AD = AM + MN + ND = x + 2\sqrt{x^2 - 4r^2} = 4r + 2\sqrt{2}r.$$

Искомая площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot (4r + 2\sqrt{2}r + 2\sqrt{2}r) = 4(1 + \sqrt{2})r^2$.

Ответ: $4(1 + \sqrt{2})r^2$. ◀

- **Задача 6.** В равностороннем (неправильном) пятиугольнике $ABCDE$ угол ABC вдвое больше угла DBE . Найти величину угла ABC .

Решение. Из $\angle ABC = 2 \cdot \angle DBE$ следует, что $\angle DBE = \angle CBD + \angle ABE$. Возьмем такую точку P на стороне DE , что $\angle PBE = \angle ABE$. Тогда $\angle PBD = \angle CBD$.

Треугольник ABE равнобедренный, так что углы ABE и AEB равны. Из равенства углов AEB и PBE следует, что $BP \parallel AE$ (по обратной теореме о внутренних накрест лежащих углах). Аналогичным образом $CD \parallel BP$ и мы доказали, что стороны AE и CD параллельны. Следовательно, $AEDC$ — параллелограмм и $AC = DE$.

Теперь уже видно, что треугольник ABC равносторонний, и, тем самым, угол ABC равен 60° .

Ответ: 60° . ◀

- **Задача 7** [2]. Известно, что в выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ сторона AE равна $\sqrt{3}$. Отрезок BE является биссектрисой угла CEA , а отрезок AD есть биссектриса угла CAE . Кроме того, $BC = 1$, $AD = 2$ и вокруг четырехугольника $ABCE$ можно описать окружность радиуса 1. Найти площадь пятиугольника $ABCDE$.

Решение. Окружность радиуса 1 описана, в частности, около треугольника AEC . По теореме синусов имеем

$$\frac{AE}{2 \sin \angle ACE} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \angle ACE} = 1 \Leftrightarrow \sin \angle ACE = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \angle ACE = \frac{\pi}{3}.$$

Точно так же, применяя теорему синусов к треугольнику ABC , вписанному в ту же окружность, найдем, что $\angle BAC = \frac{\pi}{6}$. Угол CEB равен углу CAB как вписанный, опирающийся на ту же дугу. Значит, $\angle CEB = \angle BEA = \frac{\pi}{6}$, поскольку BE — биссектриса угла CEA . Раз в треугольнике ACE два угла равны 60° , то и третий таков же, так что этот треугольник равносторонний.

Углы BCA и BEA равны, как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Значит, угол BCA равен 30° , т.е. треугольник ABC равнобедренный и $AB = BC = 1$. Кроме того, угол BAE равен сумме углов BAC и CAE , т.е. 90° .

Угол DAE можно найти, так как AD — биссектриса угла CAE , равного 60° . Следовательно, угол DAE равен $\frac{\pi}{6}$. С помощью теоремы косинусов находим, что

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2 \cdot AD \cdot AE \cdot \cos \angle DAE = 4 + 3 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 1 \Leftrightarrow DE = 1.$$

Из $AE^2 + DE^2 = AD^2$ следует, что угол AED прямой.

Мы доказали, что $ABDE$ — прямоугольник со сторонами 1 и $\sqrt{3}$. Треугольник ACD равен треугольнику AED по двум сторонам (сторона AD общая и $AC = AE = \sqrt{3}$) и углу между ними. Значит, CD тоже равно 1.

Площадь пятиугольника $ABCDE$ складывается из площади прямоугольника $ABDE$, равной $1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$, и площади треугольника BCD , в котором мы знаем все стороны — они равны 1, 1 и $\sqrt{3}$.

Ответ: $\frac{5}{4}\sqrt{3}$. ◀

- **Задача 8.** Шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ вписан в окружность. Найти $\angle A_1 + \angle A_3 + \angle A_5$.

Решение. Четырехугольник $A_1A_2A_4A_6$ также вписан в окружность. Значит, $\angle A_1 = \pi - \angle A_2A_4A_6$. Аналогично, $\angle A_3 = \pi - \angle A_4A_6A_2$ и $\angle A_5 = \pi - \angle A_6A_2A_4$. Отсюда следует, что искомая сумма равна 3π минус сумма углов треугольника $A_2A_4A_6$, т.е. она равна 2π .

Ответ: 2π . ◀

- **Задача 9.** Дан правильный семиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Найти отношение площадей четырехугольника $A_1A_2A_3A_7$ и пятиугольника $A_3A_4A_5A_6A_7$.

Решение. Площадь всего семиугольника равна $\frac{7}{4}a^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7}$, где a — его сторона. Площадь четырехугольника $A_1A_2A_3A_7$ равна сумме площадей треугольников $A_1A_2A_3$ и $A_1A_3A_7$. Каждый из углов семиугольника равен $\frac{5}{7}\pi$ (почему?), так что площадь треугольника $A_1A_2A_3$ равна $\frac{1}{2}a^2 \sin \frac{5}{7}\pi$.

Найдем углы треугольника $A_1A_3A_7$. Правильные многоугольники можно вписать в окружность, так что можно считать вписанным и наш семиугольник. Тогда угол $A_1A_3A_7$ равен половине центрального, опирающегося на дугу A_1A_7 . Дуги, соответствующие сторонам семиугольника, равны между собой. Следовательно, соответствующий центральный угол равен $\frac{2\pi}{7}$. Тем самым, угол $A_1A_3A_7$ равен $\frac{\pi}{7}$. Угол $A_1A_7A_3$ опирается на вдвое большую дугу $A_1A_2A_3$, и потому равен $\frac{2}{7}\pi$. Наконец, угол $A_3A_1A_7$ равен $\frac{4}{7}\pi$. Сторону A_1A_3 найдем по теореме синусов:

$$\frac{A_1A_3}{\sin \frac{2}{7}\pi} = \frac{a}{\sin \frac{\pi}{7}} \iff A_1A_3 = \frac{a \sin \frac{2}{7}\pi}{\sin \frac{\pi}{7}}.$$

И, наконец, площадь треугольника $A_1A_3A_7$ равна

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{\sin \frac{2}{7}\pi}{\sin \frac{\pi}{7}} \sin \frac{4\pi}{7} = a^2 \cos \frac{\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7}.$$

Площадь четырехугольника $A_1A_2A_3A_7$ равна

$$\frac{1}{2}a^2 \sin \frac{5\pi}{7} + a^2 \sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} = a^2 \cos^2 \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7},$$

я воспользовался для упрощения выражения формулами $\sin \frac{5}{7}\pi = \sin \frac{2}{7}\pi = 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7}$, формулами суммы синусов, а также тем, что $\sin \frac{4}{7}\pi = \sin \frac{3}{7}\pi$.

Ввиду того, что площадь пятиугольника $A_3A_4A_5A_6A_7$ равна разности площадей семиугольника и четырехугольника $A_1A_2A_3A_7$, получаем

Ответ: $\frac{\cos^2 \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7}}{\frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7} - \cos^2 \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7}}$. ◀

Наш урок окончен. Оценка снова выставляется по стандартным критериям.

Домашнее задание

- 1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы ABD и ACD равны $\frac{\pi}{2}$. Известно, что $AD = 2$, и расстояние от точки пересечения биссектрис в треугольнике ABD до точки пересечения биссектрис в треугольнике ACD равно $\sqrt{2}$. Найти длину стороны BC .
- 2. Известно, что в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол ACD равен 60° , $AD = 7$, $BC = 3$. Точки A , B , C , D лежат на одной окружности. Перпендикуляр из точки A на прямую CD делит угол BAD пополам. Найти длину диагонали AC .
- 3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжение стороны AB за точку B пересекает продолжение стороны DC за точку C в точке E . Известно, что $AB = 2$, $BD = 2\sqrt{6}$, $CD = 5$, $BE/EC = 4 : 3$. Найти угол BAD .
- 4. В выпуклом четырехугольнике $NPQM$ сторона NP равна b . Точка A лежит на стороне PQ , а точка B — на стороне NM . Отрезок AB разбивает четырехугольник $NPQM$ на два четырехугольника, в каждый из которых можно вписать окружность. Известно, что разность периметров четырехугольников $BAQM$ и $ABNP$ равна $2r$. Найти сторону MQ .
- 5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Площади треугольников BOC , COD и AOD равны соответственно 20, 40 и 60. Кроме того, $AO = 8$, $AB = 15$, $\angle BOA > 31^\circ$. Найти угол BAO .
- 6. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Площади треугольников ABE и DCE равны 1, а площадь четырехугольника $ABCD$ не превосходит 4. Найти BC , если $AD = 3$.
- 7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ имеем $AB = 3$, $BD = \sqrt{7}$, причем угол BCD равен 120° . Кроме того, площадь четырехугольника $ABCD$ равна $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot AD)$. Найти длину стороны AD .
- 8. В окружность радиуса 7 вписан четырехугольник $ABCD$, для которого

$$AB = BC, \quad \frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = 2, \quad \angle ADC = 120^\circ.$$

Найти все стороны четырехугольника $ABCD$.

- 9. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектриса угла ABC пересекает сторону AD в точке M , причем $AM = 2 \cdot MD$. Перпендикуляр, опущенный из вершины A на прямую BC , делит отрезок BC пополам. Найти все стороны и площадь четырехугольника $ABCD$, если его периметр равен $5 + \sqrt{3}$, угол BAD прямой и угол ABC равен 60° .

- 10. В окружность радиуса 2 вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Из точки K , лежащей на продолжении AF ($KA < KF$), $KA = \sqrt{11} - 1$, проведена секущая KH , пересекающая окружность в точках N и H . Ее внешняя часть KN равна 2, и угол NFH тупой. Найти угол HKF .
- 11. Выразить сторону правильного десятиугольника через радиус описанной окружности.
- 12. Один правильный шестиугольник вписан в окружность, другой описан около нее. Найти радиус окружности, если разность их периметров равна a .
- 13. В круг радиуса R вписан шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что

$$\angle BAF = \angle BCD = \angle DEF, AB = a, CD = b, EF = c.$$

Найти площадь шестиугольника.

- 14. Найти площадь пятиугольника, ограниченного прямыми BC, CD, AN и MA , где A, B, D — три вершины квадрата $ABCD$ со стороной a , N — середина BC , точка M лежит на стороне CD , причем $CM : MD = 2 : 1$.
- 15. Правильный шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность радиуса R . Найти радиус круга, вписанного в треугольник ACD .
- 16. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность, причем

$$BD \parallel AE, \angle CAE = 2 \cdot \angle CEA, \angle CBD - \angle CDB = a.$$

Для треугольника ACE найти отношение радиуса вписанной окружности к периметру.

- 17. Семиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ вписан в окружность, центр которой лежит внутри него. Доказать, что $\angle A_1 + \angle A_3 + \angle A_5 < 450^\circ$.
- 18. В правильном шестиугольнике со стороной 5 на одной из сторон взята точка A на расстоянии 1 от ближайшей вершины шестиугольника. Найти расстояние от точки A до центра шестиугольника.
- 19. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Точки $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD, DE, EF, FA . Сторона шестиугольника равна a , причем

$$AA_1/A_1B = 1, BB_1/B_1C = 1 : 2, CC_1/C_1D = 1 : 3, DD_1/D_1E = 1 : 4,$$

$$EE_1/E_1F = 1 : 5, FF_1/F_1A = 1 : 6.$$

Найти площадь шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

- 20 [3]. Прямая проходит через центр правильного n -угольника. Доказать, что сумма квадратов расстояний от вершин многоугольника до этой прямой не зависит от выбора прямой (проходящей через центр) и найти эту сумму.

Урок 33

Геометрические места точек

Геометрическим местом точек с данным свойством называется множество всех точек плоскости, обладающих этим свойством. Геометрические места точек можно рассматривать и в пространстве. Это будет сделано в главе «Стереометрия».

Вступительные задачи письменного экзамена на геометрические места точек (далее пишем сокращенно ГМТ) в последнее время встречаются редко. Однако, из программ эта тема не исключена, так что разобрать ее имеет смысл. Для тех абитуриентов, которым предстоит сдавать устный экзамен, эта тема вполне актуальна — дополнительные задачи на ГМТ — практически непременный атрибут каждого устного экзамена.

В решении задачи на ГМТ должны присутствовать три момента:

- 1) предъявлено множество P , про которое мы утверждаем, что оно — искомое;
- 2) доказано, что каждая точка множества P обладает заданным свойством;
- 3) доказано, что нет других точек, обладающих данным свойством.

Три важнейшими ГМТ являются следующие:

- а) ГМТ, равноудаленных от точек A и B — это прямая, перпендикулярная к отрезку AB и проходящая через его середину;
- б) ГМТ, удаленных на расстояние R от данной точки O — это окружность радиуса R с центром в точке O ;
- в) ГМТ, из которых данный отрезок AB виден под данным углом α (под этим для краткости понимается множество таких точек M , что угол AMB равен α) — это объединение двух дуг окружностей радиуса $R = \frac{AB}{2 \sin \alpha}$ с центрами на серединном перпендикуляре к отрезку AB , лежащими на расстоянии $R \cos \frac{\alpha}{2}$ от прямой AB (см. рис. 1), симметричных относительно прямой AB (точки A и B не принадлежат этому множеству).

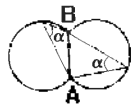


Рис. 1

В частности, ГМТ, из которых данный отрезок виден под прямым углом есть окружность, построенная на этом отрезке как на диаметре.

Если мы знаем ГМТ, M_1 , определяемое свойством P_1 и ГМТ M_2 , определяемое свойством P_2 , то ГМТ, для которых одновременно выполняются

свойства P_1 и P_2 , есть пересечение множеств M_1 и M_2 .

Общих рецептов нахождения ГМТ дать невозможно. Как правило, можно понять, как устроено искомое ГМТ, если разбить данное свойство на более простые, найти соответствующие более простые ГМТ и из них построить искомое. Иногда удается удачно ввести систему координат и записать данное свойство в виде формулы $f(x, y) = 0$. В этом случае помогут методы из урока 25. Иногда нужно просто угадать хорошую геометрическую закономерность, присутствующую в данном свойстве.

- **Задача 1.** Найти геометрическое место середин отрезков с концами на двух данных прямых (предполагается, что прямые не совпадают, концы каждого из отрезков лежат на разных прямых и никакой отрезок не выражается в точку).

Решение. Здесь необходимо рассмотреть два случая.

Случай 1. Данные прямые k и l параллельны. Пусть дана произвольная точка M , принадлежащая искомому ГМТ. Ясно, что она лежит между прямыми k и l . Тогда найдутся точки A и B на прямых k и l соответственно, такие, что M есть середина отрезка AB . Проведем через точку M произвольную прямую, не совпадающую с прямой AB и не параллельную прямым k и l . Пусть она пересечет прямую k в точке K , а прямую l — в точке L .

Треугольники BML и AKM равны по второму признаку (ибо $AM = MB$, $\angle KMA = \angle BML$, как вертикальные, и $\angle KAM = \angle MBL$, как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых).

Отсюда следует, что высоты, опущенные из точки M в наших треугольниках равны, т.е. равны расстояния от M до прямых k и l . Теперь уже можно предъявить искомое множество. Пусть t — какая-нибудь прямая, перпендикулярная прямым k и l . Она пересекает эти прямые в точках P и Q соответственно. Серединный перпендикуляр d к отрезку PQ и будет искомым ГМТ.

Действительно, пусть M принадлежит искомому ГМТ. Мы доказали, что расстояния от M до прямых k и l равны. Если мы проведем через точку M общий перпендикуляр к прямым k и l , пересекающий их соответственно в точках M_k и M_l , то M будет серединой отрезка $M_k M_l$. Отрезки PO (где O — середина PQ) и MM_k параллельны как перпендикуляры к одной прямой и равны как равные половине расстояния между параллельными прямыми. Значит, $OMM_k P$ — параллелограмм. Из $OP \perp k$ следует, что $OMM_k P$ прямоугольник, т.е. $OM \perp PQ$ и мы доказали, что $M \in d$.

С другой стороны, каждая точка d принадлежит искомому ГМТ. Действительно, пусть $M \in d$. Проведем через M общий перпендикуляр к прямым k и l , пересекающий эти прямые соответственно в точках K и L . Тогда M будет серединой отрезка KL , ибо $MKPO$ и $MLQO$ — прямоугольники,

и, значит,

$$MK = PO = OQ = MP,$$

что и требовалось доказать. Случай первый разобран полностью.

Случай 2. Прямые k и l пересекаются в точке O .

Я утверждаю, что искомое ГМТ будет содержать все точки плоскости, не совпадающие с точкой O . Докажем вначале, что точка O не принадлежит нашему ГМТ. Действительно, пусть точка A лежит на прямой k , а точка B — на прямой l так, что O есть середина отрезка AB . Но точка B лежит на прямой AO , совпадающей с прямой k (ибо A и O — две различные точки прямой AO , принадлежащие k). Значит, и точка B лежит на прямой k и получилось, что несовпадающие прямые k и l пересекаются в двух различных точках O и B — противоречие.

Пусть теперь $M \neq O$ — произвольная точка плоскости. Если M лежит на одной из прямых, пусть, например, на прямой k , то M есть середина отрезка ON , где $N \in k$ есть вторая точка пересечения с прямой k окружности радиуса MO с центром в точке M .

Предположим, что M лежит внутри одного из четырех углов, на которые разбивают плоскость прямые k и l . Проведем через точку M прямые, параллельные прямым k и l . Пусть первая из них пересечет прямую l в точке L , а вторая пересечет прямую k в точке K . Четырехугольник $OKML$ — параллелограмм. Значит, отрезок OM делится пополам второй диагональю KL полученного параллелограмма. Проведем прямую $K'L'$, параллельную KL через точку M (K' и L' — точки пересечения этой прямой с прямыми k и l соответственно). Простое рассуждение с использованием подобия (проведите его сами!) показывает, что $K'M = ML'$, т.е. точка M принадлежит искомому ГМТ и задача полностью решена.

Ответ: если данные прямые параллельны, то искомое ГМТ есть прямая, параллельная им обеим, являющаяся серединным перпендикуляром к любому отрезку с концами на данных прямых и им перпендикулярному;

если прямые пересекаются в точке O , то искомое ГМТ есть вся плоскость без точки O . ◀

► **Задача 2.** Дан треугольник ABC . Найти ГМТ M таких, что площади треугольников ABM и BMC равны.

Решение. У треугольников ABM и BMC общая сторона BM . Значит, площади их равны если и только если равны высоты, опущенные на прямую BM . Мы доказали, что наша задача эквивалентна поиску такого ГМТ M , что расстояние от точки A до прямой BM равно расстоянию от точки C до прямой BM .

Возможны два случая: прямая BM параллельна прямой AC , или прямые AC и BM пересекаются.

Ясно, что если провести прямую, параллельную прямой AC , то для любой точки M на этой прямой расстояния до прямой BM от точек A и C равны. Таким образом вся эта прямая (кроме точки B , ибо тогда бессмысленно говорить о треугольнике ABM) принадлежит искомому ГМТ.

Пусть теперь прямая BM пересекается с прямой AC в точке D , и отрезки CC_1 , AA_1 — перпендикуляры, опущенные соответственно из точек C и A на прямую BM . Эти перпендикуляры по предположению равны. Если точки A и C лежат по одну сторону от прямой BM , то из $AA_1 = CC_1$ следует, что $AC \parallel BM$ (нарисуйте сами картинку и докажите этот факт) — противоречие. Значит, точки A и C лежат по разные стороны от прямой BM и точка D принадлежит интервалу AC . Прямоугольные треугольники AA_1D и CC_1D равны по катету и острому углу, так что $AD = DC$. Значит, все точки нашего множества лежат либо на прямой, проходящей через B параллельно AC , либо на прямой, содержащей B и середину D отрезка AC .

Доказательство того, что все точки этой прямой, кроме B годятся, совсем просто — надо лишь доказать, что расстояния от точек A и C до этой прямой равны. А это следует из равенства прямоугольных треугольников AA_1D и CC_1D по гипотенузе ($AD = DC$) и острому углу ($\angle ADA_1 = \angle CDC_1$).

Ответ: искомое ГМТ состоит из всех не совпадающих с B точек объединения двух прямых: прямой, проходящей через B параллельно AC и прямой, содержащей медиану BD треугольника ABC . ◀

- **Задача 3.** Найти геометрическое место середин хорд данной окружности, проходящих через данную точку A внутри окружности.

Решение. Пусть O — центр окружности. Если точка A совпадает с O , то ясно, что наше ГМТ будет состоять только из точки A . Предположим теперь, что $A \neq O$. Если M — середина какой-либо хорды, проходящей через точку A , то отрезок OM перпендикулярен данной хорде. Отсюда следует, что искомое ГМТ лежит в множестве точек, из которых отрезок AO виден под прямым углом, т.е. на окружности, построенной на AO как на диаметре.

Обратно, пусть точка M принадлежит окружности, построенной на AO как на диаметре. Если M не совпадает ни с одной из точек A и O , то угол AMO прямой. По известной школьной теореме, тогда M будет серединой хорды, содержащей отрезок AM (это, впрочем, легко доказывается с помощью теоремы Пифагора — если P и Q точки пересечения прямой MA с окружностью, то $PM = \sqrt{R^2 - OM^2} = MQ$).

Ясно, что точки A и O входят в искомое ГМТ, ибо O — середина диаметра, проходящего через точку A , а A — середина хорды, проходящей через A и перпендикулярной к OA .

Ответ: окружность, построенная на отрезке, соединяющем центр окружности с точкой A как на диаметре, если точка A отлична от центра окружности; если A совпадает с центром, то искомое ГМТ состоит только из точки A . ◀

- **Задача 4** [2]. Дан прямоугольник $ABCD$. Найти ГМТ X таких, что $AX + BX = CX + DX$.

Решение. Пусть l — прямая, проходящая через середины сторон AD и BC . Если точка X не лежит на прямой l , то пусть, например, она лежит по одну сторону от l с точками A и B . Если X лежит на прямой BC , то ясно, что $CX > BX$. Если точка X не лежит на прямой BC , то BCX — треугольник. Пусть прямая l пересекает отрезок CX в точке Y . Углы YCB и YBC равны, при этом угол YBC лежит внутри угла XBC . Значит, угол XBC больше угла XCB . Против большего угла лежит большая сторона, так что $CX > BX$. Аналогично доказывается, что $DX > AX$. Значит, и $AX + BX < CX + DX$. Мы доказали, что ни одна точка искомого ГМТ не может лежать вне прямой l (случай, когда она лежит по одну сторону от l с точками A и D рассматривается точно так же).

Но, если точка X лежит на прямой l , то, очевидно, что $AX = XD$ и $BX = XC$, откуда следует, что $AX + BX = CX + DX$, т.е. прямая l есть искомое ГМТ.

Ответ: прямая, проходящая через середины сторон AD и BC . ◀

- **Задача 5.** На плоскости даны точки A и B . Найти ГМТ M , для которых разность квадратов длин отрезков AM и BM равна k .

Решение. Введем на плоскости систему декартовых координат с центром в середине отрезка AB , осью Ox совпадающей с прямой AB , а осью Oy ей перпендикулярной. Пусть $2a$ — длина отрезка AB . Тогда точка A имеет координаты $(-a, 0)$, а точка B — координаты $(a, 0)$. Точка M , имеющая координаты (x, y) , принадлежит искомому ГМТ если и только если

$$AM^2 - BM^2 = k \iff ((x+a)^2 + y^2) - ((x-a)^2 + y^2) = k \iff x = \frac{k}{4a}.$$

Полученное уравнение задает в точности наше ГМТ, так как переход к нему от исходной задачи осуществлялся равносильным образом.

Ответ: прямая, перпендикулярная отрезку AB и пересекающая прямую AB в точке, лежащей на расстоянии $\frac{|k|}{2AB}$ от середины AB ; при этом точка пересечения лежит слева от середины AB , если $k < 0$ и справа, если $k > 0$. Если $k = 0$, то искомое ГМТ есть серединный перпендикуляр к AB . ◀

- **Задача 6** [2]. Дана окружность. Найти геометрическое множество центров окружностей, вписанных в треугольники, вписанные в эту окружность.

Решение. Ясно, что искомое ГМТ лежит внутри окружности. Докажем, что каждая внутренняя точка круга принадлежит нашему ГМТ. Пусть O — центр круга, и M — произвольная точка в нем. Если M — центр круга, то он является центром вписанной окружности для любого правильного треугольника, вписанного в исходную окружность, так что в этом случае точка M принадлежит искомому ГМТ. Если M не совпадает с центром, то существует единственный диаметр $BMON$, содержащий точку M (B и N точки окружности, причем написание $BMON$ показывает порядок, в котором точки лежат на диаметре BN). Отрезок MN имеет длину строго меньшую, чем диаметр окружности. Поэтому окружность радиуса MN с центром в точке N пересекает нашу окружность в двух точках A и C .

Я утверждаю, что треугольник ABC искомый. Не вызывает сомнений, что он вписан в окружность. Надо доказать лишь, что M есть центр его вписанной окружности, или, что то же самое, точка пересечения биссектрис.

По построению имеем $AN = NC$. Треугольники AOC и CON равны по трем сторонам (т.к. $AO = OC$ как радиусы, ON — общая сторона, и уже отмечено, что $AN = NC$). Значит, угол ONA равен углу ONC . Пусть K — точка пересечения диаметра MN со стороной AC . Треугольники CBN и BNK равны по первому признаку. Значит, мы доказали, что $AB = BC$. Кроме того, в равнобедренном треугольнике ANC биссектриса MK является высотой, т.е. $BK \perp AC$. В равнобедренном треугольнике ABC высота BK есть и биссектриса, так что M лежит на одной из биссектрис. Достаточно теперь доказать, что AM — биссектриса угла BAC .

Угол $BAN = 90^\circ$ как вписанный, опирающийся на диаметр. Пусть

$$\angle BNC = \angle BNA = \alpha.$$

Тогда и угол BAC равен α , как опирающийся на одну дугу с углом BNC . Треугольник ANM равнобедренный ($MN = NA$) по построению. Значит, угол AMN равен $\frac{\pi - \alpha}{2}$. Треугольник MAK прямоугольный, так что угол MAK равен

$$\frac{\pi}{2} - \angle AMK = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

т.е. равен половине угла BAK , равного α , что и требовалось доказать.

Итак, M — центр вписанной окружности треугольника ABC и, ввиду произвольности точки M , искомое ГМТ совпадает со всей внутренностью круга.

Ответ: искомое ГМТ есть внутренность данного круга. ◀

- **Задача 7** [3]. Дана окружность. Найти геометрическое множество точек пересечения высот треугольников, вписанных в эту окружность.

Решение. Пусть R — радиус данной окружности, O — ее центр. Докажем, что если ABC — какой-нибудь вписанный в нее треугольник, то расстояние

от O до точки пересечения высот треугольника ABC строго меньше, чем $3R$.

Если треугольник ABC остроугольный, то точка пересечения его высот лежит внутри него, а, значит, и внутри окружности, так что расстояние от нее до центра будет меньше R .

Предположим, что угол B — тупой. Обозначим точку пересечения высот через M , пусть также G — середина стороны AC , точка H есть основание перпендикуляра, опущенного из B на AC и $OF \perp MH$ (см. рис. 2). Мы будем применять обычные обозначения для сторон и углов треугольника ABC (например, $a = BC$, $B = \angle ABC$ и т.п.).

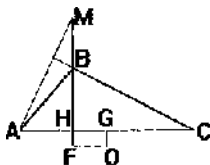


Рис. 2

Длину отрезка OM найдем из теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника MFO . Имеем

$$AH = AB \cdot \cos \angle BAC = c \cos A \Rightarrow MH = AH \operatorname{ctg} \angle AMH = c \cos A \operatorname{ctg} C,$$

так как $\angle AMH = \frac{\pi}{2} - \angle MAH = C$.

Угол AOC — центральный, опирающийся на дугу AC . Он в два раза больше соответствующего вписанного угла, равного $\pi - B$ как опирающегося на ту же дугу, что и угол B , но со стороны точки O . Поэтому угол AOC равен $2\pi - 2B$, откуда следует, что угол AOG равен $\pi - B$. Отсюда

$$HF = GO = AO \cos(\pi - B) = R \cos(\pi - B) = -R \cos B.$$

Аналогично, $HG = AG - AH = R \sin B - c \cos A$. Вспомнив, что по теореме синусов $c = 2R \sin C$, выразим длины нужных нам отрезков через R :

$$MF = 2R \cos A \cos C - R \cos B, \quad OF = R \sin B - 2R \sin C \cos A.$$

Применяем теорему Пифагора:

$$\begin{aligned} OM^2 &= (2R \cos A \cos C - R \cos B)^2 + (R \sin B - 2R \sin C \cos A)^2 = \\ &= 4R^2 \cos^2 A \cos^2 C + R^2 \cos^2 B - 4R^2 \cos A \cos B \cos C + \\ &\quad + R^2 \sin^2 B + 4R^2 \sin^2 C \cos^2 A - 4R^2 \sin B \sin C \cos A = \\ &= R^2 + 4R^2 \cos^2 A - 4R^2 \cos A \cos(B - C) < 9R^2, \end{aligned}$$

ибо каждое из последних двух слагаемых строго меньше, чем $4R^2$. Мы доказали, что $OM^2 < 9R^2 \iff OM < 3R$. Отсюда следует, что искомое ГМТ лежит внутри круга радиуса $3R$ с центром в точке O .

Мы сейчас докажем, что КАЖДАЯ ТОЧКА круга радиуса $3R$ с центром в точке O принадлежит нашему ГМТ.

Берем произвольную точку M из указанного круга. Ясно, что, если $M = O$, то M принадлежит нашему ГМТ, так что считаем, что M не совпадает с центром круга. Обозначим длину отрезка OM через a .

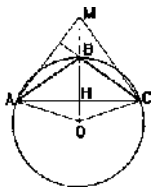


Рис. 3

Случай 1. Точка M лежит вне первоначального круга, т.е. $a > R$.

На отрезке OM возьмем точку H такую, что $OH = \frac{a-R}{2}$. Заметим, что точка H лежит внутри круга, т.к. $a < 3R$. Проведем через H хорду AC , перпендикулярную OM . Пусть B — точка пересечения OM с окружностью. Тогда точка пересечения высот треугольника ABC совпадает с M (см. рис. 3).

Ясно, что M лежит на высоте BH . Достаточно (ввиду того, что высоты пересекаются в одной точке) доказать, что $AM \perp BC$. Это равносильно тому, что

$$\angle BCA + \angle MAC = 90^\circ \iff \angle BAC = \angle AMH,$$

ввиду того, что углы BAC и BCA равны, а сумма углов AMH и MAN равна 90° . Исследуемые углы острые, так что достаточно доказать равенство их тангенсов.

Но $\operatorname{tg} \angle BAN = \frac{HB}{AH}$ и $\operatorname{tg} \angle AMH = \frac{AH}{HM}$. Равенство $\frac{HB}{AH} = \frac{AH}{HM}$ равносильно тому, что $AH^2 = HB \cdot HM$.

По теореме Пифагора $AH^2 = R^2 - \left(\frac{a-R}{2}\right)^2 = \frac{(R+a)(3R-a)}{4}$. Имеем

$$HB = R - \frac{a-R}{2} = \frac{3R-a}{2}, \quad MH = a - \frac{a-R}{2} = \frac{a+R}{2},$$

и уже видно, что требуемое равенство выполняется.

Случай 2. Точка M лежит на окружности. Тогда, если AC — диаметр, перпендикулярный OM , то M есть точка пересечения высот треугольника AMC — это очевидно.

Случай 3. Точка M лежит внутри круга. Тогда $a = OM < R$. Продолжив отрезок OM за точку O , выберем на этом продолжении точку N такую, что $ON = \frac{R-a}{2}$. Пусть AC — хорда, перпендикулярная OM и содержащая H , и B — точка пересечения луча OM с окружностью. Точно так же, как в Случае 1, доказывается, что M есть точка пересечения высот треугольника ABC .

Ответ: искомое ГМТ есть внутренность круга, радиус которого равен трем радиусам данного и центр совпадает с центром исходного круга. ◀

- **Задача 8.** На плоскости даны две различные точки A и D . Найти геометрическое место вершин C всевозможных трапеций $ABCD$ таких, что $AD \parallel BC$ и длины сторон AB и BC равны наперед заданным числам p и q .

Решение. Пусть точка C принадлежит искомому ГМТ. Тогда найдется точка B такая, что $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC . Проведем через точку C прямую, параллельную прямой AB . Она пересечет прямую AD в точке E . Ясно, что $ABCE$ — параллелограмм, так что $AE = q$. При этом точка E обязана лежать с той же стороны от точки A , что и точка D , ибо в противном случае трапеция получится самопересекающейся. Такая

точка E определяется однозначно. Сторона CE равна p . Отсюда следует, что все точки искомого ГМТ лежат на окружности радиуса p с центром в точке E .

Любая ли точка этой окружности принадлежит ГМТ? Ясно, что точка C не может лежать на прямой AD . Пусть C — любая точка окружности, не лежащая на AD . Проведем через C прямую параллельно AD и через A прямую, параллельно EC , которая пересечет первую прямую в точке B . Тривиально проверяется, что $ABCD$ — трапеция, такая, как требуется в определении ГМТ.

Ответ: пусть E — точка, лежащая на луче AD такая, что $AE = p$; искомое ГМТ состоит из всех точек окружности радиуса p с центром в точке E , не лежащих на прямой AD . ◀

- **Задача 9** [2]. Найти ГМТ, произведение расстояний от которых до двух противоположных сторон квадрата равно произведению расстояний до двух других противоположных сторон.

Решение. Здесь тоже эффективно работает метод координат. Примем за точку отсчета одну из вершин квадрата, а за координатные оси — его стороны, проходящие через выбранную точку. Пусть точка M с координатами (x, y) принадлежит искомому ГМТ. Расстояние до оси Oy равно $|x|$ (это одна из сторон квадрата), а расстояние до противоположной стороны равно $|x - a|$ (где a — длина стороны квадрата) (нарисуйте чертеж и убедитесь в этом, разобрав случаи, когда x и $x - a$ принимают всевозможные знаки). Расстояния до другой пары сторон равны $|y|$ и $|y - a|$.

По условию, имеем уравнение

$$|x||x - a| = |y||y - a| \iff x^2(x - a)^2 = y^2(y - a)^2.$$

Используя формулу для разности квадратов и группировку, преобразуем полученное уравнение:

$$\begin{aligned} (x(x - a) - y(y - a))(x(x - a) + y(y - a)) &= 0 \\ \updownarrow \\ (x - y)(x + y - a) \left(\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Все преобразования были эквивалентными, так что наше ГМТ есть объединение двух прямых и окружности.

Ответ: прямые, содержащие диагонали квадрата и окружность, описанная вокруг него. ◀

- **Задача 10.** Даны две различные точки A и B и положительное число $k \neq 1$. Найти ГМТ M таких, что $\frac{AM}{MB} = k$.

Решение. Пусть длина отрезка AB равна a . Примем точку A за начало координат и прямую AB за ось Ox . Пусть точка M с координатами (x, y)

принадлежит искомому ГМТ. Квадрат расстояния от M до A равен $x^2 + y^2$, а квадрат расстояния от M до B равен $(x - a)^2 + y^2$. Точка M принадлежит ГМТ, если и только если

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + y^2}{(x - a)^2 + y^2} = k^2 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = k^2 x^2 - 2ak^2 x + k^2 a^2 + k^2 y^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (k^2 - 1)x^2 - 2ak^2 x + (k^2 - 1)y^2 + k^2 a^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - \frac{2ak^2}{k^2 - 1} \cdot x + y^2 + \frac{k^2 a^2}{k^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{ak^2}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2 k^4}{(k^2 - 1)^2} - \frac{k^2 a^2}{k^2 - 1} = \frac{a^2 k^2}{(k^2 - 1)^2}. \end{aligned}$$

Ясно теперь, что мы получили уравнение окружности.

Ответ: искомое ГМТ — окружность радиуса $\frac{ak}{|k^2 - 1|}$ с центром на прямой AB на расстоянии $\frac{ak^2}{k^2 - 1}$ от точки A справа, если $k > 1$, и слева, если $k < 1$. ◀

Наш урок окончен. Оценка по стандартным критериям.

Домашнее задание

- ▶ 1. Найти ГМТ середин всех отрезков, проведенных из данной точки к различным точкам данной прямой.
- ▶ 2. Найти ГМТ, из которых касательные, проведенные к данной окружности, равны данному отрезку.
- ▶ 3. Найти ГМТ, для которых сумма квадратов расстояний до двух данных точек есть величина постоянная.
- ▶ 4. Найти ГМТ середин всевозможных отрезков с концами на двух данных отрезках.
- ▶ 5. Дан прямоугольник $ABCD$. Найти ГМТ M , таких, что $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.
- ▶ 6. Даны различные точки A и B . Окружности касаются прямой AB в точках A и B и друг друга в точке M . Найти ГМТ M .
- ▶ 7. Даны отрезки AB и CD . Найти ГМТ M таких, что площадь треугольника ABM равна площади треугольника CDM .
- ▶ 8. Найти ГМТ середин отрезков, соединяющих данную точку вне данной окружности с точками этой окружности.
- ▶ 9 [2]. Три прямые попарно пересекаются, но не проходят через общую точку. Найти геометрическое место центров окружностей, описанных около всевозможных треугольников с вершинами на данных прямых.

- 10. Даны точки A и B . Найти ГМТ M таких, что

$$AM \cdot BM \cdot \cos(\angle AMB) = \frac{3}{4} AB^2.$$

- 11. Даны точки A и B , расстояние между которыми равно единице. Найти ГМТ, расстояния от которых до точек A и B равны целым числам.
- 12 [2]. Дано множество трапеций $ABCD$ ($AD \parallel BC$), у которых фиксированы вершины A и D и длины сторон AB и BC . Найти ГМТ, являющихся пересечением диагоналей таких трапеций.
- 13. Дан квадрат $ABCD$. Найти геометрическое место середин сторон квадратов, вписанных в данный квадрат.
- 14. Дан остроугольный треугольник ABC . Найти геометрическое место центров прямоугольников, одна из сторон которых лежит на стороне AC и по одной вершине на сторонах AB и BC .
- 15 [2]. На окружности фиксированы точки A и B . Найти геометрическое место пересечений высот треугольников ABC , когда точка C пробегает все точки окружности, кроме A и B .
- 16 [2]. На окружности фиксированы точки A и B . Найти геометрическое место пересечений биссектрис треугольников ABC , когда точка C пробегает все точки окружности, кроме A и B .
- 17 [2]. На окружности фиксированы точки A и B . Найти геометрическое место пересечений медиан треугольников ABC , когда точка C пробегает все точки окружности, кроме A и B .
- 18. На окружности фиксирована точка A . Найти ГМТ, делящих хорды с концом A в отношении $2 : 1$, считая от точки A .
- 19. Пусть A и B — фиксированные точки плоскости. Найти ГМТ C , таких, что высота треугольника ABC , опущенная из точки B , равна данному числу b .
- 20. Точки A, B и C лежат на одной прямой, причем B находится между A и C . Найти ГМТ M таких, что радиусы описанных окружностей треугольников AMB и CMB равны.

Урок 34 [3]

Построения циркулем и линейкой

Вступительные задачи на эту тему встречаются исключительно на устных экзаменах. Поэтому я, занимаясь с учениками, обычно пропускаю ее, чтобы пройти в непосредственной близости от устных экзаменов. Тем не менее книга удобнее, чем репетитор, и вы можете выбрать любое время для освоения задач на построение.

Когда в задаче мы читаем «Построить циркулем и линейкой то-то и то-то», мы отнюдь не обязаны где-то раздобыть циркуль и линейку, чтобы вычертить то, что указано. Решение задачи на построение состоит в *описании последовательности операций, которые нужно проделать так называемыми идеальными циркулем и линейкой для того, чтобы получить нужную фигуру.*

Что такое идеальный циркуль? Это нечто, чем можно проделывать следующие операции:

Ц-1) провести окружность с центром в любой точке плоскости и радиусом, равным длине любого *наперед выбранного* отрезка на плоскости;

Ц-2) найти точки пересечения проведенной окружности с любым *наперед заданным* объектом на плоскости (окружностью, прямой, отрезком и т.п.), если они (точки) имеются.

Идеальная линейка позволяет

Л-1) провести прямую через любые две заданные точки на плоскости;

Л-2) найти пересечение проведенной прямой с любыми *доселе заданными* объектами на плоскости (правда, таковое может оказаться пустым).

При этом слово «найти» означает возможность далее применять операции Ц-1, Ц-2 и Л-1, Л-2 к получившимся точкам, т.е. проводить через них прямые, отмерять радиус и проводить окружности.

Задача на построение считается решенной, если

- точно указана последовательность операций;
- доказано, что в результате их применения получится нужная фигура;
- разобраны все возможные случаи, при которых задача имеет решение и указано, сколько решений имеется.

На практике допускается вместо последовательности самих операций (будем называть их элементарными) указывать последовательность блоков

операций, при условии, что вам ясно, как разложить каждый блок на элементарные операции. Например, если на плоскости задана прямая и точка, можно (и это будет делаться на данном уроке) считать одной операцией проведение через заданную точку прямой, перпендикулярной данной, или параллельной данной. Выражение этих операций через элементарные абитуриенты, как правило, проводят неплохо.

Я сейчас приведу список блоков операций, которые будут использоваться. Проверьте себя. Если у вас вызывает трудности разложение на элементарные операции какого-либо из указанных блоков, повторите соответствующий материал в школьных учебниках.

Итак, я считаю, что вы знаете, как

1. провести через данную точку перпендикуляр к данной прямой;
2. провести через данную точку прямую, параллельную данной;
3. поделить отрезок пополам;
4. поделить угол пополам;
5. построить треугольник по трем сторонам;
6. построить треугольник по двум сторонам и углу;
7. построить прямоугольный треугольник по двум катетам;
8. построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету;
9. построить прямоугольный треугольник по катету и острому углу;
10. построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу.

Предполагается, что задачу на построение школьник будет решать, начиная с так называемого анализа, т.е. предположения, что фигура уже построена, и поиска ее геометрических свойств, которые подскажут, какие операции надо провести. После этого указывается последовательность операций и т.д.

Но, в общем-то, вы вправе никому не объяснять, как вы додумались до последовательности операций (далее, для краткости, последовательность операций называется построением). Вы можете просто провести построение и доказать, что оно приводит к успеху. Я буду решение задач излагать именно так. Кроме того, если из условия задачи ясно, что решение существует и единственно, исследование проводится не будет.

Мы разберем ряд задач с чисто геометрическими решениями, но главным на сегодняшнем уроке будет разбор алгебраического подхода. Это очень мощный метод, позволяющий решить практически любую (решаемую) задачу на построение. В школе он не преподается, хотя освоить его легко. При этом вы получите существенное преимущество перед теми, кто этого метода не знает.

Несколько слов об обозначениях. При написании последовательности операций, мы будем применять уже освоенные построения как одну операцию.

При этом будет употребляться обозначение $a_1, \dots, a_n \rightarrow b$, который можно читать как «если даны $a_1, \dots, a_n$, то мы умеем строить b ». Стрелка $\Rightarrow$ употребляется в обычном смысле, т.е. может читаться как слово «следовательно». Главная цель сегодняшнего урока — научить вас строить циркулем и линейкой практически любой отрезок или угол, который может быть выражен алгебраически через известные элементы.

- **Задача 1.** Дан отрезок длины a и натуральные числа m и n . Построить отрезок длины $\frac{m}{n} \cdot a$.

Решение. Если мы имеем отрезок длины b , то, откладывая его m раз на какой-нибудь прямой, получим отрезок длины mb . Значит, $b \rightarrow mb$.

Если дан отрезок длины a , то возьмем какой-нибудь прямой угол с вершиной O . Отложим на стороне угла от точки O отрезок OA , равный a , а на другом луче от точки O отложим точки $B_1, \dots, B_n$ таким образом, чтобы было $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \dots = B_{n-1}B_n = a$. Соединим точку B_n с точкой A и проведем через точки $B_1, \dots, B_{n-1}$ прямые, параллельные B_nA . Они разобьют отрезок OA на n равных (по теореме Фалеса) отрезков. Значит, $a \rightarrow \frac{a}{n}$. Окончательно,

$$a \rightarrow \frac{a}{n} \rightarrow m \cdot \frac{a}{n} = \frac{m}{n} \cdot a \Rightarrow a \rightarrow \frac{m}{n} \cdot a,$$

что и требовалось. Напомню, что последняя формула со стрелками должна читаться так:

имея a , можем построить $\frac{a}{n}$; а, имея $\frac{a}{n}$, можем построить $m \cdot \frac{a}{n} = \frac{m}{n} \cdot a$. Следовательно, имея a , можно построить $\frac{m}{n} \cdot a$.

- **Задача 2.** Дан отрезок длины a и натуральное n . Построить отрезок длины $a\sqrt{n}$.

Решение. Докажем, что для любого натурального k имеем

$$a, a\sqrt{k} \rightarrow a\sqrt{k+1}.$$

Для этого построим прямоугольный треугольник с катетами a и $a\sqrt{k}$.

Тогда гипотенуза его будет равна $\sqrt{a^2 + (a\sqrt{k})^2} = a\sqrt{k+1}$.

Значит, $a \rightarrow a\sqrt{2} \rightarrow a\sqrt{3} \rightarrow a\sqrt{4} \rightarrow \dots \rightarrow a\sqrt{n}$,

и все доказано (построение проводится n раз).

- **Задача 3.** Дан отрезок длины a и натуральные числа m и n . Построить отрезок $a\sqrt{\frac{m}{n}}$.

Решение. Здесь можно обойтись одной строкой:

$$a \rightarrow a\sqrt{mn} \rightarrow \frac{a\sqrt{mn}}{n} = a\sqrt{\frac{m}{n}}.$$

Первая стрелка имеет место согласно задаче 2, а вторая — согласно задаче 1.

- **Задача 4.** Доказать, что если даны отрезки с длинами $a_1, \dots, a_n$ и рациональные числа (т.е. числа, представимые в виде частного целого и натурального чисел) $p_1, \dots, p_n$, то можно построить отрезок

$$\sqrt{p_1 a_1^2 + \dots + p_n a_n^2}.$$

Решение. Переставляя, если потребуется заданные рациональные числа, можно считать, что $p_1, \dots, p_k \geq 0$ и $p_{k+1}, \dots, p_n < 0$ для некоторого натурального k , где $0 \leq k \leq n$.

В задаче 3 доказано, что мы можем построить отрезки $b_1, \dots, b_n$, где $b_i = a_i \sqrt{|p_i|}$. Ясно, что искомый отрезок равен

$$\sqrt{b_1^2 + \dots + b_k^2 - b_{k+1}^2 - \dots - b_n^2}.$$

Если мы построим прямоугольный треугольник с катетами b_1 и b_2 , то его гипотенуза будет равна $\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$. Если мы построим прямоугольный треугольник с катетами $\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ и b_3 , то его гипотенуза будет равна

$$\sqrt{\left(\sqrt{b_1^2 + b_2^2}\right)^2 + b_3^2} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

Если мы построим прямоугольный треугольник с катетами $\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$ и b_4 , то его гипотенуза будет равна

$$\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2},$$

и так далее, в результате чего после k таких шагов будем иметь отрезок $c = \sqrt{b_1^2 + \dots + b_k^2}$ и еще после $n - k$ шагов отрезок $d = \sqrt{b_{k+1}^2 + \dots + b_n^2}$. Теперь построим прямоугольный треугольник по гипотенузе c и катету d , тогда второй катет будет иметь искомую длину

$$\sqrt{c^2 - d^2} = \sqrt{b_1^2 + \dots + b_k^2 - b_{k+1}^2 - \dots - b_n^2}.$$

- **Задача 5.** Даны отрезки с длинами a, b, c . Построить отрезок, длина которого равна $\frac{ab}{c}$.

Решение. Возьмем какой-нибудь прямой угол с вершиной O . Возьмем на одном из его лучей точки C и A (точка C должна лежать между точками A и O), а на другом луче точку B так, чтобы было

$$OC = c, CA = a, \text{ и } OB = b.$$

Проведем через точку A прямую, параллельную BC . Если M — ее точка пересечения с лучом OB , то отрезок BM — искомый.

Действительно, тривиальное рассмотрение подобных треугольников AOM и COB дает

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{BM} \iff BM = \frac{ab}{c},$$

что и требовалось.

- **Задача 6.** Даны отрезки с длинами a, b, c, d, e, f, g . Построить отрезок, имеющий длину $\frac{abcd}{efg}$.

Решение. Нужно три раза применить результат задачи 5:

$$a, b, c, d, e, f, g \rightarrow \frac{ab}{e}, c, d, f, g \rightarrow \frac{\frac{ab}{e} \cdot c}{f} = \frac{abc}{ef}, d, g \rightarrow \frac{\frac{abc}{ef} \cdot d}{g} = \frac{abcd}{efg},$$

и задача решена.

- **Задача 7.** Даны отрезки с длинами a и b . Построить отрезок длины $\sqrt{ab}$.

Решение. Возьмем отрезок AB длины a и отложим на прямой AB за точку B отрезок $BC = b$. На отрезке AC построим окружность как на диаметре. Через точку B проведем перпендикуляр к прямой AB . Пусть он пересек окружность в точке M . Тогда отрезок BM искомый (докажите это сами, опять используя подобие).

- **Задача 8.** Дан отрезок длины a и угол, равный α . Построить отрезки длины

$$a \cos \alpha, a \sin \alpha, \frac{a}{\cos \alpha}, \frac{a}{\sin \alpha}, a \operatorname{tg} \alpha, a \operatorname{ctg} \alpha.$$

Решение. Построим прямоугольный треугольник по катету a и прилежащему к нему острому углу α . Тогда гипотенуза будет равна $\frac{a}{\cos \alpha}$, а второй катет — $a \operatorname{tg} \alpha$. Если мы построим прямоугольный треугольник по гипотенузе a и острому углу α , то его катеты будут равны $a \sin \alpha$ и $a \cos \alpha$. Наконец, если мы построим прямоугольный треугольник по катету a и прилежащему к нему острому углу $\frac{\pi}{2} - \alpha$, то второй катет будет равен $a \operatorname{ctg} \alpha$, а гипотенуза — $\frac{a}{\sin \alpha}$ и все требуемые отрезки, наконец, построены.

- **Задача 9.** Дан отрезок длины a и угол, равный α . Построить отрезки длины $a\sqrt{\sin \alpha}$ и $\frac{a}{\sqrt{\cos \alpha}}$.

Решение. Мы можем построить отрезок длины $a \sin \alpha$, а, значит, согласно задаче 7, отрезок длины

$$\sqrt{a \cdot a \sin \alpha} = a\sqrt{\sin \alpha},$$

и половина задачи решена.

Мы можем построить отрезок $a\sqrt{\cos \alpha} = \sqrt{a \cdot a \cos \alpha}$, а также, согласно задаче 5, отрезок длины

$$\frac{a \cdot a}{a\sqrt{\cos \alpha}} = \frac{a}{\sqrt{\cos \alpha}},$$

и наша задача полностью решена.

- **Задача 10.** Построить угол, равный трем градусам.

Решение. При помощи построения равностороннего треугольника строится угол, равный 60° . Поделив его пополам, получим угол, равный 30° . Еще один раз произведя деление пополам, будем иметь угол, равный 15° .

Покажем, как построить угол, равный 18° . Для этого, заметим, что

$$\sin \frac{2}{5}\pi = \sin \left(\pi - \frac{2}{5}\pi \right) = \sin \frac{3}{5}\pi.$$

Воспользовавшись формулами для синуса двойного и тройного углов, получим:

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} &= 3 \sin \frac{\pi}{5} - 4 \sin^3 \frac{\pi}{5} \iff \\ \iff 2 \cos \frac{\pi}{5} &= 3 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{5} = 4 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 1 \iff \\ \iff 4 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 2 \cos \frac{\pi}{5} - 1 &= 0, \end{aligned}$$

откуда, с учетом положительности $\cos \frac{\pi}{5}$, находим, что $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Возьмем произвольный отрезок — пусть его длина равна a . Развита в предыдущих задачах техника позволяет легко построить отрезок $c = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \cdot a$. Построим прямоугольный треугольник по катету a и гипотенузе c . Тогда косинус острого угла между сторонами a и c будет равен $\frac{1+\sqrt{5}}{4} = \cos \frac{\pi}{5}$, откуда следует, что и сам этот острый угол равен $\frac{\pi}{5} = 36^\circ$. Поделив его пополам, получим угол, равный 18° . Ранее мы построили угол 15° . Совсем легко проводится построение вычитания одного угла из другого. отсюда и получаем угол, равный $18^\circ - 15^\circ = 3^\circ$ и наша задача решена.

Замечание. Ясно, что, имея угол, равный 3° , мы можем построить любой кратный ему угол, т.е. 39° , 57° , 153° и т.п.

- **Задача 11.** На плоскости нарисован угол, равный 19° . При помощи циркуля и линейки разделить его на 19 равных частей.

Решение. Задача равносильна построению угла, равного одному градусу. Предыдущая задача показывает, как построить угол 18° . Теперь остается вычесть из данного угла в 19° построенный угол, равный 18° .

Вы еще не осознали, что теперь уже можете построить циркулем и линейкой практически любое алгебраическое выражение? Надеюсь, что следующие две задачи помогут вам это понять.

- **Задача 12.** Даны отрезки с длинами a, b, c, d . Построить отрезок, имеющий длину

$$l = \sqrt{\frac{abc^2 + d^4}{b^2 + cd}}.$$

Решение. Согласно задаче 7, мы можем построить отрезки $\sqrt{cd}$ и $\sqrt{ab}$. Значит, можно и построить отрезок, имеющий длину

$$\sqrt{b^2 + (\sqrt{cd})^2} = \sqrt{b^2 + cd}.$$

Из результата задачи 5 следует, что мы можем построить отрезки длиной

$$p = \frac{\sqrt{ab} \cdot c}{\sqrt{b^2 + cd}} \text{ и } q = \frac{d \cdot d}{\sqrt{b^2 + cd}}.$$

Следовательно, мы можем построить и отрезок

$$\sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{\frac{abc^2 + d^4}{b^2 + cd}} = l,$$

а это и требовалось.

► **Задача 13.** Дан отрезок длины a и углы, равные α и β . Построить отрезок, равный

$$a \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2 \beta + \sqrt{\frac{\sin \beta}{\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}}}{\cos^2 \alpha + \sqrt{\sin \alpha \sin \beta}}.$$

Решение. Сначала заметим, что $a, \alpha \rightarrow a \cos \alpha \rightarrow a \cos \alpha \cdot \cos \alpha = a \cos^2 \alpha$. Далее,

$$a, \alpha, \beta \rightarrow a \sqrt{\sin \alpha} \rightarrow a \sqrt{\sin \alpha} \cdot \sqrt{\sin \beta} = a \sqrt{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Значит, мы можем построить отрезок

$$b = a(\cos^2 \alpha + \sqrt{\sin \alpha \sin \beta}).$$

Аналогично, но проще строятся отрезки $a(\cos^2 \alpha + \operatorname{tg} \beta)$ и $a \operatorname{ctg}^2 \beta$. Задача 5 позволяет построить отрезок

$$\frac{a \cdot a \sin \beta}{a(\cos^2 \alpha + \operatorname{tg} \beta)} = a \cdot \frac{\sin \beta}{\cos^2 \alpha + \operatorname{tg} \beta}.$$

Теперь, с помощью задачи 7 строим отрезки

$$c = \sqrt{a \cdot a \cdot \frac{\sin \beta}{\cos^2 \alpha + \operatorname{tg} \beta}} = a \sqrt{\frac{\sin \beta}{\cos^2 \alpha + \operatorname{tg} \beta}} \text{ и } d = c + a \operatorname{ctg}^2 \beta.$$

Наконец, с помощью задачи 5 можем построить отрезок $\frac{a \cdot d}{b}$, который, как легко проверить, является искомым.

► **Задача 14.** Построить окружность, касающуюся данной прямой l и проходящую через две данные различные точки A и B , лежащие по одну сторону от этой прямой.

Решение. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Отрезок AB параллелен прямой l .

Ясно, что центр окружности обязан лежать на серединном перпендикуляре s к отрезку AB . Построим этот серединный перпендикуляр, и пусть он пересекает прямую l в точке H . Если бы нам был известен радиус R искомой окружности, то мы бы могли отложить его от точки H (в ту полуплоскость, где лежат точки A и B) и получить ее центр. Пусть F — середина отрезка AB . Пусть h — (известная нам) длина отрезка FH и

$AF = FB = a$. Если центр O искомой окружности лежит ниже отрезка AB , то из равенства $FO + OH = FH$ получаем уравнение на R :

$$(1) \quad \sqrt{R^2 - a^2} + R = h \iff \sqrt{R^2 - a^2} = h - R.$$

Если же точка O лежит выше отрезка AB , то имеем $OH - FH = OF$, и опять получаем уравнение на R :

$$(2) \quad R - \sqrt{R^2 - a^2} = h \iff \sqrt{R^2 - a^2} = -(h - R).$$

Отсюда следует, что, вне зависимости от расположения центра окружности, ее радиус удовлетворяет уравнению

$$R^2 - a^2 = (h - R)^2 \iff R^2 - a^2 = h^2 + R^2 - 2Rh \iff R = \frac{a^2 + h^2}{2h},$$

откуда видно, что в первом случае задача всегда имеет, и притом единственное решение. Конечно же, развитая нами техника позволяет, имея отрезки a и h , легко построить отрезок $R = \frac{a^2 + h^2}{2h}$. Надо, правда, еще доказать, что так найденное R удовлетворяет условию задачи. Напомню, что мы ведь рассуждали так: пусть R удовлетворяет условию. Тогда $R = \frac{a^2 + h^2}{2h}$. Но вдруг так найденное R не годится.

Пусть мы нашли R по указанной формуле. Тогда либо $R \geq h$, либо $R \leq h$. Пусть, например, $R \leq h$. Тогда R удовлетворяет уравнению (1), которое легко приводится к виду

$$R^2 = a^2 + (h - R)^2,$$

а это уравнение как раз показывает, что квадрат расстояния от точки O до точки A (правая часть уравнения) равен квадрату радиуса, вычисленного как расстояние от точки O до прямой l , а это как раз и требуется в задаче.

Аналогично, с применением формулы (2), рассматривается случай, когда $R \geq h$.

Случай 2. Прямая AB пересекает прямую l в точке L . Если бы нам была известна точка H касания искомой окружности с прямой l , то мы бы однозначным образом восстановили ее центр, проведя через точку H перпендикуляр к прямой l , и отыскав его пересечение с прямой s .

По теореме о секущей и касательной имеем

$$(3) \quad LH^2 = LA \cdot LB \iff LH = \sqrt{LA \cdot LB}.$$

Отрезки LA и LB нам известны, так что мы можем и построить отрезок LH . Этот отрезок, как мы видим, всегда можно построить. Однако, отложить его от точки L можно двумя способами: так, чтобы точка H была то ли слева, то ли справа от точки L . Каждое из таких откладываний с последующим нахождением центра даст решение задачи. Это, кстати, так же, как и в первом случае, требует доказательства, так как мы рассуждали доселе, считая точку H известной и в этом предположении нашли длину отрезка LH . Однако, никакое из наших рассуждений не доказывает, что,

если мы найдем LH таким способом, то точка H будет искомой, т.е. отрезки OH и OA будут равны (и тогда они автоматически будут равны отрезку OB).

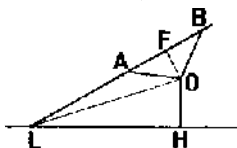


Рис. 1

Итак, пусть длина LH вычислена по формуле (3). Нам надо доказать, что $OA = OB = OH$, при этом достаточно установить, что $OA = OH$. Пусть F — как и прежде, середина отрезка AB (см. рис. 1). Тогда по теореме Пифагора $AO^2 = AF^2 + FO^2$ и $FO^2 = LO^2 - LF^2$, откуда получаем, что $AO^2 = AF^2 + LO^2 - LF^2 = LO^2 - (AF + LF)(LF - AF) =$

$$= LO^2 - LA \cdot LB = LO^2 - LH^2 = OH^2,$$

и все доказано. Заметим, что для наших рассуждений в доказательстве не играло роли, слева, или справа от точки L находится точка H , так что в этом случае, действительно, имеются два решения.

- **Задача 15.** Построить треугольник по стороне a , медиане m_b , проведенной к другой стороне и радиусу R описанной окружности.

Решение. По теореме синусов имеем $\frac{a}{2 \sin A} = R$, так что нам известен синус угла A , равный $\frac{a}{2R}$. Отсюда заключаем, что, если $a > 2R$, то задача решений не имеет; если $a = 2R$, то угол A равен 90° ; если $a < 2R$, то либо $A = \arcsin \frac{a}{2R}$, либо $a = \pi - \arcsin \frac{a}{2R}$.

В каждом из указанных случаев мы можем построить угол, равный A , строя прямоугольный треугольник с гипотенузой $2R$ и катетом a (если $a < 2R$).

Считая угол A заданным, построим на одной из его сторон точку C_1 и точку M_1 , являющуюся серединой отрезка AC_1 . Для числа $k = \frac{a}{m_b}$ построим геометрическое место точек P таких, что $\frac{PC_1}{PM_1} = k$. Мы знаем из задачи 10 урока 33, что получится либо прямая (при $k = 1$) либо окружность (если $k \neq 1$). При этом ее радиус равен $\frac{dk}{|k^2 - 1|}$, где $d = C_1M_1$. Приведенная выше техника легко позволяет построить этот радиус, так же, как и центр, отстоящий от точки C_1 на расстояние $\frac{dk^2}{k^2 - 1}$. Эта окружность может пересекать вторую сторону угла либо в одной точке, либо в двух, либо вообще не пересекать (в последнем случае решений у исходной задачи не будет).

Пусть существует точка пересечения B_1 указанной окружности со второй стороной угла. Отложим на этой стороне от точки A отрезок AB , равный $s = \frac{a \cdot AB_1}{B_1C_1}$. Проведем через B прямую параллельно B_1C_1 . Пусть она пересечет луч AC_1 в точке C . Тогда треугольник ABC — искомый.

Действительно, его сторона BC находится из подобия треугольников ABC и AB_1C_1 :

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BA}{B_1A} = \frac{a \cdot AB_1}{B_1A \cdot B_1C_1} \iff BC = a.$$

Осталось доказать, что медиана BM в треугольнике ABC равна m_b . Из подобия треугольников ABC и AB_1C_1 следует, что

$$\frac{BM}{BM_1} = \frac{a}{B_1C_1} \iff BM = a \cdot \frac{B_1M_1}{B_1C_1} = a \cdot \frac{m_b}{a} = m_b,$$

что и требовалось доказать. Искомый треугольник построен. Провести исследование на предмет существования решений и их количества можно, разобрав все возможные случаи пересечения построенной окружности со второй стороной угла.

Существование решения равносильно одновременному выполнению двух условий: существованию угла A (что бывает в точности при $\frac{a}{2R} \leq 1$), и существованию пересечения построенной окружности со второй стороной угла.

Я приведу сразу результат исследования ввиду большой чисто вычислительной безыдейной работы. Геометрическая часть исследования проводится следующим образом. Если диаметр окружности, лежащий на стороне угла не содержит его вершину (это бывает при $a < m_b$ и при $a > 2m_b$), то угол A не может быть тупым, или прямым, а вторая прямая начнет пересекаться с окружностью при достаточно малом A . Граничная ситуация (окружность касается второй прямой) изображена на рис. 2.



Рис. 2

Из рисунка видно, что прямая пересекает вторую сторону угла, если и только если его синус (равный $\frac{a}{2R}$) не превосходит отношения радиуса окружности к расстоянию от ее центра до вершины угла (т.е. синуса соответствующего угла в изображенном прямоугольном треугольнике).

При $m_b < a \leq 2m_b$ диаметр окружности содержит вершину угла. Равенство $\sin A = \frac{a}{2R}$ дает два возможных значения угла: $A = \arcsin \frac{a}{2R}$ и $A = \pi - \arcsin \frac{a}{2R}$. При каждом из этих углов пересечение окружности со второй стороной угла непусто (рис. 3), так что задача имеет два решения.

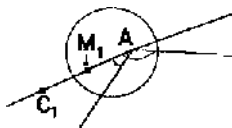


Рис. 3

Теперь уже можно привести результат исследования.

1. Если $a > 2R$, то решений нет.
2. Если $a = 2R$, то $A = \frac{\pi}{2}$ и единственное решение имеется только при $m_b < a \leq 2m_b$.

3. Пусть $a < 2R$. Тогда, если

3.1. $a < m_b$, то решение есть только для острого угла A , причем оно единственно при

$$\frac{a}{2R} = \frac{k^2}{2k^2 + k - 2},$$

и имеются два решения при

$$\frac{a}{2R} < \frac{k^2}{2k^2 + k - 2}.$$

При

$$\frac{a}{2R} > \frac{k^2}{2k^2 + k - 2}$$

решений нет.

3.2. Если $m_b < a \leq 2m_b$, то есть два решения, причем одно для тупого и одно для острого угла A .

3.3. Если $a > 2m_b$, то решение есть только для острого угла A , причем оно единственно при

$$\frac{a}{2R} = \frac{k^2}{2k^2 - k - 2},$$

и имеются два решения при

$$\frac{a}{2R} < \frac{k^2}{2k^2 - k - 2}.$$

При

$$\frac{a}{2R} > \frac{k^2}{2k^2 - k - 2}$$

решений нет.

Напомним, что $k = \frac{a}{m_k}$.

► **Задача 16.** Построить треугольник по периметру P , углу A и стороне b .

Решение. Эту задачу можно решить и вычислительным путем, но я хочу привести красивое геометрическое решение. Из неравенства треугольника ($a + c > b \iff a + b + c > 2b$) следует, что если $b \geq \frac{P}{2}$, то решений нет. Оказывается, что если $b < \frac{P}{2}$, то у задачи существует единственное решение.

Возьмем угол, равный A с вершиной A . Пусть C — точка на одной из сторон такая, что $AC = b$. Пусть R точка на луче AC со свойством $AR = \frac{P}{2}$, а Q — точка на другом луче угла A с $AQ = \frac{P}{2}$. В точке R восстановим перпендикуляр к лучу AC , а в точке Q — перпендикуляр к лучу AQ . Пусть O — точка пересечения этих перпендикуляров. Проведем окружность радиусом OQ . Тогда она будет вписана в угол A . Из точки C уже проведена одна касательная CR к данной окружности. Проведем еще одну касательную из точки C , которая пересечет луч AQ в точке B . Тогда треугольник ABC — искомый.

Действительно, пусть T — точка касания BC с окружностью (рис. 4). Тогда $BQ = BT$ и $CT = CR$. Отсюда следует, что

$AB + AC + BC = AB + AC + BQ + CR = 2 \cdot AR = 2 \cdot \frac{P}{2} = P$, т.е. построенный треугольник — искомый.

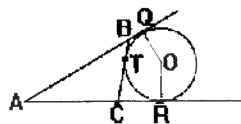


Рис. 4

Из построения ясно, что решение при указанных выше условиях существует. Единственность доказывается следующим образом:

Пусть ABC — искомый треугольник. Если провести биссектрисы углов, смежных к углам B и C , то они пересекутся в какой-то точке O . Легко видеть, что точка O равноудалена от прямых AB, BC и AC , т.е. является центром вневписанной окружности. Проведем эту окружность с точками касания как на рис. 4. Опять, используя равенство касательных, проведенных из одной точки, докажем, что $AR = AQ = \frac{P}{2}$, и, следовательно, треугольник, построенный как мы указали, совпадет с треугольником ABC , и задача полностью решена.

Наш урок окончен. Оценка по стандартным критериям.

Домашнее задание

► 1–21. Построить треугольник по

1. a, b, m_c ;
2. a, b, m_a ;
3. a, b, l_c ;
4. a, b, h_c ;
5. a, b, h_a ;
6. m_b, m_c, a ;
7. m_b, m_a, a ;
8. h_a, h_b, c ;
9. h_a, h_b, a ;
10. m_a, m_b, m_c ;
11. h_a, h_b, h_c ;
12. h_a, l_a, m_a ;
13. m_a, m_b, h_c ;
14. m_a, m_b, h_a ;
15. h_a, h_b, m_c ;
16. h_a, h_b, m_a ;
17. h_a, h_b, l_c ;
18. a, m_a, h_a ;
19. a, m_b, h_a ;
20. a, m_a, h_b ;
21. a, m_b, h_b .

- 22. Построить треугольник ABC , зная три точки P, Q, R , в которых высота, биссектриса и медиана, проведенные из вершины C , пересекают описанную окружность.
- 23. Построить треугольник ABC , зная положение трех точек A_1, B_1 и C_1 , являющихся центрами вневписанных окружностей треугольника ABC .
- 24. Построить четырехугольник $ABCD$ по четырем сторонам и углу между AB и CD .
- 25. Через вершину A выпуклого четырехугольника $ABCD$ провести (циркулем и линейкой) прямую, делящую его на две равновеликие части.
- 26. Даны три точки A, B, C . Построить три окружности, попарно касающиеся в этих точках.
- 27. Даны две точки A и B и окружность S . Провести (циркулем и линейкой) окружность, проходящую через точки A и B и касающуюся окружности S .
- 28. Построить точки X и Y на сторонах AB и BC треугольника ABC так, что $AX = BY$ и $XY \parallel AC$.
- 29. На плоскости задан произвольный треугольник ABC и равносторонний треугольник PQR . Построить равносторонний треугольник, вершины которого лежат на сторонах треугольника ABC , а стороны параллельны сторонам треугольника PQR .
- 30. Даны вершины A и C равнобедренной описанной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$); известны также направления ее оснований. Постройте вершины B и D .

Глава 8

Задачи с параметрами

Урок 35

Квадратные уравнения и неравенства

Задачи с параметрами нам изредка уже встречались (см. уроки 5 и 11). Но в этой главе мы рассмотрим их систематически. Абитуриента, который берется за подобную задачу, поджидает несколько трудностей. Первая состоит в том, что ни в каких (часто даже физико-математических) школах такие задачи решать не учат, поэтому надо действовать на свой страх и риск. А это очень не просто, так как среднему школьнику часто трудно даже понять условие задачи такого типа. К примеру, как подступиться к задаче, в которой сказано: «Решить уравнение такое-то для любого a »? Многие мои ученики в этом случае задают мне вопросы типа: «Это как? — Подставить какое-нибудь a и решить?»

Приведенный вопрос иллюстрирует вторую существенную трудность — логическую. Увы, правильное логическое мышление от природы не дается, — его у себя надо развивать даже людям, способным к математике. И это нелегко. Подготовьте себя морально к серьезной борьбе с собой. Работу на этом уроке проводите обычным образом, но обратите серьезнейшее внимание на оформление ответа. Именно ответы проиллюстрируют вам то, что задача действительно, решена для всех a . Начиная с шестой задачи, следите, чтобы у вас в ответе были перебраны все возможные a (у кого-то сейчас возникнет вопрос: «Как же это сделать? Ведь число всевозможных a бесконечно!» Но, посмотрев на ответы к задачам, вы увидите, что абсолютно все a рассмотрены). Ну и само собой, вступительный материал, который я сейчас приведу, должен быть освоен идеально.

Сегодня мы рассматриваем задачи на квадратный трехчлен, зависящий

от параметра. Это самый простой тип таких задач. Но все равно, сегодняшнего урока нам не хватит для того, чтобы все пройти. Мы разберем только решение уравнений и неравенств, задачи на теорему Виета, и простейшие логические задачи.

1. (Необязательно квадратные) уравнения (или неравенства) называются *эквивалентными* или *равносильными*, если множества их решений совпадают.

► 1. Каким может быть множество решений квадратного уравнения? квадратного неравенства?

2. Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни тогда и только тогда, когда

$$D = b^2 - 4ac \geq 0.$$

3. Корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ называются корни (если они существуют) уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

4. Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет при $a \neq 0$ не более двух корней.

► 2. А когда оно может иметь больше двух корней?

5. (*Теорема Виета*). Пусть дано уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ и $a \neq 0$. Если x_1 и x_2 — различные его корни, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}.$$

Если это уравнение имеет единственный корень x_1 , то теорема Виета остается верной, если положить $x_2 = x_1$.

6. (*Частный случай теоремы Виета*). Если уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет различные корни x_1 и x_2 , то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q \end{cases}.$$

Если это уравнение имеет единственный корень x_1 , то, если положить $x_2 = x_1$, указанные равенства будут выполняться.

7. Если уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет различные корни x_1 и x_2 , то имеет место тождество $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$.

Если имеется единственный корень x_1 , то $x^2 + px + q = (x - x_1)^2$.

8. Если уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет при $a \neq 0$ два различных корня x_1 и x_2 , то имеет место тождество $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Если имеется единственный корень x_1 , то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

9. В частности, если известно, что x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения с ненулевым коэффициентом при x^2 , то это уравнение можно записать в виде $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$. Обратите внимание, что x_1 и x_2 здесь — конкретные числа, а x — переменная.

10. Не рецептом, но помощью против логических трудностей при решении задач с параметром можно считать **выучивание наизусть фразы**

о том, что требуется найти в задаче, и повторение ее (скажем, 100 раз) до тех пор, пока она сама неотвязно не будет вертеться в голове. Эта вертящаяся в голове фраза (я далее дам примеры) поможет рассуждать в нужном направлении.

- **Задача 1.** Найти все числа p и q такие, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ равны p и q .

Решение. Пусть p и q удовлетворяют условию задачи. Тогда согласно теореме Виета имеем

$$\begin{cases} p + q = -p \\ pq = q \end{cases} \iff \begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} p = 1 \\ q = -2 \end{cases}.$$

Еще надо проверить, что обе эти пары удовлетворяют условию — ведь мы нашли их, *предположив*, что они таковы, как требуется. Это делается просто подстановкой.

Ответ: $p = q = 0$, или $p = 1, q = -2$. ◀

- **Задача 2.** Найти все значения a , при которых сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 - ax + a + 7 = 0$$

равна 10.

Решение. Для того, чтобы сумма квадратов корней уравнения чему-то равнялась, эти корни должны существовать. Значит, дискриминант нашего уравнения должен быть неотрицательным, т.е.

$$a^2 - 4(a + 7) \geq 0 \iff a \in (-\infty, 2 - 4\sqrt{2}] \cup [2 + 4\sqrt{2}, +\infty).$$

При таких a у исходного уравнения найдутся (возможно совпадающие) корни x_1 и x_2 .

Запишем для них теорему Виета: $\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 x_2 = a + 7 \end{cases}$. Теперь, не вычисляя корней, можно найти сумму их квадратов через a :

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = a^2 - 2(a + 7).$$

Согласно условию, эта сумма квадратов равна 10, откуда получаем квадратное уравнение $a^2 - 2(a + 7) = 10 \iff a = 6, -4$.

Легко видеть, что при $a = 6$ дискриминант исходного уравнения отрицателен, а число $a = -4$ подходит.

Ответ: $a = -4$ ◀

- **Задача 3.** При каких a корни x_1, x_2 уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ таковы, что

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 < \frac{5}{2}.$$

Решение. Корни имеются, если и только если дискриминант $D = a^2 - 4$ неотрицателен. Это имеет место только при $|a| \geq 2$. Так же, как и в

предыдущей задаче, мы можем найти указанное выражение от корней, не находя самих корней:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 &= \frac{x_1^4 + x_2^4}{x_1^2 x_2^2} = x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = \\ &= ((x_1 + x_2)^2 - 2)^2 - 2 = (a^2 - 2)^2 - 2 \end{aligned}$$

— мы неоднократно воспользовались тем, что, по теореме Виета, имеем $x_1 x_2 = x_1^2 x_2^2 = 1$ и $x_1 + x_2 = -a$. Нам остается решить неравенство

$$(a^2 - 2)^2 - 2 < \frac{5}{2} \iff a \in \left(-\sqrt{2 + \frac{3}{\sqrt{2}}}, \sqrt{2 + \frac{3}{\sqrt{2}}}\right).$$

Учтя условие на дискриминант, получаем

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\sqrt{2 + \frac{3}{\sqrt{2}}}, -2\right] \cup \left[2, \sqrt{2 + \frac{3}{\sqrt{2}}}\right). \blacktriangleleft$$

► **Задача 4.** При всех a решить уравнение $ax^2 - 2x + 4 = 0$.

Решение. Если $a = 0$, то уравнение не является квадратным и легко решается — в этом случае $x = 2$.

При $a \neq 0$ уравнение становится квадратным, и его решения зависят от дискриминанта $D = 2^2 - 4 \cdot a \cdot 4 = 4 - 16a$. Если дискриминант отрицателен (это равносильно тому, что $a > \frac{1}{4}$), то уравнение не имеет решений.

Если $D = 0 \iff a = \frac{1}{4}$, то уравнение имеет единственный корень $x = 4$.

Если $D > 0 \iff a < \frac{1}{4}$, то уравнение имеет два корня

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{a}.$$

Ответ: если $a > \frac{1}{4}$, то решений нет; если $a = \frac{1}{4}$, то $x = 4$; если $a < \frac{1}{4}$, $a \neq 0$, то есть два корня,

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{a};$$

если $a = 0$, то $x = 2$. ◀

► **Задача 5.** При всех a решить неравенство

$$(1 - a^2)x^2 + 2ax + 1 \geq 0.$$

Решение. Исследуем сначала случай, когда неравенство не является квадратным, т.е. когда $1 - a^2 = 0 \iff a = \pm 1$.

Если $a = 1$, то $2x + 1 \geq 0 \iff x \geq -\frac{1}{2}$.

Если $a = -1$, то $-2x + 1 \geq 0 \iff x \leq \frac{1}{2}$.

Пусть теперь $1 - a^2 > 0 \iff a \in (-1, 1)$. В этом случае у параболы ветви идут вверх, причем, если она имеет корни x_1, x_2 , $x_1 \leq x_2$, то неотрицательна при $x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$. Если корней у параболы нет, то она неотрицательна при всех x .

Корни имеются при $D = (2a)^2 - 4(1 - a^2) \geq 0 \iff |a| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Значит, если $a \in (-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$, то

$$x \in \left(-\infty, \frac{-a - \sqrt{2a^2 - 1}}{1 - a^2} \right] \cup \left[\frac{-a + \sqrt{2a^2 - 1}}{1 - a^2}, +\infty \right).$$

Если $|a| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, то любое x будет решением данного неравенства.

Нам остался случай, когда $1 - a^2 < 0 \iff |a| > 1$. Заметим, что тогда дискриминант автоматически больше нуля, так что, с учетом того, что ветви у параболы идут вниз, получим, что решения исходного неравенства лежат между корнями соответствующего квадратного трехчлена. Последний подводный камень здесь — это возможность неправильно определить, какой из двух корней больше. Числитель, очевидно, больше там, где радикал взят со знаком плюс. Но знаменатель отрицателен, так что больше тот корень, где у радикала стоит знак минус. Значит, в этом случае

$$x \in \left[\frac{-a + \sqrt{2a^2 - 1}}{1 - a^2}, \frac{-a - \sqrt{2a^2 - 1}}{1 - a^2} \right].$$

Ответ: если $a = 1$, то $x \geq -\frac{1}{2}$; если $a = -1$, то $x \leq \frac{1}{2}$; если $|a| > 1$, то

$$x \in \left[\frac{-a + \sqrt{2a^2 - 1}}{1 - a^2}, \frac{-a - \sqrt{2a^2 - 1}}{1 - a^2} \right];$$

если $a \in (-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$, то

$$x \in \left(-\infty, \frac{-a - \sqrt{2a^2 - 1}}{1 - a^2} \right] \cup \left[\frac{-a + \sqrt{2a^2 - 1}}{1 - a^2}, +\infty \right);$$

если $|a| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, то x — любое число. ◀

► **Задача 6.** Найти все значения параметра a , при которых уравнение

$$(a - 2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$$

имеет корни и определить знаки корней.

Решение. И в этой задаче теорема Виета позволяет обойтись без вычисления корней. Корни имеются, когда дискриминант

$$D = (2a)^2 - 4(a - 2)(2a - 3) \geq 0 \iff 1 \leq a \leq 6.$$

Если $D \geq 0$ и $a - 2 \neq 0$, то уравнение имеет корни x_1, x_2 (быть может, совпадающие) такие, что

$$x_1 + x_2 = \frac{a}{a - 2} \quad \text{и} \quad x_1 x_2 = \frac{2a - 3}{a - 2}.$$

Выражение $\frac{a}{a - 2}$ неотрицательно, если и только если $a \leq 0$ или $a \geq 2$, а $\frac{2a - 3}{a - 2} \geq 0 \iff a \in (-\infty, \frac{3}{2}] \cup [2, +\infty)$.

Заметим теперь, что по знакам произведения и суммы чисел можно определить знаки этих чисел, не находя их. Например, если произведение $x_1 x_2$ отрицательно, то x_1 и x_2 имеют разные знаки. Если $x_1 x_2 > 0$, то оба корня либо положительны либо отрицательны, причем они оба положительны, если их сумма положительна и отрицательны, если $x_1 + x_2 < 0$.

При $1 \leq a < \frac{3}{2}$ сумма корней отрицательна, а произведение положительно, т.е. они оба отрицательны. Если $\frac{3}{2} < a < 2$, то произведение корней отрицательно, так что один из них положителен, а другой — отрицателен. (То, что сумма корней при таких a отрицательна, означает, что отрицательный корень по модулю больше, чем положительный, — впрочем, это наблюдение условие задачи нас делать не обязывает).

Наконец, если $2 < a \leq 6$, то и сумма и произведение положительны, т.е. оба корня положительны.

Ответ: уравнение имеет корни при $1 \leq a \leq 6$. При $1 \leq a < \frac{3}{2}$ оба корня отрицательны; при $a = \frac{3}{2}$ один корень равен нулю, а второй отрицателен; при $\frac{3}{2} < a < 2$ корни имеют разные знаки; при $a = 2$ есть лишь один корень $x = \frac{1}{4}$; при $2 < a \leq 6$ оба корня положительны. ◀

- **Задача 7.** При каких a уравнение $(1+a)x^2 + 3ax - 1 = 0$ имеет единственное решение?

Решение. Если $a = -1$, то получается линейное уравнение, которое имеет единственный корень $x = -\frac{1}{3}$. Если $a \neq -1$, то получаем квадратное уравнение, которое имеет единственный корень только при

$$D = (3a)^2 + 4(1+a) = 0 \iff 9a^2 + 4a + 4 = 0 \iff \emptyset,$$

так как дискриминант получившегося квадратного уравнения относительно a отрицателен, и новых a этот случай не дает.

Ответ: $a = -1$. ◀

- **Задача 8.** При каких a уравнения

$$(1-a)x^2 + 2x - 4a = 0 \quad \text{и} \quad ax^2 - 4x + 4a = 0$$

равносильны?

Решение. Проще всего выяснить, когда уравнения равносильны, имея пустое множество решений каждое. Это имеет место, если дискриминант каждого из уравнений отрицателен, т.е.

$$\begin{cases} 1 + 4a(1-a) < 0 \\ 4 - 4a^2 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4a^2 - 4a - 1 > 0 \\ a^2 > 1 \end{cases}.$$

Последняя система легко решается: $a \in (-\infty, -1) \cup (\frac{2+2\sqrt{2}}{4}, +\infty)$ — мы обвели найденные a , так как все они входят в ответ.

Предположим теперь, что при некотором a уравнения равносильны и хотя бы одно из них имеет корень x_0 . Тогда x_0 является корнем и другого уравнения и имеют место равенства

$$\begin{cases} (1-a)x_0^2 + 2x_0 - 4a = 0 \\ ax_0^2 - 4x_0 + 4a = 0 \end{cases}.$$

У нас получилась система уравнений относительно x_0 и a . Сложив первое уравнение со вторым, получим уравнение $x_0^2 - 2x_0 = 0$, не содержащее a . Отсюда заключаем, что либо $x_0 = 0$, либо $x_0 = 2$. В первом случае $a = 0$ и исходные уравнения принимают вид $x^2 + 2x = 0$ и $-4x = 0$. Ясно, что эти уравнения не равносильны, так что $a = 0$ не подходит.

Если $x_0 = 2$, то из первого уравнения системы находим, что $a = 1$. При этом исходные уравнения имеют вид

$$2x - 4 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Каждое из них имеет единственный корень $x = 2$, т.е. они эквивалентны и $a = 1$ подходит.

Ответ: $a \in (-\infty, -1) \cup (\frac{2+2\sqrt{2}}{4}, +\infty)$, $a = 1$. ◀

► **Задача 9.** При каких значениях a существует такое b , что неравенство

$$\frac{a}{\sin x} + b > 0$$

выполнено хотя бы для одного x ?

Решение. Эта задача относится к тем, где требуется «железная» логика. Фраза, которая должна все время крутиться в голове должна быть такой: «Я ищу такое число a , что найдется число b , для которого указанное неравенство выполняется».

После этого вы поймете, что годятся любые a . Действительно, пусть нам дано произвольное a . Если мы положим $b = |a| + 1$, то неравенство будет выполняться при $x = \frac{\pi}{2}$. Действительно, при $x = \frac{\pi}{2}$ оно принимает вид $a + |a| + 1 > 0$, т.е. выполняется. Мы доказали, что для произвольного a нашлось x (а именно, равное $\frac{\pi}{2}$), для которого данное неравенство выполнено. Значит, все a годятся.

Ответ: при всех вещественных a . ◀

► **Задача 10.** При каких значениях a существует такое b , что неравенство

$$\frac{a}{\sin x} + b > 0$$

выполнено для всех $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$?

Решение. Здесь, после того, как вы хорошо усвоите формулировку, вы догадаетесь, что годится только $a = 0$. Докажем это.

Если $a = 0$, то при $b = 1$ левая часть тождественно равна единице, так что неравенство выполняется. Пусть $a \neq 0$. Мы должны доказать, что **не найдется** такого b , что исходное неравенство выполняется при всех x .

Осознайте, что это равносильно тому, что для любого b найдется такое $x \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, что $\frac{a}{\sin x} + b \leq 0$.

Итак, пусть для определенности $a > 0$ и выбрано произвольное b . Мы найдем $x \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, при котором исходное неравенство не будет выполняться. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $|\frac{b}{a}| \geq 1$. Тогда $0 < |\frac{a}{b}| \leq 1$ и определено $x = -\arcsin \frac{a}{b} \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Легко проверить, что при этом x левая часть нашего неравенства равна нулю, т.е. оно не выполняется — так что мы нашли обещанное x .

Случай 2. $|\frac{b}{a}| < 1$. Тогда при $x = -\frac{\pi}{2}$ левая часть неравенства равна $a(-1 + \frac{b}{a}) < 0$ и опять требуемое x найдено.

Таким образом, если $a > 0$, то для любого b найдено такое x , что исходное неравенство не выполняется. Аналогичным образом рассматривается случай $a < 0$.

Ответ: при $a = 0$. ◀

► **Задача 11.** При каких b найдется a такое, что неравенство

$$\frac{a}{\sin x} + b > 0$$

выполнено при всех $x \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$?

Решение. Если $b > 0$, то, если положить $a = 0$, в левой части неравенства будем иметь b для всех $x \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, т.е. все положительные b годятся.

Ни одно $b \leq 0$ не входит в ответ, потому, что тогда либо при $x = \frac{\pi}{2}$ либо при $x = -\frac{\pi}{2}$ левая часть неравенства отрицательна (проверьте это сами), так что оно выполняется не при любом x .

Ответ: $b > 0$. ◀

Наш урок окончен. Оценка ставится стандартно.

Домашнее задание

- 1. При каких a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - ax + a + 1 = 0$ больше 1?
 - 2. При каких a сумма кубов уравнения $x^2 - x + a = 0$ меньше или равна 1?
 - 3. При каких a сумма четвертых степеней корней уравнения $x^2 - x + a$ больше или равна 1?
 - 4. Дано уравнение $x^2 + 7x + 3 = 0$. Пусть x_1, x_2 — его корни. Составить квадратное уравнение с корнями y_1 и y_2 , где
- $$y_1 = x_1^2 + x_2^2, \quad y_2 = x_1^3 + x_2^3.$$

- 5. Дано уравнение $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ с корнями x_1 и x_2 . Составить квадратное уравнение с корнями

$$y_1 = \frac{1}{x_1}, y_2 = \frac{1}{x_2}.$$

- 6. При каких a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 4ax + 5a = 0$ равна 6?
- 7. Для всех a решить неравенство $ax^2 + x + 1 > 0$.
- 8. Для всех a решить неравенство $x^2 + ax + 1 > 0$.
- 9. Для всех a решить неравенство $x^2 + x + a \geq 0$.
- 10. Для всех a решить неравенство $ax^2 + (a+1)x + 1 > 0$.
- 11. При каких m уравнение $(m-3)x^2 - 6x + m + 5 = 0$ имеет корни? Исследовать их знаки при различных m .
- 12. При каких m уравнение $3mx^2 - (7m+1)x + 2m + 1 = 0$ имеет корни? Исследовать их знаки при различных m .
- 13. При каких a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax + a^2 - 3 = 0$ минимальна? максимальна?
- 14. Найти все a , при которых уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют хотя бы один общий корень.
- 15. Дано неравенство $ax + k^2 > 0$. При каких значениях a оно выполнено при всех x и k ?
- 16. Дано неравенство $ax + k^2 > 0$. При каких значениях a найдутся такие x и k , что оно выполняется?
- 17. Дано неравенство $ax + k^2 > 0$. При каких значениях a найдется такое x , что оно выполняется при всех k ?
- 18. Дано неравенство $ax + k^2 > 0$. При каких значениях a найдется такое k , что оно выполнено при всех x ?
- 19. Дано неравенство $ax + k^2 > 0$. При каких значениях k оно выполнено при всех x и a ?
- 20. Дано неравенство $ax + k^2 > 0$. При каких значениях k найдется такое a , что оно выполнено при всех x ?

Урок 36

Расположение корней квадратного трехчлена в зависимости от параметра

На этом уроке наша цель — научиться распознавать положение квадратной параболы на плоскости в зависимости от ее коэффициентов. Полную информацию о нем дает представление параболы $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ в виде

$$(1) \quad f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Эта формула уже приводилась на уроке 25. Там же описаны основные характеристики параболы, позволяющие построить ее график. Я напомним их, поскольку мы будем не только применять их в другом контексте, но и развивать для достижения целей сегодняшнего урока.

1. Прямая $x = x_0 = -\frac{b}{2a}$ — ось параболы, которая является одновременно осью ее симметрии. Формула (1) показывает, что точка (x_0, y_0) является вершиной параболы, где $y_0 = f(x_0) = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

2. Знак числа a показывает, куда направлены ветви параболы — если $a > 0$, то вверх, если $a < 0$, то вниз.

3. Дискриминант $D = b^2 - 4ac$ показывает, пересекается ли парабола с осью абсцисс. При $a > 0$, $D < 0$ парабола «висит» над осью Ox (рис. 1).

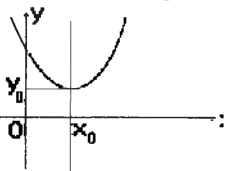


Рис. 1

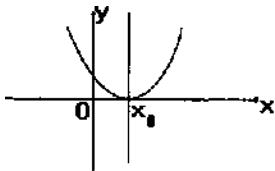


Рис. 2

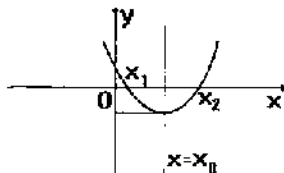


Рис. 3

Если $a > 0$ и $D = 0$, то парабола касается сверху оси Ox (рис. 2).

Если $a > 0$ и $D > 0$, то парабола пересекает ось Ox в двух точках — корнях параболы (рис. 3)

4. Если $a < 0$ и $D < 0$, то парабола «висит» под осью Ox (рис. 4). В случае, когда $a < 0$ и $D = 0$ она касается оси Ox снизу (рис. 5). В случае, когда $a < 0$ и $D > 0$ парабола пересекает ось Ox в двух точках x_1 и x_2 , являющихся ее корнями (рис. 6).

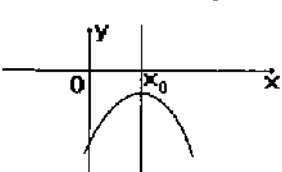


Рис. 4

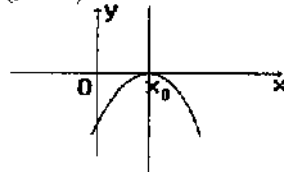


Рис. 5

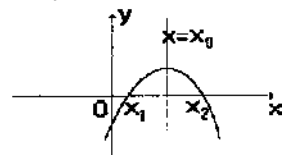


Рис. 6

Указанные свойства парабол позволяют доказать следующие факты, касающиеся расположения корней квадратного трехчлена на числовой оси.

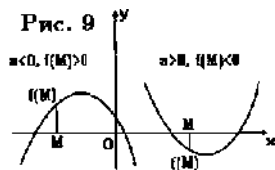
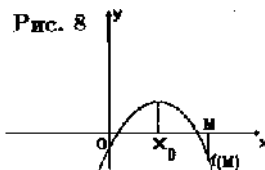
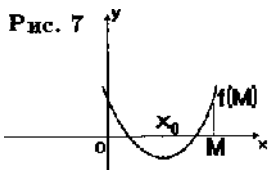
На третьем уровне достаточно хорошо запомнить эти факты, на первом и втором необходимо уметь доказывать их.

5. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$ и M — точка на оси абсцисс. Тогда оба корня x_1 и x_2 трехчлена $f(x)$ будут строго меньше M , если и только если выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} a > 0 \\ D \geq 0 \\ x_0 < m \\ f(M) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0 \\ D \geq 0 \\ x_0 < M \\ f(M) < 0 \end{cases}$$

Здесь $f(M) = aM^2 + bM + c$ — подстановка M вместо переменной квадратного трехчлена. Ситуация проиллюстрирована на рисунках 7 и 8.

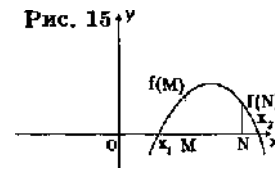
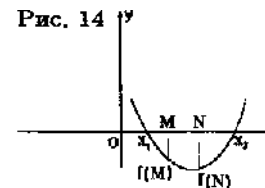
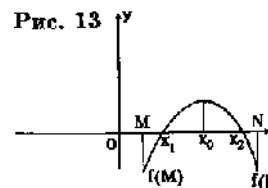
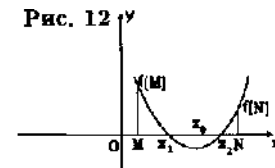
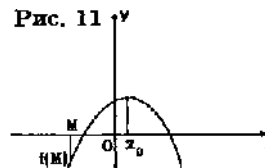
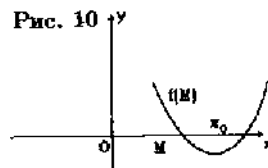
6. Если M — какое-то число, то $x_1 < M < x_2$ в том и только том случае, когда $a \cdot f(M) < 0$ (рис. 9).



7. Оба корня трехчлена $f(x)$ больше некоторого числа M , если и только если

$$\begin{cases} a > 0 \\ D \geq 0 \\ x_0 > M \\ f(M) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0 \\ D \geq 0 \\ x_0 > M \\ f(M) < 0 \end{cases}$$

см. рисунки 10 и 11.



8. Оба корня x_1, x_2 квадратного трехчлена $f(x)$ лежат на интервале (M, N) , если и только если

$$\begin{cases} a > 0 \\ D \geq 0 \\ x_0 \in (M, N) \\ f(M) > 0 \\ f(N) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0 \\ D \geq 0 \\ x_0 \in (M, N), \\ f(M) < 0 \\ f(N) < 0 \end{cases}$$

(см. рисунки 12 и 13).

И, наконец, отрезок $[M, N]$ целиком лежит в интервале (x_1, x_2) тогда и только тогда, когда $a \cdot f(M) < 0$ и $a \cdot f(N) < 0$ (см. рис. 14 и 15).

Я, разумеется, перечислил не все возможные случаи. Но тот, кто понял приведенные утверждения, вполне способен выписать систему уравнений и неравенств, характеризующих какое-то еще расположение корней квадратного трехчлена на вещественной оси. Теперь можно приступить к решению задач.

► **Задача 1.** При каких a оба корня уравнения

$$x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$$

больше трех?

Решение. Коэффициент при x^2 у нас положителен, так что наша ситуация отображена на рис. 10. Учитывая то, что $x_0 = 3a$, $\frac{D}{4} = 9a^2 - 2 + 2a - 9a^2 = 2a - 2$ и $f(3) = 9a^2 - 20a + 11$, получаем систему условий на a , равносильную исходной задаче:

$$\begin{cases} 2a - 2 \geq 0 \\ 3a > 3 \\ 9a^2 - 20a + 11 > 0 \end{cases}.$$

Решение ее не составляет труда.

Ответ: $a > \frac{11}{9}$. ◀

► **Задача 2.** При каких a оба корня уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$ лежат на интервале $(0, 3)$?

Решение. В этой задаче коэффициент при x^2 также положителен. Значит, наша ситуация отражена на рисунке 12 и задача эквивалентна следующей системе.

$$\begin{cases} a^2 - 8 \geq 0 \\ \frac{a}{2} \in (0, 3) \\ 9 - 3a + 2 > 0 \end{cases}.$$

Решается эта система просто.

Ответ: $2\sqrt{2} \leq a < \frac{11}{3}$. ◀

- **Задача 3.** При каких a один корень уравнения $ax^2 + x + 1 = 0$ больше 2, а другой корень меньше 2?

Решение. На рисунке 9 изображена ситуация, указанная в нашей задаче. Условие ее эквивалентно неравенству

$$af(2) < 0 \iff a(4a + 2 + 1) < 0 \iff a \in \left(-\frac{3}{4}, 0\right),$$

и наша задача решена.

Ответ: $-\frac{3}{4} < a < 0$. ◀

- **Задача 4.** При каких a неравенство $ax^2 + (a+1)x - 3 < 0$ выполняется при всех $x < 2$?

Решение. Главное, что характеризует квадратную параболу — это коэффициент при x^2 . У нас он зависит от параметра, поэтому надо разобрать три случая.

Случай 1. $a < 0$. Если $D = a^2 + 14a + 1 < 0$, то трехчлен отрицателен при всех x и, в частности, при $x < 2$. Поэтому, все решения неравенства $D < 0$ пойдут в ответ: $a \in (-7 - 4\sqrt{3}, -7 + 4\sqrt{3})$.

Если $D \geq 0$, то парабола пересекает ось Ox и та ее часть, что находится выше оси Ox должна вся быть правее точки 2 (см. рис. 16). Рисунок подсказывает нам, что в этом случае трехчлен будет отрицателен при всех $x < 2$ если и только если

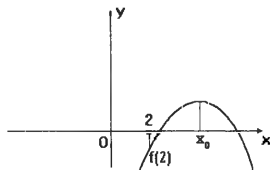


Рис. 16

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_0 = -\frac{a+1}{2a} \geq 2 \iff a \in [-7 + 4\sqrt{3}, 0). \\ f(2) \leq 0 \end{cases}$$

Мы получили еще один кусок ответа: $a \in [-7 + 4\sqrt{3}, 0)$.

Случай 2. $a = 0$. Получаем неравенство $x - 3 < 0$. Ясно, что оно выполнено при всех $x < 2$ (и даже при всех $x < 3$), так что и $a = 0$ годится.

Случай 3. $a > 0$. Мы уже видели, что в этом случае дискриминант уравнения положителен, т.е. уравнение имеет корни x_1 и x_2 , причем $x_1 x_2 = -\frac{3}{a} < 0$. Значит, $x_1 < 0$ (мы считаем, что x_1 — меньший корень). Отсюда уже видно, что ни одно положительное a не годится, так как $x_1 < 0 < 2$, но $f(x_1) = 0$, так что неравенство $f(x) < 0$ не выполняется для некоторого $x < 2$ (а именно, для $x = x_1$).

Ответ: $a \in (-7 - 4\sqrt{3}, 0]$. ◀

- **Задача 5.** При каких a из $x < 1$ следует, что $1 - ax^2 \geq 0$?

Решение. Если $a \leq 0$, то $1 - ax^2 \geq 0$ для любого x , а не только для $x < 1$, так что все эти a входят в ответ.

Если $a > 0$, то для $x_0 = -\sqrt{\frac{1}{a}} - 1$ имеем

$$1 - ax_0^2 = 1 - a \left(\frac{1}{a} + 2\sqrt{\frac{1}{a}} + 1 \right) = -2\sqrt{a} - a < 0,$$

причем $x_0 < 0 < 1$. Значит, для любого $a > 0$ найдется $x_0 < 1$ такое, что $1 - ax_0^2 < 0$. Отсюда следует, что ни одно такое a не годится.

Ответ: $a \leq 0$. ◀

► **Задача 6.** При каких a из $1 - ax^2 \geq 0$ следует, что $x < 1$?

Решение. Если $a \leq 0$, то $1 - ax^2 \geq 0$ для всех x , и, в частности, для $x = 1$, так что из того, что $1 - ax^2 \geq 0$ не следует, что $x < 1$.

Пусть $a > 0$. Тогда решения неравенства $1 - ax^2 \geq 0$ представляют собой отрезок $[-\sqrt{\frac{1}{a}}, \sqrt{\frac{1}{a}}]$. Для того, чтобы выполнялось условие задачи, он должен целиком лежать в области $x < 1$. Ясно, что это имеет место только тогда, когда $\sqrt{\frac{1}{a}} < 1 \iff a > 1$.

Ответ: $a > 1$. ◀

► **Задача 7.** При каких a уравнение $4^{\frac{x}{2}} + a \cdot 4^{\frac{1}{2}} - a - 1 = 0$ имеет решение?

Решение. Пусть $4^{\frac{x}{2}} = y$. Тогда исходное уравнение перепишется в виде

$$y^2 + ay - a - 1 = 0 \iff (y - 1)(y + a + 1) = 0.$$

Уравнение $4^{\frac{x}{2}} = 1$ не имеет решений, так как $\frac{1}{x}$ не может равняться нулю. Следовательно, исходное уравнение имеет решения если и только если имеет решение уравнение $4^{\frac{x}{2}} = -a - 1$.

Уравнение $4^{\frac{x}{2}} = -a - 1$ имеет решение только при $-a - 1 > 0$, $-a - 1 \neq 1$.

Ответ: $a < -1$, $a \neq -2$. ◀

► **Задача 8.** При каких a неравенство

$$\sin^4 x + \cos^4 x > a \sin x \cos x$$

выполнено при всех x ?

Решение. Преобразуем сначала левую часть неравенства:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x.$$

кроме того, его правая часть равна $\frac{a}{2} \sin 2x$. Если мы обозначим $\sin 2x$ через y , исходное неравенство примет вид

$$(2) \quad 1 - \frac{1}{2}y^2 > \frac{a}{2}y \iff y^2 + ay - 2 < 0.$$

Поскольку $\sin 2x$ может принимать любые значения из отрезка $[-1, 1]$, исходное неравенство выполняется при любых x если и только если неравенство (2) выполняется при любых $y \in [-1, 1]$.

Наша ситуация изображена на рисунке 14 при $M = -1$, $N = 1$. Она имеет место, когда a удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} f(1) = 1 + a - 2 < 0 \\ f(-1) = 1 - a - 2 < 0 \end{cases} \iff a \in (-1, 1),$$

и наша задача решена.

Ответ: $a \in (-1, 1)$. ◀

► **Задача 9.** Решить неравенство $\sqrt{ax} \geq x + a$ при всевозможных a .

Решение. Наше неравенство эквивалентно следующей совокупности:

$$\begin{cases} \begin{cases} ax \geq (a+x)^2 \\ a+x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} ax \geq 0 \\ a+x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Решим первую систему неравенств:

$$\begin{cases} ax \geq (a+x)^2 \\ a+x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + ax + a^2 \leq 0 \\ a+x \geq 0 \end{cases} \iff a = x = 0,$$

так как первое неравенство имеет отрицательный дискриминант при $a \neq 0$.

Вторая система решается совсем просто — надо рассмотреть три случая: $a < 0$, $a = 0$ и $a > 0$. В первом и втором годятся все $x \leq 0$, а в третьем решений нет.

Ответ: если $a > 0$, то нет решений; если $a \leq 0$, то $x \leq 0$. ◀

► **Задача 10.** При каких a область значений функции $y = ax^2 + x + 1$ содержит отрезок $[-1, 1]$?

Решение. Если $a = 0$, то получаем функцию $y = x + 1$, область значений которой равна всей прямой. Значит $a = 0$ годится. Если $a > 0$, то область значений параболы есть луч $[y_0, +\infty)$, где $y_0 = \frac{4a-1}{4a}$. Этот луч содержит отрезок $[-1, 1]$, если и только если

$$y_0 = \frac{4a-1}{4a} \leq -1 \iff a \leq \frac{1}{8}$$

мы учли, что $a > 0$ и умножили неравенство на $4a$.

Аналогичным образом, если $a < 0$, то областью значений параболы будет луч $(-\infty, y_0]$. Он содержит отрезок $[-1, 1]$ тогда и только тогда, когда

$$y_0 = \frac{4a-1}{4a} \geq 1 \iff 4a-1 \leq 4a \iff -1 \leq 0, -$$

здесь мы выполнили умножение на отрицательное число $4a$, заменив знак неравенства. Ясно, что все $a < 0$ подходят.

Ответ: $a \leq \frac{1}{8}$. ◀

Наш урок окончен. Оценка выставляется стандартным образом.

Домашнее задание

- 1. Найти все a , при которых квадратный трехчлен

$$p(x) = (a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 1$$

положителен при всех x .

- 2. При каких a оба корня уравнения $(2 - a)x^2 - 3ax + 2a = 0$ больше $1/2$?

- 3. При каких a оба корня уравнения $(2 + a)x^2 - 2ax + 3a = 0$ положительны?

- 4. При каких a оба корня уравнения $x^2 + 4ax + (1 - 2a + 4a^2) = 0$ меньше -1 ?

- 5. При каких a один из корней уравнения

$$(a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 3)x + a - 5 = 0$$

больше 1, а другой меньше 1?

- 6. Существуют ли такие a , что корни уравнения $x^2 + 2x + a = 0$ различны и лежат между -1 и $+1$?

- 7. При каких a оба корня уравнения $ax^2 - (a + 1)x + 2 = 0$ по модулю меньше 1?

- 8. При каких a оба корня уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$ лежат на интервале $(0, 3)$?

- 9. При каких m неравенство $x^2 + mx + m^2 + 6m < 0$ выполняется при всех $x \in (1, 2)$?

- 10. При каких m неравенство $mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0$ выполнено при всех $x > 0$?

- 11. При каких a неравенство $(a - 1)x^2 + (2a - 3)x + (a - 3) > 0$ выполнено хотя бы при одном $x < 1$?

- 12. Найти все a , при которых оба корня уравнения $x^2 + x + a = 0$ больше a .

- 13. При каких m из неравенства $x^2 - (3m + 1)x + m > 0$ следует, что $x > 1$?

- 14. При каких p уравнение $\sin^2 x + p \sin x = p^2 - 1$ имеет решения?

- 15. При каких $m \in (-1, 1)$ уравнение $4^{\sin x} + m \cdot 2^{\sin x} + m^2 - 1 = 0$ имеет решения?

- 16. Существуют ли a такие, что неравенство

$$4^{|\cos x|} + 2(2a + 1) \cdot 2^{|\cos x|} + 4a^2 - 3 < 0$$

выполнено при всех x ?

- 17. При каких a из неравенства $ax^2 - x + 1 - a < 0$ следует неравенство $0 < x < 1$?

- 18. Найти все a такие, что если x удовлетворяет неравенству

$$ax^2 + (1 - a^2)x - a > 0,$$

то $|x| \leq 2$.

- 19. Найти все a , при которых из неравенства $x^2 - a(1 + a^2)x + a^4 < 0$ следует неравенство $x^2 + 4x + 3 > 0$.

- 20. При каких a неравенство $\sin^6 x + \cos^6 x + a \sin x \cos x \geq 0$ выполнено для всех x ?

- 21. При каких a уравнение

$$(1 + a) \left(\frac{x^2}{1 + x^2} \right)^2 - 3a \cdot \frac{x^2}{x^2 + 1} + 4a = 0$$

имеет корни?

- 22. Для каждого a решить уравнение $x + \sqrt{x} = a$.

- 23. Для каждого a решить уравнение

$$\left(\frac{1 + x}{\sqrt{x}} \right)^2 + 2a \cdot \frac{1 + x}{\sqrt{x}} + 1 = 0.$$

- 24. При каких y неравенство

$$2 \log_{\frac{1}{2}} y^2 - 3 + 2x \log_{\frac{1}{2}} y^2 - x^2 > 0$$

имеет решения?

- 25. Для каждого a решить уравнение $\sqrt{a(2^x - 2) + 1} = 1 - 2^x$.

Урок 37

Логические задачи. Необходимость и достаточность

На этом уроке мы продолжим работу над задачами, зависящими от одного или нескольких параметров. Это — уравнения, неравенства или системы, про которые, в зависимости от параметров, нужно будет что-то выяснить. Это «что-то» будет практически тем же, что и для квадратных трехчленов, т.е. будет ли решение единственным, будет ли вообще оно существовать, будет ли данная система (уравнение, неравенство) эквивалентна какой-то другой и т.п.

Пусть дана система уравнений (или неравенств) с двумя переменными, зависящая от параметра, причем требуется отыскать все значения параметра, при которых она имеет единственное решение. Часто срабатывает следующий прием: экспериментируя, находим, что, если (x_0, y_0) — решение системы, то и $(-x_0, y_0)$ — тоже ее решение (не обязательно будет так, что решение останется решением при замене знака x_0 , может быть, это произойдет при замене y_0 на $y_0 + 1$ и т.п. — поиск такой закономерно-

сти и назван экспериментированием). Далее рассуждаем так: пусть параметр(ы) таков(ы), что система имеет единственное решение (x_0, y_0) . Тогда $(-x_0, y_0)$ — тоже решение системы, совпадающее с (x_0, y_0) (ибо последнее единственно). Значит, $x_0 = -x_0 \iff x_0 = 0$ и уже можно подставить $x_0 = 0$ в данную систему и найти y_0 и параметр(ы). После этого необходимо убедиться, что найденные значения параметров удовлетворяют условию задачи. Для этого их надо подставить в исходную систему и проверить, будет ли решение (x_0, y_0) единственным.

Если требуется найти значения параметров, при которых два данных уравнения (зависящие от параметров) эквивалентны, то чаще всего надо угадать корень одного из них и подставить в другое. Это часто позволяет найти параметры, которые потом еще необходимо проверить на предмет выполнения условий задачи.

Если логическое высказывание про a нестандартно, надо стремиться упростить его, разбивая на объединение более простых, следя за тем, чтобы совокупность этих более простых высказываний логически была в точности эквивалентна рассматриваемому.

Часто полезно воспользоваться методами, приведенными на уроке 25 и нарисовать на плоскости множество решений данного уравнения (неравенства, системы). Тогда логические высказывания о свойствах уравнения (неравенства, системы) можно перевести на геометрический язык и понять, как решать задачу. Вот пример такого перевода: каждое решение одной системы является решением другой, если и только если множество решений первой системы, нарисованное на плоскости, целиком лежит в множестве решений второй системы.

- **Задача 1.** Даны три утверждения: (а) уравнение $x + \frac{1}{x} = a$ не имеет корней; (б) справедливо равенство $\sqrt{a^2 - 4a + 4} = 2 - a$; (в) система
$$\begin{cases} x + y^2 = a \\ x - \sin^2 y = -3 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

При каких a два из утверждений (а)–(в) истинны, а одно ложно?

Решение. Первым делом здесь надо упростить каждое из утверждений (а)–(в), заменив его на эквивалентное. Начнем с (а).

Уравнение $x + \frac{1}{x} = a$ равносильно уравнению $\frac{x^2 - ax + 1}{x} = 0$. Последнее не имеет корней если и только если либо числитель не имеет корней, либо имеет единственный корень, равный нулю (чего не бывает). Значит, условие (а) эквивалентно тому, что дискриминант уравнения $x^2 - ax + 1$ отрицателен, т.е. $a^2 - 4 < 0 \iff a \in (-2, 2)$.

Условие (б) есть просто уравнение относительно a . Решив его, найдем, что (б) эквивалентно тому, что $a \leq 2$.

Предположим, что a таково, что система из (в) имеет единственное решение (x_0, y_0) . Ясно, что тогда и $(x_0, -y_0)$ — тоже решение этой системы,

совпадающее с (x_0, y_0) ввиду единственности последнего. Значит, $y_0 = -y_0 \iff y_0 = 0$. Подставляем это значение y_0 в систему, получим, что

$$\begin{cases} x_0 + 0 = a \\ x_0 - 0 = -3 \end{cases} \iff x_0 = a = -3.$$

Теперь нужно проверить, что при $a = -3$ система имеет единственное решение. Но в самом деле, если мы вычтем второе уравнение из первого (подставив в первое $a = -3$), то получим $y^2 + \sin^2 y = 0$. Сумма квадратов равна нулю, если и только если каждое из слагаемых равно нулю. Итак, $(-3, 0)$ есть единственное решение системы при $a = -3$ и мы установили, что (в) эквивалентно $a = -3$.

Давайте теперь сообразим, когда два утверждения из (а)-(в) истинны, а одно ложно. Это может быть в одном из трех случаев.

Случай 1. (а) ложно, а (б) и (в) истинны. Истинность (в) означает, что $a = -3$, истинность (б) равносильна тому, что $a \leq 2$, а ложность (а) эквивалентна $|a| \geq 2$. Ясно, что названные условия выполнены одновременно только при $\boxed{a = -3}$.

Случай 2. (б) ложно, (а) и (в) истинны. Значит, одновременно, $a = -3$, $|a| < 2$ и $a > 2$. Понятно, что таких a не существует.

Случай 3. (в) ложно, (а) и (б) истинны. Значит, одновременно должно быть $a \neq -3$, $|a| < 2$ и $a \leq 2$, что имеет место тогда и только тогда, когда $\boxed{a \in (-2, 2)}$.

Ответ: $a \in (-2, 2)$, $a = -3$. ◀

► **Задача 2.** Найти все пары (a, b) такие, что любая пара (x, y) , удовлетворяющая уравнению $\frac{x}{y} = a$ удовлетворяет уравнению $(x + y)^2 = b$.

Решение. Пусть a и b таковы, как требуется в условии задачи. Пары $(a, 1)$ и $(2a, 2)$ удовлетворяют первому уравнению. Следовательно,

$$(a + 1)^2 = (2a + 2)^2 = b \iff (a + 1)^2 = 4(a + 1)^2 = b \iff a = -1, b = 0,$$

так как $b = 4b \iff b = 0$.

Итак, условие задачи столь сильно, что только $a = -1$, $b = 0$ могут подойти. Но при $a = -1$ имеем $x = -y$ и $(x + y)^2 = 0 = b$, т.е. условие задачи выполнено. Значит, имеем

Ответ: $a = -1$, $b = 0$. ◀

► **Задача 3.** При каких a система

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение. Пусть a таково, что наша система имеет единственное решение (x_0, y_0) . Легко видеть, что тогда и пара $(-x_0, y_0)$ также будет решением системы. Отсюда следует, что $x_0 = 0$. Подставляем это значение в систему:

$$\begin{cases} 2^0 + 0 = y + 0 + a \\ 0 + y^2 = 1 \end{cases} \iff y = 1, a = 0 \quad \text{или} \quad y = -1, a = 2.$$

Проверим, годится ли $a = 0$. При таком a имеем систему

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

Из второго ее уравнения заключаем, что $|x| \leq 1$ и $|y| \leq 1$. Значит, $|x| \geq x^2$ и $2^{|x|} \geq y$, причем, если хотя бы одно из этих неравенств является строгим, то сложив их, получим $2^{|x|} + |x| > y + x^2$, тогда как у нас имеет место равенство. Отсюда следует, что $|x| = x^2$ и $2^{|x|} = y$, что возможно только при $x = 0$ и $y = 1$, т.е. наша система действительно, имеет единственное решение $a = 0$ годится.

При $a = 2$ система принимает вид $\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + 2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$. Она, как легко убедиться, имеет, как минимум, два решения $(0, -1)$ и $(1, 0)$. Следовательно, $a = 2$ в ответ не идет.

Ответ: $a = 1$. ◀

► **Задача 4.** При каких a уравнение

$$2 \sin^7 x = (1 + \sin \pi a) \sin x + a \sin^2 x$$

равносильно уравнению

$$(a - 1)(1 + \cos^2 x) + 2 \sin^6 x = 2 \sin^2 x + 2(a - 1)^3.$$

Решение. Легко видеть, что первое уравнение имеет своими решениями такие x , что $\sin x = 0$, т.е. $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. При таких x имеем $\cos^2 x = 1$, и, подставляя найденные значения синуса и косинуса во второе уравнение, получим $2(a - 1) = 2(a - 1)^3$, откуда

$$a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 2.$$

Проверим, какие из найденных a подходят.

Пусть $a = 1$. Тогда первое уравнение принимает вид

$$2 \sin^7 x = \sin x + \sin^3 x \iff \sin x (\sin^2 x - 1)(2 \sin^4 x + 2 \sin^2 x + 1) = 0,$$

что равносильно совокупности равенств $\sin x = 0$, $\sin x = 1$, $\sin x = -1$, так как последний сомножитель не дает решений ввиду отрицательности его дискриминанта.

Второе уравнение при $a = 1$ имеет вид $2 \sin^6 x = 2 \sin^2 x$, откуда $\sin x = \pm 1$ или $\sin x = 0$, т.е. второе уравнение равносильно первому и $\boxed{a = 1}$ обводим как часть ответа.

Пусть $a = 0$. Тогда первое уравнение принимает вид

$$2 \sin^7 x = \sin x \iff \sin x = 0 \quad \text{или} \quad \sin x = \pm \sqrt[6]{\frac{1}{2}}.$$

Второе уравнение при $a = 0$ приобретает вид

$$\begin{aligned} -1 - \cos^2 x + 2 \sin^6 x = 2 \sin^2 x - 2 &\iff 2 \sin^6 x = \sin^2 x \iff \\ &\iff \sin x = 0 \quad \text{или} \quad \sin x = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

откуда видно, что оно не эквивалентно первому, т.е. $a = 0$ не годится.

Пусть $a = 2$. Тогда первое уравнение примет вид

$$2 \sin^7 x = \sin x + 2 \sin^3 x \iff \sin x (2 \sin^6 x - 2 \sin^2 x - 1) = 0.$$

Докажем, что получившееся уравнение эквивалентно $\sin x = 0$. В самом деле, $\sin^2 x \in [0, 1]$ и потому $\sin^6 x = (\sin^2 x)^3 \leq \sin^2 x$. Значит, $2 \sin^6 x - 2 \sin^2 x \leq 0$ и, следовательно, $2 \sin^6 x - 2 \sin^2 x - 1 < 0$, т.е. уравнение $2 \sin^6 x - 2 \sin^2 x - 1 = 0$ не имеет решений. Итак, первое уравнение равносильно тому, что $\sin x = 0$.

Второе уравнение при $a = 2$ имеет вид

$$1 + \cos^2 x + 2 \sin^6 x = 2 \sin^2 x + 2 \iff 2 \sin^6 x = 3 \sin^2 x,$$

и, ясное дело, эквивалентно уравнению $\sin x = 0$, т.е. $a = 2$ тоже входит в ответ.

Ответ: $a = 1$ и $a = 2$. ◀

► **Задача 5** [3]. Найти все a , при которых минимум функции

$$f(x) = 3|x - a| + |x^2 + x - 2|$$

меньше 2.

Решение. Эта задача требует достаточно кропотливого решения. Тем не менее, его можно провести, если четко видеть цель. Я попытаюсь не только решить эту задачу, но и по ходу дела объяснять, как надо «видеть цель».

Как же подступиться к этой задаче? Ясно, что надо раскрывать модули. Первый модуль определяется числом a , которое может быть каким угодно. Зато раскрытие второго модуля зависит только от нулей трехчлена $x^2 + x - 2$, т.е. от чисел -2 и 1 . Теперь понятно, что если мы знаем, как расположено a по отношению к названным числам, то модули раскрыть будет легко. Поэтому мы будем решать исходную задачу для трех случаев.

Случай 1. $a \leq -2$. Раскроем последовательно модули:

а) если $x \leq a$, то

$$f(x) = 3a - 3x + x^2 + x - 2 = x^2 - 2x + 3a - 2.$$

Тогда $f'(x) = 2x - 2 < 0$ при $x \leq a < 1$, т.е. $f(x)$ убывает на этом промежутке.

б) если $a \leq x \leq -2$, то

$$f(x) = 3x - 3a + x^2 + x - 2 = x^2 + 4x - 3a - 2.$$

Тогда $f'(x) = 2x + 4 \leq 0$ при $x \leq -2$, т.е. $f(x)$ убывает и на отрезке $[a, -2]$.

в) если $-2 \leq x \leq 1$, то

$$f(x) = 3x - 3a - x^2 - x + 2 = -x^2 + 2x - 3a + 2.$$

Тогда $f'(x) = -2x + 2 = -2(x - 1) > 0$ и $f(x)$ возрастает.

г) если $x \geq 1$, то

$$f(x) = 3x - 3a + x^2 + x - 2 = x^2 + 4x - 3a - 2.$$

Тогда $f'(x) = 2x + 4 > 0$ и опять $f(x)$ возрастает.

Поведение функции в этом случае изображено на рис. 1.

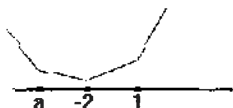


Рис. 1

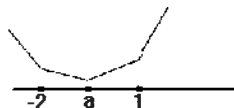


Рис. 2

Рисунок показывает нам, что минимум функции $f(x)$ достигается в точке $x = -2$ и равен $f(-2) = -3a - 6$. Этот минимум должен быть меньше 2, откуда получаем, что $-3a - 6 < 2 \iff a > -\frac{8}{3}$.

Вспоминая, что мы рассматриваем случай $a \leq -2$, получаем первый кусок ответа $\boxed{a \in (-\frac{8}{3}, -2]}$.

Случай 2. $-2 < a \leq 1$. Раскрываем модули так же, как и в первом случае:

а) если $x \leq -2$, то

$$f(x) = 3a - 3x + x^2 + x - 2 = x^2 - 2x + 3a - 2.$$

Тогда $f'(x) = 2x - 2 < 0$ и $f(x)$ убывает.

б) если $-2 \leq x \leq a$, то

$$f(x) = 3a - 3x - x^2 - x + 2 = -x^2 - 4x + 3a + 2.$$

Тогда $f'(x) = -2x - 4 = -2(x + 2) < 0$, т.е. на этом промежутке $f(x)$ также убывает.

в) если $a \leq x \leq 1$, то

$$f(x) = 3x - 3a - x^2 - x + 2 = -x^2 - 4x + 3a + 2.$$

Тогда $f'(x) = -2x + 2 = -2(x - 1) > 0$ и $f(x)$ возрастает.

г) если $x \geq 1$, то

$$f(x) = 3x - 3a + x^2 + x - 2 = x^2 - 2x + 3a - 2.$$

Тогда $f'(x) = 2x - 2 > 0$ и $f(x)$ возрастает.

Иллюстрация поведения функции изображена на рис. 2. Рисунок показывает, что минимальное значение принимается в точке a и равно $f(a) = -a^2 - a + 2$. Согласно условию,

$$-a^2 - a + 2 < 2 \iff a^2 + a > 0 \iff a < -1 \text{ или } a > 0.$$

Отсюда заключаем, что в ответ пойдут два промежутка: $a \in (-2, -1)$ и $a \in (0, 1]$.

Случай 3. $a > 1$. Раскроем последовательно наши модули.

а) если $x \leq -2$, то

$$f(x) = 3a - 3x + x^2 + x - 2 = x^2 - 2x + 3a - 2.$$

Тогда $f'(x) = 2x - 2 < 0$ и $f(x)$ убывает.

б) если $-2 \leq x \leq 1$, то

$$f(x) = 3a - 3x - x^2 - x + 2 = -x^2 - 4x + 3a + 2.$$

Тогда $f'(x) = -2x - 4 < 0$ и $f(x)$ убывает.

в) если $1 \leq x \leq a$, то

$$f(x) = x^2 - 2x + 3a - 2.$$

Тогда $f'(x) = 2x - 2 > 0$ и $f(x)$ убывает.

г) если $x \geq a$, то

$$f(x) = 3x - 3a + x^2 + x - 2 = x^2 + 4x - 3a - 2.$$

Тогда $f'(x) = 2x + 4 > 0$, так что $f(x)$ возрастает. Эскиз поведения функции в этом случае изображен на рис. 3. Он показывает, что минимум функции достигается в точке 1 и равен $f(1) = 3a - 3$. По условию,

$$3a - 3 < 2 \iff x < \frac{5}{3}.$$

Учитывая рассматриваемый случай, получаем $1 < a < \frac{5}{3}$. Теперь осталось полученные три части ответа сложить в кучу.

Ответ: $a \in (-\frac{8}{3}, -1) \cup (0, \frac{5}{3})$. ◀

► **Задача 6.** Изобразить на плоскости Oxy все точки (x, y) , для которых существует хотя бы одно t такое, что выражение

$$\sin^2 t \cos^2 x + \cos^2 t \sin^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x \sin 2t + 2(\cos 2x + \cos y)$$

отрицательно.

Решение. Воспользовавшись формулами $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ и $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$, обнаружим, что первые три слагаемых представляют собой квадрат выражения $\sin t \cos x + \cos t \sin x = \sin(t + x)$,

т.е. исходное выражение равно

$$(\sin(t + x))^2 + 2(\cos 2x + \cos y).$$

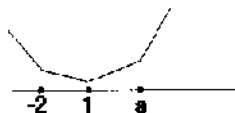


Рис. 3

Если x и y таковы, что $2(\cos 2x + \cos y)$ неотрицательно, то и исходное выражение неотрицательно при любом t , т.е. такие x и y не подходят. Если же $2(\cos 2x + \cos y) < 0$, то при $t = -x$ исходное выражение равно $2(\cos 2x + \cos y)$, т.е. отрицательно. Итак, мы доказали, что искомое множество есть множество всех пар (x, y) таких, что

$$2(\cos 2x + \cos y) = 4 \cos \left(x + \frac{y}{2}\right) \cos \left(x - \frac{y}{2}\right) < 0. \iff$$

$$\iff \begin{cases} \cos \left(x + \frac{y}{2}\right) > 0 \\ \cos \left(x - \frac{y}{2}\right) < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \cos \left(x + \frac{y}{2}\right) < 0 \\ \cos \left(x - \frac{y}{2}\right) > 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} -\pi + 4k\pi < 2x + y < \pi + 4k\pi \\ \pi + 4m\pi < 2x - y < 3\pi + 4m\pi \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \pi + 4k\pi < 2x + y < 3\pi + 4k\pi \\ -\pi + 4m\pi < 2x - y < \pi + 4m\pi \end{cases},$$

где m и k пробегает все целые числа.

Ответ: искомое множество изображено на рис. 4. По оси абсцисс точки идут с шагом $\frac{\pi}{2}$, по оси ординат — с шагом π . Изображено семейство прямых

$y = \pm\pi + 4k\pi - 2x$, $y = \pm\pi + 4k\pi + 2x$, $k, m \in \mathbb{Z}$, и заштрихованы ромбы, которые (не включая их границы) и составляют искомое множество. ◀

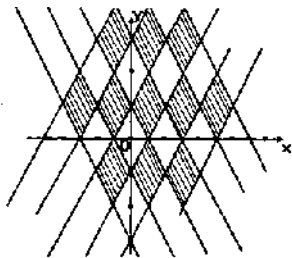


Рис. 4

► **Задача 7 [2].** При всех a решить уравнение

$$(x+2)(x+4) + 5(x+2)\sqrt{\frac{x+4}{x+2}} - (a+2)(a-3) = 0$$

и найти, при каких a оно имеет единственное решение.

Решение. Область допустимых значений уравнения состоит из $x > -2$ и из $x \leq -4$. При таких x выражение $(x+2)(x+4)$ неотрицательно, так что можно ввести новую переменную $y = \sqrt{(x+2)(x+4)}$.

Найдем сначала все решения уравнения, большие, чем -2 . Если $x > -2$, то

$$(x+2)\sqrt{\frac{x+4}{x+2}} = \sqrt{\frac{(x+2)^2(x+4)}{x+2}} = \sqrt{(x+4)(x+2)} = y.$$

С учетом этого, наше уравнение принимает вид

$$y^2 + 5y - (a+2)(a-3) = 0 \iff \begin{cases} y = a-3 \\ y = -2-a \end{cases}$$

Вспоминая, что у нас y неотрицательно, заключаем, что при $a \in (-2, 3)$ решений нет. Если $a \geq 3$, то $\sqrt{(x+2)(x+4)} = a-3 \iff x = -3 \pm \sqrt{1+(a-3)^2}$.

Мы ищем только $x > -2$, так что при $a = 3$ решений нет, а при $a > 3$ нужно выбрать $x = -3 + \sqrt{1+(a-3)^2}$.

Аналогично, при $a = -2$ решений нет, а при $a < -2$ находим, что $x = -3 + \sqrt{1 + (a+2)^2}$.

Займемся теперь поиском всех x таких, что $x \leq -4$. В этом случае

$$(x+2)\sqrt{\frac{x+4}{x+2}} = -\sqrt{\frac{(x+2)^2(x+4)}{x+2}} = \sqrt{(x+4)(x+2)} = -y,$$

откуда имеем уравнение

$$y^2 - 5y - (a+2)(a-3) = 0 \iff \begin{cases} y = -a+3 \\ y = 2+a \end{cases}$$

Оно уже имеет решения при любых a . Если $a < -2$, то

$$(1) \quad \sqrt{(x+2)(x+4)} = 3-a \iff x = -3 - \sqrt{1 + (3-a)^2}.$$

Мы выбрали знак минус, поскольку ищутся только $x \leq -4$.

Если $-2 \leq a \leq 3$, то значение x , найденное по формуле (1), все еще будет подходить, но к нему нужно будет присоединить решение уравнения $y = a+2$:

$$(2) \quad \sqrt{(x+2)(x+4)} = a+2 \iff x = -3 - \sqrt{1 + (a+2)^2}.$$

Наконец, если $a > 3$, то будем иметь только решение, даваемое формулой (2).

Теперь уже видно, как решить исходное уравнение при любых a . Сделать это — значит, найти при данном a как $x \leq -4$, так и $x > -2$.

Случай 1. $a < -2$. Тогда среди $x > -2$ будет только одно значение $x = -3 + \sqrt{1 + (a+2)^2}$, а из $x \leq -4$ в ответ войдет только $x = -3 - \sqrt{1 + (a-3)^2}$.

Случай 2. $-2 \leq a \leq 3$. Тогда среди $x \leq -4$ будут два решения — $x = -3 - \sqrt{1 + (a-3)^2}$ и $x = -3 - \sqrt{1 + (a+2)^2}$. Решений среди $x > -2$ не будет.

Случай 3. $a > 3$. Тогда будем иметь одно решение, большее, чем -2 , и одно, не превосходящее -4 , т.е. $x = -3 + \sqrt{1 + (a-3)^2}$ и $x = -3 - \sqrt{1 + (a+2)^2}$.

Указанный разбор случаев дает нам решение исходного уравнения для любого a . Осталось ответить на вопрос, когда имеется единственное решение. Ясно, что в первом и в третьем случаях имеется два решения, одно из которых > -2 , а другое ≤ -4 . Во втором случае решения могут совпадать, только если

$$-3 - \sqrt{1 + (a-3)^2} = -3 - \sqrt{1 + (a+2)^2} \iff (a-3)^2 = (a+2)^2 \iff a = \frac{1}{2}.$$

Ответ: Если $a < -2$, то $x = -3 + \sqrt{1 + (a+2)^2}$ и $x = -3 - \sqrt{1 + (a-3)^2}$.

Если $-2 \leq a \leq 3$, то $x = -3 - \sqrt{1 + (a-3)^2}$ и $x = -3 - \sqrt{1 + (a+2)^2}$.

Если $a > 3$, то $x = -3 + \sqrt{1 + (a-3)^2}$ и $x = -3 - \sqrt{1 + (a+2)^2}$.

Решение единственно при $a = \frac{1}{2}$. ◀

► **Задача 8 [2].** Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} \left| 6\sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}} - 5 \right| + \left| 12\sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}} + 1 \right| - \left| 1 - 6\sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}} \right| = 5 - \left(\sin \frac{\pi(y-2x)}{12} \right)^2 \\ 10 - 9(x^2 + (y-a)^2) = 3\sqrt{x^2 + (y-a)^2 - \frac{8}{9}} \end{cases}.$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Если мы обозначим выражение $x^2 + (y-a)^2$ через z , то получим уравнение относительно z :

$$10 - 9z = 3\sqrt{z - \frac{8}{9}} \iff \begin{cases} (10 - 9z)^2 = 9z - 8 \\ 10 - 9z \geq 0 \end{cases} \iff z = 1.$$

Значит, можно переписать второе уравнение системы в виде

$$x^2 + (y-a)^2 = 1.$$

Теперь займемся первым уравнением. Обозначим через z выражение $\sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}}$. Тогда $0 \leq z \leq 1$ и левая часть уравнения равна

$$|6z - 5| + 12z + 1 - |6z - 1| = \begin{cases} 5 - 6z + 12z + 1 + 6z - 1 = 12z + 5 & \text{при } z \leq \frac{1}{6} \\ 5 - 6z + 12z + 1 - 6z + 1 = 7 & \text{при } \frac{1}{6} \leq z \leq \frac{5}{6} \\ 6z - 5 + 12z + 1 + 1 - 6z = 12z - 3 & \text{при } z \geq \frac{5}{6}. \end{cases}$$

В первом случае раскрытия модулей левая часть не меньше 5, во втором и в третьем — не меньше 7. Ясно, что правая часть уравнения не превосходит 5 и может равняться пяти только при $\sin \frac{\pi(y-2x)}{12} = 0$. Из приведенного раскрытия модулей следует, что левая часть может равняться пяти только при $z = 0$.

Мы доказали, что первое уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi y}{4} = 0 \\ \sin \frac{\pi(y-2x)}{12} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\pi y}{4} = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z} \\ \frac{\pi(y-2x)}{2} = k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} y = 4n + 2, \quad n \in \mathbf{Z} \\ y - 2x = 12k, \quad k \in \mathbf{Z} \end{cases}.$$

Окончательно находим, что

$$\begin{cases} x = 2k - 6n + 1 \\ y = 4k + 2 \end{cases}, \quad k, n \in \mathbf{Z}.$$

Из $x^2 + (y-a)^2 = 1$ следует, что $|x| \leq 1$. Учитывая, что k и n — целые числа, получаем, что либо $2k - 6n = 0 \iff k = 3n$, либо $2k - 6n = -2 \iff k = 3n - 1$. В любом случае $x^2 = 1$, так что $(y-a)^2 = 0 \iff y = a$.

Из $y = 4k - 2 = a$ получаем, что либо $a = 12k + 2$, либо $a = 12k - 2$. Из того, что все приведенные преобразования были эквивалентными, следует, что для таких a исходная система действительно имеет решение, а именно, если $a = 12k \pm 2$, то $x = \pm 1, y = a$ есть решение исходной системы.

Ответ: $a = 12k - 2, a = 12k + 2, k \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 9.** Найти все $x < 1$, удовлетворяющие неравенству

$$\log_{\frac{x(1+a)}{3}} \left(\frac{ax^2}{9} + 1 \right) < 1$$

при всех $a \in (\frac{1}{2}, 2)$.

Решение. Если x таково, как требуется в задаче, то $x > 0$ — иначе основание логарифма не определено. Кроме того, при указанных x и a основание логарифма меньше единицы, так что исходное неравенство эквивалентно тому, что

$$\frac{ax^2}{9} + 1 > \frac{x(a+1)}{3} \iff (x-3)(ax-3) > 0.$$

Но последнее неравенство выполняется при любых $x \in (0, 1)$ и $a \in (\frac{1}{2}, 2)$, так как $x-3 < 0$ и $ax-3 < 0$.

Ответ: $0 < x < 1$. ◀

► **Задача 10.** Для каких a неравенство $\log_{\frac{1}{a+1}}(x^2 + 2|a|) > 0$ выполнено при всех x ?

Решение. В область допустимых значений указанного неравенства входят только $a > -1$, $a \neq 0$. Если $a > 0$, то основание логарифма меньше единицы и исходное неравенство эквивалентно $x^2 + 2|a| < 1$. Последнее неравенство обязано выполняться при любых x , чего никак не может быть — возьмите хотя бы $x = 1$. Значит, ни одно $a > 0$ не годится.

Пусть $-1 < a < 0$. Тогда при любых x обязано выполняться неравенство $x^2 + 2|a| > 1$. Если подставить $x = 0$, то получим $2|a| > 1 \iff -1 < a < -\frac{1}{2}$. С другой стороны, ясно, что при таких a последнее неравенство выполняется при любых x .

Ответ: $-1 < a < -\frac{1}{2}$. ◀

► **Задача 11.** При каких a, b, c и d уравнения $xy = 1$ и

$$axy + b \lg(\sqrt{x^2 + 1} + x) = c + d \lg(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

эквивалентны?

Решение. Легко проверяется, что $\sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$ и, следовательно,

$$\lg(\sqrt{x^2 + 1} - x) = -\lg(\sqrt{x^2 + 1} + x),$$

так что второе уравнение переписывается в виде

$$axy + (b + d) \lg(\sqrt{x^2 + 1} + x) = c.$$

Первое уравнение имеет своими решениями пары $(1, 1)$ и $(-1, -1)$. Если второе уравнение эквивалентно первому, то эти пары есть также и его решения. Подставляя их, получим

$$\begin{cases} a + (b + d) \lg(\sqrt{2} + 1) = c \\ a + (b + d) \lg(\sqrt{2} - 1) = c. \end{cases}$$

Мы знаем, что $\lg(\sqrt{2} + 1) + \lg(\sqrt{2} - 1) = 0$, так что, сложив полученные уравнения, получим, что $a = c$. Подставляя a вместо c в первое уравнение, получим $(b + d) \lg(\sqrt{2} + 1) = 0$, откуда $b = -d$, так как логарифм не равен нулю.

Мы доказали, что если исходные уравнения эквивалентны, то второе из них имеет вид $axy = a$. Ясно, что обратное тоже верно при $a \neq 0$.

Ответ: при $a = c \neq 0$, и $b = -d$. ◀

Наш урок окончен. Оценка по стандартным критериям.

Домашнее задание

- 1. Изобразить на плоскости все точки (x, y) такие, что выражение

$$\sin^2(t + x) + \sin(t + y) + \sin(t + 2x - y) + \frac{1}{4}$$

положительно для любого t .

- 2. Изобразить на плоскости все точки (x, y) , для которых существует хотя бы одно t , такое, что выражение

$$\cos(t + 3x + y) - \cos(t + x - y) - \sin^2(t + 2x)$$

больше $\frac{1}{4}$.

- 3. При каких a минимум функции

$$f(x) = x^2 + 2|x + a - 1| + (a + 1)^2$$

меньше трех?

- 4. При каких a и b каждое решение уравнения $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = a$ удовлетворяет уравнению $\frac{x}{y} = b$?

- 5. При каких a и b каждая пара (x, y) (где $x, y \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$), удовлетворяющая уравнению $x + y = a$, удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = b?$$

- 6. При каких a системы

$$\begin{cases} \sin(x + y) = 0 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

равносильны?

- 7. При каких a система $\begin{cases} ax^2 + a - 1 = y - |\sin x| \\ \operatorname{tg}^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение?

- 8. Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} 2^{bx} + (a+1)by^2 = a^2 \\ (a-1)x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$$

имеет решение для любого b .

- 9. Найти все a и b такие, что система

$$\begin{cases} \left| \frac{x^y - 1}{x^y + 1} \right| = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$$

имеет единственное решение (x_0, y_0) такое, что $x_0 > 0$.

- 10. Найти все a и b такие, что система

$$\begin{cases} xyz + z = a \\ xyz^2 + Z = b \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

- 11. Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} (x^2 + 1)^a + (b^2 + 1)^y = 2 \\ a + bxy + x^2y = 1 \end{cases}$$

имеет решение для любого b .

- 12. При каких a система

$$\begin{cases} x^y = a \\ \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} + y \end{cases}$$

имеет единственное решение (x_0, y_0) , где $x_0 > 0$.

- 13. Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} x^3 - ay^3 = \frac{1}{2}(a+1)^2 \\ x^3 + ax^2y + xy^2 = 1 \end{cases}$$

имеет решение и каждое ее решение удовлетворяет условию $x + y = 0$.

- 14. При каких a система

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \sin x = a \\ \frac{y}{x} + \sin y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение (x_0, y_0) такое, что $0 \leq x_0 \leq 2\pi$, $0 \leq y_0 \leq 2\pi$?

- 15. Дана система

$$(3) \quad \begin{cases} a^x + a^y = \frac{1}{2} \\ x + y = b^2 + 1 \end{cases}$$

При каких a и b система имеет хотя бы одно решение?

- 16. При каких a и b система (3) имеет единственное решение?

- 17. При каких a и b система (3) имеет решение для любого b ?

- 18. При каких a уравнения

$$\sin 3x - a \sin x + (4 - 2|a|) \sin^2 x$$

и

$$\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2 \sin x \cos 2x$$

равносильны?

- 19 [3]. При каких a уравнение $1 + \sin^2 ax = \cos x$ имеет единственное решение?

- 20. При каких a, b и c уравнения $xy - yz = 1$ и

$$axy + byz + c\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 1}$$

равносильны?

- 21. При каких a для любого b найдется c такое, что система

$$\begin{cases} bx - y = ac^2 \\ (b - 6)x + 2by = c + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

- 22. Дана система уравнений

$$(4) \quad \begin{cases} \sin x \sin y = p \sin \alpha \\ \cos x \cos y = p \cos \alpha \end{cases}.$$

Найти все p такие, что найдется α , при котором система имеет решения.

- 23. Найти все p такие, что система (4) имеет решения для любого α .
- 24. При каких a уравнение $x - \frac{a}{2} = 4|4|x| - a^2|$ имеет ровно три корня. Найти эти корни.
- 25. Для каждого $a \geq 0$ решить неравенство

$$a^3 x^4 + 2a^2 x^2 - 8x + a + 4 \geq 0.$$

- 26. Найти все b , при которых оба неравенства системы

$$\begin{cases} 2b \sin^2(x + y) + b > 4b^3 \sin(x + y) + b^3 \\ x^2 + (b^4 + 1)y^2 + b > 2xy \end{cases}$$

выполняются при любых x и y .

- 27. При каких a система

$$\begin{cases} \left| 12\sqrt{\cos \frac{\pi y}{2}} - 5 \right| - \left| 12\sqrt{\cos \frac{\pi y}{2}} - 7 \right| + \left| 24\sqrt{\cos \frac{\pi y}{2}} + 13 \right| = \\ = 11 - \sqrt{\sin \frac{\pi(x-2y-1)}{3}} \\ 2(x^2 + (y-a)^2) - 1 = 2\sqrt{x^2 + (y-a)^2} - \frac{3}{4} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Урок 38 [3]

Более сложные логические задачи

Содержание этого урока в точности совпадает с его названием. Никаких новых методов сегодня предложено не будет. Цель урока — накопление опыта работы со сложными логическими выкладками при решении задач с параметрами. Я хотел бы, чтобы вы освоились с такими задачами и не боялись их.

► **Задача 1.** Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 8 \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Обозначим выражение $a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105}$ через A . Умножим первое уравнение системы на A , а второе на 8 и вычтем одно из другого. Получим, что

$$(1) \quad (16 - A)x^2 + (32 + 2A)xy + (40 + 3A)y^2 = 0.$$

Ясно, что это уравнение вместе с первым уравнением исходной системы образует систему, эквивалентную исходной. Если подставить $x = 0$ в первое уравнение, получим $-3y^2 = 8$, чего не может быть. Значит, $x \neq 0$ и уравнение (1) можно поделить на x^2 :

$$(2) \quad (40 + 3A) \left(\frac{y}{x}\right)^2 + (2A + 32) \left(\frac{y}{x}\right) + 16 - A = 0.$$

Получившееся уравнение имеет решения относительно $\frac{y}{x}$ тогда и только тогда, когда его дискриминант D неотрицателен, т.е. при $(A + 16)^2 - (40 + 3A)(16 - A) \geq 0 \iff A \in (-\infty, -3 - \sqrt{105}] \cup [-3 + \sqrt{105}, +\infty)$.

Вспомнив теперь, что согласно второму уравнению исходной системы

$$A = 2x^2 + 4xy + 5y^2 = 2(x + y)^2 + y^2 \geq 0,$$

закключаем, что $A \geq -3 + \sqrt{105}$.

Вообще говоря, может оказаться так, что $D \geq 0$, т.е. можно найти $k = \frac{y}{x}$, но система не имеет решений. Мы ведь должны подставить $y = kx$ в первое уравнение. Система будет иметь решение тогда и только тогда, когда в результате такой подстановки первое уравнение будет разрешимо относительно x . Посмотрим, что получится при указанной подстановке:

$$x^2 - 2kx^2 - 3k^2x^2 = 8 \iff x^2(1 - 2k - 3k^2) = 8.$$

Получившееся уравнение разрешимо относительно x , если и только если

$$1 - 2k - 3k^2 \geq 0 \iff k \in \left[-1, \frac{1}{3}\right].$$

Итак, исходная система будет иметь решение, если и только если уравнение (2) будет иметь хотя бы один корень, лежащий на отрезке $[-1, \frac{1}{3}]$.

Из $A \geq 0$ следует, что ось параболы (2) проходит через этот отрезок. Действительно, пусть $x = x_0$ — уравнение оси. Тогда

$$x_0 = -\frac{a+16}{40+3A} \geq -1 \iff \frac{a+16}{40+3A} \leq 1 \iff a+16 \leq 40+3A,$$

а последнее неравенство очевидно при $A \geq 0$. Кроме того, $x_0 < 0 < \frac{1}{3}$, так что x_0 действительно лежит на отрезке $[-1, \frac{1}{3}]$.

Если мы обозначим через $f(x)$ квадратный трехчлен из уравнения (2), то

$$f(-1) = 24 > 0 \text{ и } f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{40}{9} + \frac{32}{3} + 16 > 0.$$

Вспомнив урок 36 (см. п.8 вводного материала), заключаем, что если уравнение (2) имеет корни, то оба они лежат на отрезке $[-1, \frac{1}{3}]$. Следовательно, условие $A \geq -3 + \sqrt{105}$ необходимо и достаточно для наличия решений исходной системы.

Но $A = (a(a-2))^2 - 12 + \sqrt{105}$, так что неравенство $A \geq -3 + \sqrt{105}$ эквивалентно тому, что

$$(a(a-2))^2 \geq 9 \iff a(a-2) \leq -3 \text{ или } a(a-2) \geq 3 \iff a \geq 3 \text{ или } a \leq -1,$$

и наша задача полностью решена.

Ответ: $a \leq -1$, $a \geq 3$. ◀

► **Задача 2.** Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} x - by + az^2 = 0 \\ 2bx + (b-6)y - 8z = 8 \end{cases}$$

имеет решение (x, y, z) для любого b .

Решение. Выразим x из первого уравнения и подставим во второе:

$$(3) \quad 2b(by - az^2) + (b-6)y - 8z = 8 \iff (2b^2 + b - 6)y = 2abz^2 + 8z + 8.$$

Если мы найдем такие a , что уравнение (3) имеет решения (y, z) при любом b , то, опять-таки при любом b можно будет найти x по формуле $x = by - az^2$, т.е. система решается относительно всех переменных при любом b . Обратно, если система имеет решение (x, y, z) при любом b , то пара (y, z) при том же b будет решением уравнения (3).

Значит, мы должны найти такие a , что уравнение (3) имеет решения относительно (y, z) при любых b . Однако, при $2b^2 + b - 6 \neq 0 \iff b \neq -2, \frac{3}{2}$ уравнение (3) имеет решение — можно положить $z = 0$ и $y = \frac{8}{2b^2 + b - 6}$.

Если $b = -2$, то получаем уравнение

$$(4) \quad -4az^2 + 8z + 8 = 0 \iff az^2 - 2z - 2 = 0,$$

которое имеет решение при $D \geq 0 \iff 1 + 2a \geq 0 \iff a \geq -\frac{1}{2}$.

Аналогично, при $b = \frac{3}{2}$ получается уравнение

$$(5) \quad 3az^2 + 8z + 8 = 0,$$

которое имеет решение при $16 - 24a \geq 0 \iff a \leq \frac{2}{3}$.

Мы доказали, что если a удовлетворяет условию задачи, то $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$. Обратно, если a принадлежит этому отрезку, то при $b \neq -2, \frac{3}{2}$ решение (3) уже было указано, а при b , равном одному из этих чисел оба квадратных уравнения (4) и (5) имеют решения. Их и надо взять в качестве z , а y можно выбрать произвольно.

Ответ: $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{2}{3}$. ◀

► **Задача 3.** При каких a минимум функции $y = f(x) = |x + a| + |x - a|$ на отрезке $[-1, 1]$ больше максимума функции $y = g(x) = |x^2 + ax|$ на этом же отрезке?

Решение. Докажем сначала, что минимум функции $f(x)$ равен $2|a|$. В самом деле, это значение достигается при $x = 0$, так что минимум $f(x)$ не превосходит $2|a|$. Докажем, что для любого x имеем

$$|x + a| + |x - a| \geq 2|a|.$$

Заметим, что обе части неравенства не меняются от замены a на $-a$, так что достаточно доказать его для $a > 0$ (случай $a = 0$ очевиден). Левая часть неравенства не меняется при замене x на $-x$, так что можно доказывать неравенство при $x > 0$.

Если $0 < x \leq a$, то левая часть равна $2a$ и неравенство в этом случае выполнено. Если $x > a$, то левая часть равна $2x > 2a$ и наше неравенство доказано.

Значит, задача свелась к поиску таких a , что функция $g(x)$ меньше $2|a|$ в каждой точке отрезка $[-1, 1]$. Заметим, что если a удовлетворяет условию задачи, то и $-a$ ему удовлетворяет. В самом деле, пусть $|x^2 + ax| < 2|a|$ для всех $x \in [-1, 1]$. Если найдется $x_0 \in [-1, 1]$ такое, что $|x_0^2 - ax_0| \geq 2|a|$, то тогда для $x_1 = -x_0$ получим

$$g(x_1) = |x_1^2 + ax_1| = |x_0^2 - ax_0| \geq 2|a|,$$

противоречие с тем, что $g(x) < 2|a|$ для всех $x \in [-1, 1]$ (а x_1 , очевидно, лежит на отрезке $[-1, 1]$).

Итак, ищем положительные a такие, что $g(x) < 2a$ для всех $x \in [-1, 1]$. Пусть a таково, как требуется. Тогда $g(1) = 1 + a < 2a \iff a > 1$. Но при $a > 1$ функция $x^2 + ax$ отрицательна на $[-1, 0]$ (докажите сами!) и, значит, при таких x имеем $g(x) = -x^2 - ax$.

Случай 1. $a \geq 2$. Функция $g(x)$ на отрезке $[0, 1]$ возрастает (ибо производная там равна $2x + a$), а на отрезке $[-1, 0]$ убывает (так как на этом отрезке производная равна $-2x - a \leq 0$). Отсюда следует, что наибольшее значение $g(x)$ принимает либо в точке 1, либо в -1 . Мы уже доказали, что при $a \geq 2$ имеем $g(1) < 2a$. Кроме того, и $g(-1) = a - 1 < 2a$, так что все $a > 2$ подходят.

Случай 2. $1 < a < 2$. Функция $g(x)$ на отрезке $[0, 1]$ возрастает (ибо производная там равна $2x + a$), а на отрезке $[-1, 0]$ убывает при $x \in [-\frac{a}{2}, 0]$ и возрастает при $x \in [-1, -\frac{a}{2}]$. Значит, максимум на $[-1, 0]$ принимается в точке $-\frac{a}{2}$ и равен $\frac{a^2}{4}$. Однако,

$$\frac{a^2}{4} - 2a = \frac{1}{4}a(a - 8) < 0 \Rightarrow g\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4} < 2a$$

и все $a \in (1, 2)$ тоже подходят.

Ответ: $a > 1$, $a < -1$. ◀

► **Задача 4.** Найти множество пар (a, b) таких, что равенство

$$(6) \quad a \sin x + b = \sin(ax + b)$$

выполнено при всех x .

Решение. Пусть a и b таковы, как требуется в условии. Тогда равенство (6) выполнено при $x = \pi$, $x = 0$ и $x = -\pi$, откуда

$$b = \sin(\pi a + b) = \sin(-\pi a + b) = \sin b.$$

Следовательно,

$$\sin(\pi a + b) - \sin(-\pi a + b) = 0 \iff \sin(\pi a) \cos b = 0,$$

откуда заключаем, что либо a — целое число, либо $b = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Но второе невозможно, ибо для любого целого k число $\frac{\pi}{2} + k\pi$ по модулю больше 1 (проверьте сами!), тогда как $|b| = |\sin b| \leq 1$.

Докажем, что $b = 0$. Пусть, например, $b > 0$. Ясно, что тогда $b \leq 1$. Но $\sin 1 \neq 1$, так что $0 < b < 1$. Функция $h(x) = x - \sin x$ на интервале $(0, 1)$ возрастает, так как ее производная $1 - \cos x > 0$ на $(0, 1)$. Отсюда следует, что $h(\frac{b}{2}) < 0$. Пусть $p = -h(\frac{b}{2}) > 0$. Из того, что $h(x)$ возрастает, следует, что

$$-\sin x < x - \sin x < \frac{b}{2} - \sin\left(\frac{b}{2}\right) = -p$$

для любого $x \in (0, \frac{b}{2})$. В частности,

$$(7) \quad \sin x > p$$

для любого $x \in (0, \frac{b}{2})$. Пусть y — наименьшее из чисел $\arcsin p$, $\frac{b}{2}$. Тогда $y \in (0, \frac{b}{2})$ и

$$\sin y \leq \sin(\arcsin p) = p$$

— противоречие с (7); мы доказали, что не может быть $b > 0$. Аналогично опровергается неравенство $b < 0$. Значит, $b = 0$.

Исходное равенство приняло вид $a \sin x = \sin ax$. Мы уже доказали, что $a \in \mathbf{Z}$. При $x = \frac{\pi}{2}$ имеем $a = \sin \frac{\pi a}{2}$, откуда $|a| \leq 1$, т.е. a может быть одним из чисел $0, 1, -1$. Непосредственная проверка показывает, что все они годятся.

Ответ: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$. ◀

► **Задача 5.** При каких a система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2ay - a^2 + 1 \\ y + a \leq |x| \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

Решение. Нашу систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} x^2 + (y - a)^2 \leq 1 \\ y \leq |x| - a \end{cases}.$$

Если нарисовать на плоскости множество решений первого неравенства, получится внутренность круга (с границей) радиуса 1 с центром в точке $(0, a)$. Множество решений второго неравенства — часть плоскости, лежащая под графиком функции $y = |x| - a$, причем последний есть график функции $y = |x|$, сдвинутый вниз на a . Решение нашей системы есть пересечение множеств решений каждого из неравенств.

Нетрудно сообразить, что два решения наша система будет иметь лишь в случае, изображенном на рис. 1.

Точки касания круга с прямыми и будут двумя решениями системы. Каждая из прямых наклонена к осям под углом 45° . Значит, треугольник PQR — прямоугольный равнобедренный. Точка Q имеет координаты $(0, a)$, а точка R — координаты $(0, -a)$. Кроме того, отрезки PR и PQ равны радиусу окружности, равному 1. Значит, $QR = 2a = \sqrt{2} \iff a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ◀

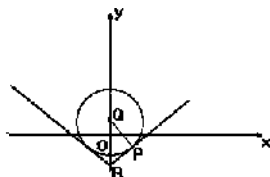


Рис. 1

► **Задача 6.** Для каждого $a \in (0, 1)$ найти наименьшее значение выражения

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - a(x - y),$$

причем, в качестве аргумента для f берутся всевозможные числовые пары (x, y) такие, что $\sin(\pi xy) = 0$.

Решение. Ясно, что условие на числовые пары можно записать в виде $xy = k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Рассмотрим для начала случай $k = 0$. Если $x = 0$, то

$$f(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + ay = \frac{1}{2}(y + a)^2 - \frac{a^2}{2} \geq -\frac{a^2}{2}.$$

Если $y = 0$, то

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - ax = \frac{1}{2}(x - a)^2 - \frac{a^2}{2} \geq -\frac{a^2}{2}.$$

Значит, для $k = 0$ наименьшее значение $f(x, y)$ (оно, очевидно, достигается) равно $-\frac{a^2}{2}$.

Пусть $k > 0$. Тогда

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{k^2}{x^2} \right) - a \left(x - \frac{k}{x} \right) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{k}{x} - a \right)^2 + k - \frac{1}{2}a^2 > -\frac{1}{2}a^2,$$

поскольку квадрат неотрицателен, а $k > 0$.

Предположим теперь, что $k < 0$. Воспользуемся представлением $f(x, y)$ для предыдущего случая:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(z - a)^2 + k - \frac{a^2}{2},$$

где $z = x - \frac{k}{x}$. Теперь понадобится следующее наблюдение. Пусть $x > 0$. Тогда

$$z = x - \frac{k}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{x}} \right)^2 + 2\sqrt{-k} \geq \sqrt{-k}.$$

Если $x < 0$, то

$$z = - \left(|x| - \frac{k}{|x|} \right) = - \left(\sqrt{|x|} - \frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{|x|}} \right)^2 - 2\sqrt{-k} \leq -2\sqrt{-k}.$$

Мы доказали, что либо $z \geq 2\sqrt{-k}$, либо $z \leq -2\sqrt{-k}$. Вспомнив, что $0 < a < 1$, заметим, что $\sqrt{-k} > a$. Значит, функция $(z - a)^2$ возрастает при $z \geq 2\sqrt{-k}$ и убывает при $z \leq -\sqrt{-k}$. Следовательно, наименьшее значение $f(x, y)$ в этом случае равно наименьшему из чисел

$$\frac{1}{2}(2\sqrt{-k} - a)^2 + k - \frac{a^2}{2} = -k - 2a\sqrt{-k}$$

и

$$\frac{1}{2}(-2\sqrt{-k} - a)^2 + k - \frac{a^2}{2} = -k + 2a\sqrt{-k}.$$

Но $a > 0$, так что наименьшее из этих чисел равно $-k - 2a\sqrt{-k} \geq 1 - 2a$, — последнее неравенство выполняется, поскольку $-k \geq 1$, а функция $p^2 - 2ap = (p - a)^2 - a^2$ возрастает при $p > a$, а у нас $p = \sqrt{-k} > a$.

Итак, мы доказали, что при всех возможных k будет $f(x, y) \geq -\frac{a^2}{2}$ и $f(x, y) \geq 1 - 2a$, причем каждое из этих значений достигается. Значит, в зависимости от a (точнее, в зависимости от того, какое из чисел $-\frac{a^2}{2}$ и $1 - 2a$ меньше) наименьшее значение $f(x, y)$ равно то ли $-\frac{a^2}{2}$, то ли $1 - 2a$.

Выяснить, при каких a какое из чисел меньше, не составляет никакого труда.

Ответ: если $a \leq 2 - \sqrt{2}$, то наименьшее значение $f(x, y)$ равно $-\frac{a^2}{2}$; если $a > 2 - \sqrt{2}$, то оно равняется $1 - 2a$. ◀

► **Задача 7.** Найти все p , при которых уравнение

$$\sqrt{(x + 3p - 3\pi - 4)(|x + \pi| + p - 2\pi + 2)} + \log_{\pi} \left(\frac{\pi^2 + p^2 + 4}{2(p - \pi)|x + 2| - x^2 - 4x + 2p\pi} \right) = 0$$

имеет хотя бы одно целочисленное решение.

Решение. Если p таково, как требуется в условии задачи, то знаменатель дроби, стоящей под логарифмом строго больше нуля. Пользуясь равенствами

$$-x^2 - 4x = 4 - (x + 2)^2 = 4 - |x + 2|^2,$$

можно привести выражение, стоящее в знаменателе, к виду

$$\pi^2 + p^2 + 4 - (|x + 2| - (p - \pi))^2.$$

Теперь видно, что у дроби, стоящей под логарифмом, числитель не меньше знаменателя (и они оба положительны!). Значит, дробь не меньше единицы, а логарифм ее, тем самым, неотрицателен.

Сумма двух неотрицательных выражений (корня квадратного и логарифма) равна нулю, только если оба этих выражения равны нулю. Следовательно, мы доказали, что исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x + 3p - 3\pi - 4)(|x + \pi| + p - 2\pi + 2) = 0 \\ |x + 2| = p - \pi \end{cases}.$$

Эта система имеет целочисленное решение тогда и только тогда, когда имеет целочисленное решение хотя бы одна из двух систем

$$\begin{cases} (x + 3p - 3\pi - 4) = 0 \\ |x + 2| = p - \pi \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (|x + \pi| + p - 2\pi + 2) = 0 \\ |x + 2| = p - \pi \end{cases}.$$

Найдем те p , при которых целочисленные решения имеет система

$$\begin{cases} (x + 3p - 3\pi - 4) = 0 \\ |x + 2| = p - \pi \end{cases}.$$

Подставим значение $p - \pi$ из второго уравнения в первое. Получим уравнение

$$x + 3|x + 2| = 4 \iff x = -5, -\frac{1}{2}.$$

Нас интересует только $x = -5$, откуда находим, что $\boxed{p = \pi + 3}$.

Теперь займемся системой

$$\begin{cases} (|x + \pi| + p - 2\pi + 2) = 0 \\ |x + 2| = p - \pi \end{cases}.$$

Здесь снова можно подставить значение $p - \pi$ из второго уравнения в первое:

$$|x + \pi| + |x + 2| = \pi - 2 \iff x \in [-\pi, -2].$$

На получившемся отрезке лежат два целых корня $x = -3$ и $x = -2$. Окончательно получаем $p = \pi$, $p = \pi + 1$.

Ответ: $p = \pi$, $\pi + 1$, $\pi + 3$. ◀

► **Задача 8.** Найти все $x \geq 0$, для которых из неравенств

$$abx \geq 3a + 4b + x, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0$$

следует неравенство $ab \geq 2$.

Решение. Докажем сначала, что $x = 0$ не подходит. Действительно, если выполняется неравенство $abx \geq 3a + 4b + x$, причем a и b неотрицательны, то $a = b = 0$, так что не выполняется неравенство $ab \geq 2$.

Ищем требуемые $x > 0$. Пусть из неравенств

$$abx \geq 3a + 4b + x, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0$$

следует неравенство $ab \geq 2$. Тогда верно и более слабое утверждение: из неравенств

$$(8) \quad abx \geq 3a + 4b + x, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad b > \frac{3}{x}$$

следует неравенство $ab \geq 2$ (осознайте, пожалуйста, что это действительно более слабое утверждение).

Однако первое из неравенств (8), с учетом остальных, эквивалентно неравенству

$$a \geq \frac{4b + x}{bx - 3}.$$

Итак, наше x таково, что из неравенств

$$a \geq \frac{4b + x}{bx - 3}, \quad a > 0, \quad b > \frac{3}{x}$$

следует неравенство $a \geq \frac{2}{b}$.

Я утверждаю, что это выполняется тогда и только тогда, когда

$$(9) \quad \frac{4b + x}{bx - 3} \geq \frac{2}{b}$$

при любых $b > \frac{3}{x}$.

Действительно, пусть неравенство (9) выполняется при любых $b > \frac{3}{x}$. Тогда, если

$$abx \geq 3a + 4b + x, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0,$$

то $a > 0$, $b > 0$ и $a(bx - 3) \geq 4b + x$, откуда $b > \frac{3}{x}$. Значит,

$$a \geq \frac{4b + x}{bx - 3} \geq \frac{2}{b},$$

и мы получаем, что $a \geq \frac{2}{b} \iff ab \geq 2$, т.е. из выполнения (9) для всех $b > \frac{3}{x}$ следует, что x удовлетворяет условиям исходной задачи.

В случае же, когда найдется $b > \frac{3}{x}$ такое, что (9) не выполняется, можно положить

$$a = \frac{4b + x}{bx - 3} < \frac{2}{b}.$$

Ясно, что для такого a выполняются неравенства

$$abx \geq 3a + 4b + x, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0,$$

причем первое из них есть просто равенство. Однако, $ab < 2$ — противоречие.

Я доказал, наконец, что мы свели задачу к поискам таких $x > 0$, что при любом $b > \frac{3}{x}$ выполняется неравенство (9).

Проведя очевидные преобразования, получим, что при $b > \frac{3}{x}$ неравенство (9) эквивалентно

$$(10) \quad p(b) = 4b^2 - bx + 6 \geq 0.$$

Применяя материал урока 36, заключаем, что у трехчлена $p(b)$ должен быть либо неположительный дискриминант $D = x^2 - 96$, либо ось его $b = \frac{x}{8}$ должна быть левее точки $\frac{3}{x}$ при выполнении неравенства $p(\frac{3}{x}) \geq 0$.

Последнее неравенство выполняется всегда, т.к. $p(\frac{3}{x}) = \frac{9}{x^2} + 3 \geq 0$. Ось лежит левее точки $\frac{3}{x}$ при $x \leq \sqrt{24}$, а $D \leq 0 \iff x \leq \sqrt{96}$. Отсюда и получаем

Ответ: $0 < x \leq \sqrt{96}$. ◀

► **Задача 9.** Найти все x , удовлетворяющие уравнению

$$\log_2(a^2x^3 - 5a^2x^2 + \sqrt{6-x}) = \log_{2+a^2}(3 - \sqrt{x-1})$$

при любом a .

Решение. Если x удовлетворяет исходному уравнению при любом a , то, в частности, и при $a = 0$. При таком a имеем уравнение

$$\log_2(\sqrt{6-x}) = \log_2(3 - \sqrt{x-1}) \iff x = 2, \text{ или } x = 5.$$

При $x = 5$ получаем единицу под каждым из логарифмов, так что это x подходит.

Если $x = 2$, то уравнение приобретает вид

$$\log_2(-12a^2 + 2) = \log_{2+a^2} 2.$$

Это равенство не только не выполняется при любых a , оно даже определено не при всех a . Значит, $x = 2$ не годится.

Ответ: $x = 5$. ◀

► **Задача 10.** Найти все a , при которых область значений функции

$$y = \frac{\sin x + 2(1-a)}{a - \cos^2 x}$$

содержит отрезок $[1, 2]$.

Решение. Для упрощения вычислений обозначим $\sin x$ через t , а $1 - a$ через b . После очевидных преобразований, позволяющих выразить функцию y через t и b , увидим, что исходная задача эквивалентна следующей:

Найти все b , при которых образ отрезка $[-1, 1]$ при отображении

$$f(t) = \frac{t + 2b}{t^2 - b}$$

содержит отрезок $[1, 2]$.

Эту задачу можно эквивалентным образом переформулировать так:

при каких b для любого $p \in [1, 2]$ найдется $t \in [-1, 1]$, такое, что

$$\frac{t + 2b}{t^2 - b} = p \iff \frac{pt^2 - t - (p + 2)b}{t^2 - b} = 0?$$

Рассмотрим отдельно случаи $b = 0$ и $b = \frac{1}{4}$.

Если $b = 0$, то $f(t) = \frac{1}{t}$ и для любого $p \in [1, 2]$ найдется $t = \frac{1}{p} \in [-1, 1]$ такое, что $f(t) = p$. Следовательно, $b = 0$ входит в ответ.

Если $b = \frac{1}{4}$, то $f(t) = \frac{1}{t - \frac{1}{2}}$ и для $p = 1$ должно быть $t = \frac{1}{2} + \frac{1}{p} > 1$, т.е. это b не годится.

Если $b \neq 0, \frac{1}{4}$, то задача эквивалентна следующей: При каких b для любого $p \in [1, 2]$ найдется $t \in [-1, 1]$, такое, что

$$(11) \quad g(t) = pt^2 - t - (p + 2)b = 0.$$

Заметим, что ось параболы (11) проходит через точку $\frac{1}{2p} \in (-1, 1)$. Значит, для любого $p \in [1, 2]$ найдется $t \in [-1, 1]$, такое, что (11) имеет место тогда и только тогда, когда $D = 1 + 4p(p + 2)b \geq 0$ и либо $g(1) \geq 0$, либо $g(-1) \geq 0$ для любого $p \in [1, 2]$.

Неравенство $1 + 4p(p + 2)b \geq 0$ равносильно тому, что $b \geq -\frac{1}{4p(p + 2)}$. Функция $h(p) = -\frac{1}{4p(p + 2)}$ с ростом p возрастает, так что для того, чтобы было $b \geq -\frac{1}{4p(p + 2)}$ при любых $p \in [1, 2]$ необходимо и достаточно, чтобы было $b \geq h(2) = -\frac{1}{32}$.

Далее, неравенство $g(1) = p - 1 - (p + 2)b \geq 0$ (соответственно $g(-1) = p + 1 - (p + 2)b \geq 0$) равносильно неравенству $b \leq \frac{p-1}{p+2}$ (соответственно, $b \leq \frac{p+1}{p+2}$). Неравенство $b \leq \frac{p-1}{p+2}$ (соответственно $b \leq \frac{p+1}{p+2}$) выполнено для всех $p \in [1, 2]$ если и только если $b \leq 0$ (соответственно $b \leq \frac{2}{3}$) ввиду возрастания функции $\frac{p-1}{p+2}$ (соответственно $\frac{p+1}{p+2}$). Значит, для всех $b \leq \frac{2}{3}$ будет $g(-1) \geq 0$, а для $b > \frac{2}{3}$ получим $g(1) < 0$ и $g(-1) < 0$, т.е. искомые b лежат на отрезке $[-\frac{1}{32}, \frac{2}{3}]$, причем $b \neq \frac{1}{4}$. Заметим, что $b = 0$ случайно попало в получившийся интервал, так же, как и $b = \frac{1}{4}$.

Вспоминая, что $b = 1 - a$, получаем

Ответ: $\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{33}{32}$, $a \neq \frac{3}{4}$. ◀

► **Задача 11.** При каких p система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2px + 3p^2 + 3p + 3 \leq 5 \sin y - 4 \cos y \\ 0 \leq y \leq 2\pi \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение. Представим первое неравенство системы в виде:

$$(x + p)^2 + 2p^2 + 3p + 3 \leq 5 \sin \left(y - \arcsin \frac{4}{5} \right).$$

Пусть (x_0, y_0) — единственное решение системы. Тогда $(x_0, \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{4}{5})$ тоже решение, ибо правая часть неравенства при замене y_0 на $\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{4}{5}$ могла только увеличиться. Значит, непременно $y_0 = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{4}{5}$ и правая часть неравенства равна 5.

Если $2p^2 + 3p + 3 > 5$, то неравенство вообще не имеет решений (почему?).

Если $2p^2 + 3p + 3 < 5$, то $(-p, y_0)$ и

$$(-p + \sqrt{5 - (2p^2 + 3p + 3)}, y_0)$$

есть два различных решения первого неравенства (здесь $y_0 = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{4}{5}$).

Значит, остается только случай, когда $2p^2 + 3p + 3 = 5 \iff p = -2, \frac{1}{2}$.

При таких p левая и правая части неравенства обязаны равняться 5, так что оно имеет единственное решение $(-p, y_0)$, если потребовать, чтобы было $0 \leq y_0 \leq 2\pi$.

Ответ: $p = -2, \frac{1}{2}$. ◀

Наш урок окончен. Оценка ставится стандартным образом.

Домашнее задание

► 1. Найти все a , при которых уравнение

$$((2x + a)\sqrt{22a - 4a^2 - 24} - 2(x^2 + x) \lg a) \cdot \lg \left(\frac{36a - 9a^2}{35} \right) = 0$$

имеет по крайней мере два корня, один из которых ≥ 0 , а другой ≤ -1 .

► 2. Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{z^2} \\ \cos x \cos y = -\frac{(x+y)^2}{(a-\pi)^2} \\ \sin(x-y) = \frac{2(x+y)}{(a-\pi)z} \end{cases}$$

имеет ровно одно решение, удовлетворяющее условиям $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ и $z > 0$.

► 3. Даны системы

$$\begin{cases} x + 2y = 2 - a \\ -x + ay = a - 2a^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0 \\ 2x^2 + y^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 - 6a = 0 \end{cases}$$

При каких a они равносильны?

- 4. При каких a система $\begin{cases} 3y + 2 + xy = 0 \\ x(y + 1 - a) + y(2a - 3) + a + 3 = 0 \end{cases}$ имеет единственное решение?

- 5. При каких a неравенство $|3 \sin^2 x + 2a \sin x \cos x + \cos^2 x + a| \leq 3$ выполнено для любого x ?

- 6. Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} 9x^2 - 6xy + y^2 + 6x - 13y + 3 = 0 \\ 13x^2 + 6xy + 10y^2 + 16x + 2y - 4ax - 6ay + a^2 - 2a + 3 = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

- 7. Найти все a , при которых неравенство

$$-\frac{1}{2}|a+3||x+a+6| + \left(|a+3| - \frac{a^2+6a+8}{|a+3|}\right) \cdot |x+3| - \frac{1}{2}|a+3||x-a| \geq -2$$

выполняется ровно для двух значений x .

- 8. При каких a уравнение $\sqrt{a} + \sqrt{a + \sin x} = \sin x$ имеет решение?

- 9. При каких a система $\begin{cases} y(ax+1) + 13x - a(1+y) = 0 \\ x - xy + |2+y| = 0 \end{cases}$ имеет решения?

- 10. При каких a ровно одно решение неравенства

$$\sqrt{(a+3)(a^2+a-6)} \cdot x^3 - \sqrt{a^4+a^3-6a^2} \cdot x^2 + \sqrt{a^3+3a^2} \cdot x - a^2 \leq 0$$

удовлетворяет условию $1 \leq x \leq 4 + a$?

- 11. При каком b система

$$\begin{cases} y \geq (x-b)^2 \\ x \geq (y-b)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

- 12. Найти все числа c и d , для которых наибольшее значение функции

$$y(x) = \left| 4 \cdot \frac{3^x + 3^{-x} - 2}{3^x + 3^{-x} + 2} + (c + 2d) \cdot 2 \cdot \frac{3^x - 1}{3^x + 1} + 2c + d \right|$$

на отрезке $[-1, 1]$ является наименьшим.

- 13. Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{7|y|} \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

- 14. Найти все пары (a, b) , для которых система

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a(x+y) = x - y + a \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0 \end{cases}$$

имеет не менее пяти решений (x, y) .

- 15. Найти все b , такие, что система

$$\begin{cases} 2x^2 - 2xy + 10y^2 = b^4 - 6b^3 + 9b^2 - 19 + \sqrt{85} \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

- 16. Найти все $b \in [-1, 1]$ такие, что выражение

$$1 - 2\sqrt{4x^2 + 4bxy + y^2 + 8y + 18}$$

принимает наибольшее значение лишь при одной паре (x, y) .

- 17. При каких a уравнение

$$(a^2 - 6a + 9)(2 + 2\sin x - \cos^2 x) + (12a - 18 - 2a^2)(1 + \sin x) + a + 3 = 0$$

не имеет решений?

- 18. При каких a уравнение

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{a^2 + 4\pi^2 + 4}{4x - x^2 - 2(a - 2\pi)|x - 2| + 4\pi a} \right) - \\ - \sqrt{(x - 5a + 10\pi - 34)(|\pi - x| - a + \pi + 2)} = 0$$

имеет хотя бы одно целочисленное решение?

- 19. Найти все b , при которых система

$$\begin{cases} \cos(y - b) - 2\cos x = 0 \\ \log_2(by - y^2) = 2\log_4(-x) - \log_{\frac{1}{2}}(3y) \end{cases}$$

имеет нечетное число решений.

- 20. Найти все $x \geq 0$, при которых из неравенств

$$abx \geq 2a + 9b + x, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0$$

следует неравенство $ab \geq 4$.

- 21. Найти все a , при которых наименьшее значение квадратного трехчлена

$$4x^2 - 4ax + (a^2 - 2a + 2)$$

на отрезке $[0, 2]$ равно 3.

- 22. При каких p уравнение

$$(x - p)^2(p(x - p)^2 - p - 1) = -1$$

имеет больше положительных корней, чем отрицательных?

- 23. При каких $\alpha \neq 0$ количество пар (x, y) целых чисел таких, что $|y| \leq$

$$\frac{\alpha^2 + x^2}{\alpha^3} \text{ минимально?}$$

- 24. При каких a число решений уравнения

$$4x + x^3 = \left(4^a - \frac{1}{2}\right) \sqrt{15 - 3^{5a}} - (2a + 1)^2 \cdot 4^x$$

меньше числа решений уравнения

$$a^2(2y + a^2 - 1) = y(3y - 1)?$$

Глава 9

Нестандартные задачи

Под нестандартными я буду понимать либо задачи, не относящиеся ни к одному из рассмотренных типов, либо задачи на известные нам темы (например, тригонометрические уравнения), которые традиционными преобразованиями и методами не решаются. Они, как правило, в варианте бывают последними и могут быть названы задачами «на пятерку».

Отмечу сразу, что, несмотря на нестандартность, такие задачи не выходят за рамки школьной программы, поскольку могут быть решены школьными методами. Другое дело, что бывает крайне трудно за ограниченное время найти решение. В природе не существует такого человека, который бы гарантированно мог решать любые задачи по элементарной математике. Каждый год предметные комиссии придумывают задачи, решение которых требует принципиально нового подхода, так что исчерпать все типы таких задач просто невозможно.

Зато возможно набраться опыта в решении подобных задач и, по крайней мере, не впадать в панику, если вдруг такая попадется на экзамене. Более того, могу «успокоить» работающих на уровне 3, что в варианте у них обязательно будет нестандартная задача. Надо спокойно относиться к тому, что она может не получиться, и отложить ее решение на то время, когда все простые задачи будут решены.

Если вы все-таки взялись бороться с нестандартной задачей, попробуйте методы, изложенные в этой главе. Может быть, какой-то из них не решит ее, но поможет упростить. Если вы проработали эту книгу, то вы можете твердо себе сказать: «Я знаю все, что нужно для решения этой задачи. Просто не замечаю чего-то, что лежит на поверхности. Надо преодолеть инерцию мышления и попробовать что-то, на первый взгляд сюда не относящееся.»

Урок 39

Метод мажорант

Мажорантой данной функции $f(x)$ на множестве P (или множества A чисел) называется такое число M , что либо $f(x) \leq M$ для всех $x \in P$, либо $f(x) \geq M$ для всех $x \in P$ (соответственно, $x \leq M$ для всех x из A , или $x \geq M$ для всех $x \in A$). Мы знаем много мажорант для известных функций. Например, любое число, большее или равное 1, будет мажорантой для функций $\sin x$ и $\cos x$ на любом множестве.

Основная идея метода мажорант (она, кстати, уже встречалась в предыдущих главах) состоит в следующем:

Пусть мы имеем уравнение $f(x) = g(x)$ и существует такое число M , что для любого x из области определения $f(x)$ и $g(x)$ имеем $f(x) \leq M$ и $g(x) \geq M$. Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ эквивалентно системе

$$\begin{cases} f(x) = M, \\ g(x) = M. \end{cases}$$

Как искать такое число M ? Ну, это просто. Вы ведь владеете таким мощным средством исследования функций как производная. С ее помощью вы можете найти наибольшее значение функции $f(x)$ и наименьшее значение $g(x)$. Если они совпадают, то за M можно принять их общее значение. Но чаще всего производная не понадобится, если вы хорошо владеете следующими неравенствами:

$$(1) \quad a + \frac{1}{a} \geq 2 \text{ при } a > 0 \text{ и } a + \frac{1}{a} \leq -2 \text{ при } a < 0,$$

причем равенство достигается только при $a = \pm 1$;

$$(2) \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ при } a \geq 0, b \geq 0,$$

причем равенство достигается только при $a = b$.

Впрочем, лучше всего осваивать метод мажорант в процессе решения задач.

► **Задача 1.** Решить уравнение $2 \sin x = 5x^2 + 2x + 3$.

Решение. Левая часть не превосходит двух. Минимум квадратного трехчлена с положительным коэффициентом при x^2 достигается в точке пересечения оси параболы с осью абсцисс. В данном случае это точка $-\frac{1}{5}$. Значит,

правая часть не меньше, чем

$$5 \cdot \frac{1}{25} - 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 = \frac{14}{5} > 2.$$

Мы доказали, что левая часть уравнения при любом x строго меньше правой, т.е. решений нет.

Ответ: $\emptyset$. ◀

► **Задача 2.** Решить уравнение $\sin x = x^2 + x + 1$.

Решение. Здесь уже так просто не получится, ибо минимальное значение правой части равно $\frac{3}{4} < 1$. Как искать корни? Ясно, что их нет на том множестве, где правая часть строго больше 1. Найдём это множество, решив неравенство

$$x^2 + x + 1 > 1 \iff x^2 + x > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty).$$

Значит, если это уравнение имеет решения, то они лежат на отрезке $[-1, 0]$. Но этот отрезок целиком лежит в отрезке $[-\frac{\pi}{2}, 0]$, на котором синус ≤ 0 . Однако, правая часть не меньше $\frac{3}{4}$ на всей прямой. Значит, и на отрезке $[-1, 0]$ правая часть строго больше левой, т.е. уравнение не имеет решений.

Ответ: $\emptyset$. ◀

► **Задача 3.** Решить уравнение $\sin x \sin 5x = 1$.

Решение. Мы знаем, что $|\sin x| \leq 1$ и $|\sin 5x| \leq 1$. Если бы было, например, $|\sin x| < 1$, то, поскольку произведение числа, строго меньшего единицы, на число ≤ 1 строго меньше единицы, будем иметь $\sin x \sin 5x < 1$. Значит, предположенного не может быть и $|\sin x| = |\sin 5x| = 1$.

Мы доказали, что исходное уравнение эквивалентно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 5x = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sin x = -1, \\ \sin 5x = -1. \end{cases}$$

Ввиду тривиальности решения этих систем (для тех, кто добрался до этого урока!), я не буду его здесь расписывать.

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. ◀

► **Задача 4.** Решить уравнение $\sin^{13} x + \cos^8 x = 1$.

Решение. Из неравенств $|\sin x| \leq 1$ и $|\cos x| \leq 1$ следует, что $\sin^{13} x \leq \sin^2 x$ и $\cos^8 x \leq \cos^2 x$. Сложив эти неравенства, получим, что для любого x будет $\sin^{13} x + \cos^8 x \leq 1$, причем равенство достигается только в том случае, когда $\sin^{13} x = \sin^2 x$ и $\cos^8 x = \cos^2 x$. Значит, наше уравнение эквивалентно системе $\begin{cases} \sin^{13} x = \sin^2 x \\ \cos^8 x = \cos^2 x \end{cases}$, решить которую не составляет труда.

Ответ: $x = n\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 5.** Решить уравнение $\sin x + \cos 8x \cos x = \sqrt{\frac{5 - \sin 2x}{2}}$.

Решение. Нам потребуется главная формула урока 5. Она гласит, что

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi),$$

где φ есть любое число, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\begin{cases} \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$$

В нашем случае $a = 1$, $b = \cos 8x$, так что левая часть исходного уравнения равна $\sqrt{1 + \cos^2 8x} \sin(x + \varphi) \leq \sqrt{1 + 1} \cdot 1 = \sqrt{2}$. Ясно, что $\frac{5 - \sin 2x}{2} \geq 2$ и, значит, правая часть не меньше $\sqrt{2}$.

Отсюда заключаем, что исходное уравнение эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \sin 2x = 1, \\ \cos^2 8x = 1, \\ \sin(x + \varphi) = 1, \\ \sin \varphi = \frac{\cos 8x}{\sqrt{1 + \cos^2 8x}}, \\ \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 8x}}. \end{cases}$$

Из первого ее уравнения получаем $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. Тогда $8x = 2\pi + 8n\pi \Rightarrow \cos 8x = 1$. Значит, $\sin \varphi = \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, т.е. годится $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Последнее, что должно выполняться — это условие, что

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + n\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

откуда окончательно находим, что $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 6.** Найти все пары (x, y) , для которых

$$\log_2 \left(\cos^2(xy) + \frac{1}{\cos^2(xy)} \right) = \frac{1}{y^2 - 2y + 2}.$$

Решение. Область допустимых значений уравнения состоит из таких пар (x, y) , что $\cos(xy) \neq 0$. В этой области $\cos^2(xy) + \frac{1}{\cos^2(xy)} \geq 2$, причем равенство достигается только при $\cos^2(xy) = 1$ (см. формулу (1)). Отсюда следует, что левая часть уравнения не меньше 1.

С другой стороны, $y^2 - 2y + 2 = (y - 1)^2 + 1 \geq 1$, откуда следует, что правая часть уравнения не превосходит 1, причем равенство достигается только при $y = 1$. Отсюда и получаем

Ответ: $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, $y = 1$. ◀

► **Задача 7.** Найти все решения уравнения

$$4x^3 + 3x^2 = 6x - \frac{11}{4} + \sin \pi x,$$

лежащие на отрезке $[-\frac{3}{2}, 1]$.

Решение. Перепишем наше уравнение в виде

$$\sin \pi x = 4x^3 + 3x^2 - 6x + \frac{11}{4}.$$

Найдем наименьшее значение правой части $f(x)$ на отрезке $[-\frac{3}{2}, 1]$.

Имеем $f'(x) = 12x^2 + 6x - 6 = 6(2x - 1)(x + 1)$. Отсюда видно, что $f(x)$ возрастает на отрезках $[-\frac{3}{2}, -1]$ и $[\frac{1}{2}, 1]$, а убывает на отрезке $[-1, \frac{1}{2}]$. Значит, наименьшее значение $f(x)$ принимает либо в точке $x = -\frac{3}{2}$, либо в точке $x = \frac{1}{2}$.

Но $f(-\frac{3}{2}) = 5$ и $f(\frac{1}{2}) = 1$, так что правая часть не меньше 1 на отрезке $[-\frac{3}{2}, 1]$, причем равенство может достигаться только при $x = \frac{1}{2}$. Проверкой убеждаемся, что и левая часть при $x = \frac{1}{2}$ равна 1.

Ответ: $x = \frac{1}{2}$. ◀

► **Задача 8.** Решить неравенство $2^{\cos x} - |x| + \sqrt{x^2 + \left|\frac{1}{\cos x}\right|} - 1 \leq \frac{1}{2}$.

Решение. Ясно, что $\left|\frac{1}{\cos x}\right| \geq 1$. Отсюда следует, что

$$\sqrt{x^2 + \left|\frac{1}{\cos x}\right|} - 1 \geq \sqrt{x^2} = |x|.$$

Тем самым, установлено, что

$$(3) \quad \sqrt{x^2 + \left|\frac{1}{\cos x}\right|} - 1 - |x| \geq 0,$$

причем равенство достигается только при $|\cos x| = 1$.

$$(4) \quad \text{Далее, } \cos x \geq -1, \text{ так что } 2^{\cos x} \geq 2^{-1} = \frac{1}{2},$$

причем равенство достигается только при $\cos x = -1$.

Сложив неравенства (3) и (4), получим, что

$$2^{\cos x} - |x| + \sqrt{x^2 + \left|\frac{1}{\cos x}\right|} - 1 \geq \frac{1}{2},$$

причем равенство достигается только при $\cos x = -1$. Поскольку нам требуется решить противоположное неравенство, его решениями будут только те x , при которых оно обращается в равенство.

Ответ: $x = \pi + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 9.** Решить систему

$$\begin{cases} 2^{1+\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 4 \cos^2 y, \\ \log_{\frac{1}{2}}(\sin z) + \sin^2 y = 1. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся неравенством (2) для $a = 2^{1+\sin^2 x}$, $b = 2^{\cos^2 x}$:

$$2^{1+\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} \geq 2\sqrt{2^{1+\sin^2 x} \cdot 2^{\cos^2 x}} = 2\sqrt{2^{1+\sin^2 x + \cos^2 x}} = 4,$$

причем равенство достигается только при $1 + \sin^2 x = \cos^2 x \iff x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Из $4 \cos^2 y \leq 4$ следует теперь, что $\cos^2 y = 1 \Rightarrow \sin^2 y = 0$. Из второго уравнения получаем, что $\log_{\frac{1}{2}}(\sin z) = 1 \iff \sin z = \frac{1}{2}$.

Ответ: $x = n\pi$, $y = k\pi$, $z = (-1)^l \frac{\pi}{6} + l\pi$, $n, k, l \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 10.** Решить неравенство

$$\cos^2 x \cdot \sin(\sin x) + \sin \cdot \cos(\sin x) > 0.$$

Решение. Пусть $\sin x > 0$. Тогда $\sin x \in (0, 1] \subset (0, \frac{\pi}{2}]$. Значит, $\sin(\sin x) > 0$ и $\cos(\sin x) > 0$. Теперь уже видно, что вся левая часть исходного неравенства строго больше нуля, ибо

$$\cos^2 x \cdot \sin(\sin x) > 0 \text{ и } \sin x \cdot \sin(\sin x) > 0.$$

Следовательно, все x такие, что $\sin x > 0$, входят в ответ.

Если $\sin x \leq 0$, то $\sin x \in [-1, 0] \subset [-\frac{\pi}{2}, 0]$. Значит, $\sin(\sin x) \leq 0$ и $\cos(\sin x) \geq 0$. Рассуждая точно так же, как в предыдущем случае, видим, что

$$\cos^2 x \cdot \sin(\sin x) + \sin \cdot \cos(\sin x) \leq 0,$$

т.е. ни одно x такое, что $\sin x \leq 0$, не входит в ответ.

Ответ: $2n\pi < x < \pi + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

► **Задача 11.** Решить систему

$$\begin{cases} \sin x \cos y \sin(x+y) + \frac{1}{8} = 0, \\ x = y + z. \end{cases}$$

Решение. Второе уравнение системы дано только для того, чтобы больше напугать решающего. На самом деле нужно найти x и y из первого уравнения и z из второго.

Запишем цепочку эквивалентных преобразований второго уравнения:

$$\begin{aligned} \sin x \cos y \sin(x+y) + \frac{1}{8} &= 0 \iff \\ \iff \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)) \sin(x+y) + \frac{1}{8} &= 0 \iff \\ \iff 4 \sin^2(x+y) + 4 \sin(x-y) \sin(x+y) + 1 &= 0 \iff \\ \iff (2 \sin(x+y) + \sin(x-y))^2 + 1 - \sin^2(x-y) &= 0, \end{aligned}$$

и теперь уже видно, что наше уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} 2 \sin(x+y) + \sin(x-y) = 0, \\ \sin^2(x-y) = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем, что либо $x-y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, либо $x-y = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

В первом случае $\sin(x+y) = -\frac{1}{2} \iff x+y = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, а во втором $\sin(x+y) = \frac{1}{2} \iff x+y = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Дальше все ясно.

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + n\pi + \frac{k}{2}\pi \\ y = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{k}{2}\pi - n\pi \end{cases}, k, n \in \mathbf{Z} \quad \blacktriangleleft$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{12} + n\pi + \frac{k}{2}\pi \\ y = \frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{k}{2}\pi - n\pi \end{cases}, k, n \in \mathbf{Z}.$$

Наш урок окончен. Оценку и здесь поставьте себе по стандарту.

Домашнее задание

Решить уравнения (неравенства):

- 1. $\sin x + \sin 9x = 2$
- 2. $(\sin x - \sqrt{3} \cos x) \sin 3x = 2$
- 3. $\cos x - \sin 3x = -2$
- 4. $\sin x \sin 7x = 1$
- 5. $\cos x \cos 6x = -1$
- 6. $2 \cos \frac{x}{2} = 1 - x - x^2$
- 7. $\cos^7 x + \sin^4 x = 1$
- 8. $\cos x + \cos y - \cos(x+y) = \frac{3}{2}$
- 9. $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2 \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x+y)$
- 10. $2^{|x|} = \sin(x^2)$
- 11. $\operatorname{tg}^2(\pi(x+y)) + \operatorname{ctg}^2(\pi(x+y)) = \sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} + 1$
- 12. $\log_3 |\pi x| + \log_{\pi x} 3 = \frac{1}{\sin^2(x+y) - 2 \sin(x+y) + 2}$

- 13. $\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x (\sin y + \cos y) + 2 = 0$
- 14. $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) \cos y = 3 + \cos 2y$
- 15. $\sin^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 3x = \sin x \sin^2 3x$
- 16. $\log_3(\frac{1}{3} - |\frac{3\pi}{2} - x|) = \sin x$
- 17. $3 \arcsin(x^2 + x + \frac{3}{4}) = \frac{\pi}{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{2} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x}{2}}$
- 18. $\cos^2(x+1) \cdot \lg(9-2x-x^2) \geq 1$
- 19. $\cos(\pi(x + \frac{1}{2} \sin \pi x)) + (\sin^2 \pi x + \sin \pi x)^2 \leq -1$
- 20. $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2x - 2y + 2 = 0$
- 21. $(x^2 - 2x + 3)(y^2 + 6y + 12) = 6$
- 22. $\cos x - y^2 - \sqrt{y - x^2 - 1} \geq 0$
- 23. $-|y| + x - \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \geq 1$
- 24. $\log_{\frac{1}{2}}(1+x) + \arccos(x+y^2) \leq -1$
- 25. $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1$
- 26. $(x^2 - 4x + 3) \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\cos^2 \pi x + \cos x + 2 \sin^2 \frac{x}{2}) \geq 2$
- 27. $\sqrt{2 - |y|}(5 \sin^2 x - 6 \sin x \cos x - 9 \cos^2 x + 3 \sqrt[3]{33}) = \arcsin^2 x + \arccos^2 x - \frac{5}{4} \pi^2$
- 28. $\sqrt{5 + \sin^2 3x} = \sin x + 2 \cos x$
- 29. $\sqrt[4]{17+x} + \sqrt[4]{17-x} = 2$
- 30. $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \geq 1$

Решить системы:

- 31. $\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2 \sin^2 y \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1 \end{cases}$
- 32. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2xy - z^2 = 4 \end{cases}$
- 33. $\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 5 = 4z \\ x - y \geq z \end{cases}$
- 34. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 20 = z \\ 8x + 4y \geq z \end{cases}$
- 35. $\begin{cases} z^2 + 7 \leq 14xy \\ z - 2x - 2y = 1 \end{cases}$
- 36. $\begin{cases} 3^{x+2y-1} + 2 \cdot 3^{3y-1} \leq 2 \\ x + 5y \geq 2 - \log_3 2 \end{cases}$
- 37. Найти все решения системы $\begin{cases} y \sin x = \log_2 \left| \frac{y \sin x}{1+3y} \right| \\ (6y^2 + 2y)(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x}) = 25y^2 + 6y + 1 \end{cases}$
такие, что $|y| \leq 1$

Урок 40

Использование различных свойств функций

Мы уже достаточно широко использовали различные свойства функций при решении задач. Например, метод мажорант (см. урок 39) использует такое свойство как ограниченность. На этом уроке мы покажем, как применяются свойства монотонности, четности и периодичности. Чаще всего используется монотонность функций. Например, если у вас есть уравнение $f(x) = c$ и функция f возрастает, то она может принимать значение c не более, чем в одной точке. А эту точку, как правило, можно просто угадать.

На этом общие рецепты здесь и заканчиваются. Давайте посмотрим на примерах, как «работают» указанные свойства функций.

► **Задача 1.** Решить неравенство $\log_2(x \cdot 2^{x^2}) \geq 1 + 2x$.

Решение. Область допустимых значений неравенства состоит из $x > 0$. Преобразуем левую его часть:

$$\log_2(x \cdot 2^{x^2}) = \log_2 x + \log_2 2^{x^2} = x^2 + \log_2 x.$$

Значит, наше неравенство эквивалентно следующему:

$$x^2 - 2x - 1 + \log_2 x \geq 0 \iff (x - 1)^2 + \log_2 x - 2 \geq 0.$$

Теперь нужно заметить, что при $x > 1$ возрастает как логарифм, так и функция $(x - 1)^2 - 2$. Значит, сумма этих функций также возрастает и может принимать значение равное нулю не более чем в одной какой-то точке x_0 , причем при $x \geq x_0$ правая часть не меньше нуля, т.е. все такие x являются решениями, а при $1 < x < x_0$ правая часть отрицательна, т.е. ни одно $x < x_0$ (большее единицы!) не есть решение исходного неравенства. Осталось выяснить, есть ли решения на промежутке $(0, 1]$. Но при x из этого промежутка логарифм отрицателен (или равен нулю), а квадратный трехчлен принимает значения от -2 до -1 (проверьте сами!). Значит, левая часть строго отрицательна на $(0, 1]$, т.е. на этом промежутке нет решений.

Осталось найти x_0 . Задача подобрана так, чтобы можно было легко его угадать — здесь $x_0 = 2$.

Ответ: $x \geq 2$. ◀

► **Задача 2.** Какое из чисел больше,

$$4 \sin^2 63^\circ + \frac{15 - \cos 89^\circ}{4 \sin^2 63^\circ} \quad \text{или} \quad 8 ?$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x + \frac{15 - \cos 89^\circ}{x}$. Ее производная равна $1 - \frac{15 - \cos 89^\circ}{x^2}$. Ясно, что при $0 < x < 14$ будет $f'(x) < 0$, так как числитель дроби, входящей в производную, строго больше 14. Значит, на интервале $(0, 14)$ указанная функция убывает. Число, которое мы должны сравнить с восемью, есть в точности $f(4 \sin^2 63^\circ)$. Заметим, что $0 < 4 \sin^2 60^\circ < 4 \sin^2 63^\circ < 14$, так что $f(4 \sin^2 63^\circ) < f(4 \sin^2 60^\circ)$. Но

$$f(4 \sin^2 60^\circ) = 3 + \frac{15 - \cos 89^\circ}{3} = 8 - \frac{1}{3} \cos 89^\circ < 8.$$

Значит, и $f(4 \sin^2 63^\circ) < 8$, что и требовалось выяснить.

Ответ: $4 \sin^2 63^\circ + \frac{15 - \cos 89^\circ}{4 \sin^2 63^\circ} < 8$. ◀

► **Задача 3.** Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{3x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 4}.$$

Решение. Любая попытка избавиться от радикалов при помощи возведения в квадрат приведет к уравнению шестой степени (или выше). Поскольку нет надежды алгебраически упростить уравнение, будем действовать по-другому.

Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{3x^2 + 2x + 1} - \sqrt{3x^2 - 1} = \sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + 2x + 4}.$$

Воспользуемся формулой

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}},$$

которая верна при $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a + b > 0$. Наше уравнение примет вид

$$\frac{3x^2 + 2x + 1 - 3x^2 + 1}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1} + \sqrt{3x^2 - 1}} = \frac{x^2 - x + 1 - x^2 - 2x - 4}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 4}}$$

$$\Downarrow$$

$$(1) \quad \frac{2(x+1)}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1} + \sqrt{3x^2 - 1}} = \frac{-3(x+1)}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 4}}.$$

Теперь уже видно, что $x = -1$ есть корень уравнения (1) (он входит в ОДЗ). Других корней нет, поскольку при $x \neq -1$ левая часть (1) положительна, а правая отрицательна.

Ответ: $x = -1$. ◀

► **Задача 4.** Решить уравнение

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}.$$

Решение. Область допустимых значений уравнения состоит из всех $x \geq \frac{1}{2}$. При таких x имеют место равенства $\sqrt{(x+2)(2x-1)} = \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{2x-1}$ и $\sqrt{(x+6)(2x-1)} = \sqrt{x+6} \cdot \sqrt{2x-1}$. Это позволяет после очевидных преобразований переписать исходное уравнение в виде

$$(2) \quad (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6})(\sqrt{2x-1} - 3) = 4.$$

Левая часть уравнения (2) есть возрастающая функция от x , будучи произведением возрастающих функций. Значит, она может принимать значение 4 не более чем в одной точке. Несложным подбором можно убедиться, что годится $x = 7$.

Ответ: $x = 7$. ◀

► **Задача 5.** Решить уравнение

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3).$$

Решение. Пусть $x^2 - 2x - 2 = y$. Заметим сначала, что

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} y = \log_{\sqrt{8+4\sqrt{3}}} y = 2 \log_{8+4\sqrt{3}} y.$$

Теперь исходное уравнение принимает вид

$$2 \log_{8+4\sqrt{3}} y = \log_{2+\sqrt{3}}(y-1) = 2 \log_{(2+\sqrt{3})^2}(y-1) = 2 \log_{7+4\sqrt{3}}(y-1)$$

$$\iff \log_b y = \log_{b-1}(y-1) \iff \log_b y = \frac{\log_b(y-1)}{\log_b(b-1)} \iff$$

$$(3) \quad \frac{\log_b(b-1)}{\log_b b} = \frac{\log_b(y-1)}{\log_b y};$$

здесь $b = 8 + 4\sqrt{3}$. Все преобразования законны, поскольку $b > 1$ и $y > 1$.

Если мы докажем, что функция $g(y) = \frac{\log_b(y-1)}{\log_b y}$ является возрастающей, то будет установлено, что значение $\frac{\log_b(b-1)}{\log_b b}$ она может принимать не более чем в одной точке. А такая точка легко угадывается — это $y = b$.

Следующая выкладка показывает, что $g(y)$ возрастает:

$$g(y) = \frac{\log_b(y-1)}{\log_b y} = \frac{\log_b(y \cdot \frac{y-1}{y})}{\log_b y} = \frac{\log_b y + \log_b(\frac{y-1}{y})}{\log_b y} = 1 - \frac{\log_b \frac{y}{y-1}}{\log_b y}.$$

Действительно, функция $\frac{y}{y-1} = 1 + \frac{1}{y-1}$ убывает. Значит, убывает и функция $\log_b \frac{y}{y-1}$. Кроме того, функция $\frac{1}{\log_b y}$ также убывает, откуда заключаем, что функция

$$\frac{\log_b \frac{y}{y-1}}{\log_b y} = \log_b \frac{y}{y-1} \cdot \frac{1}{\log_b y}$$

убывает. Значит, она же со знаком минус и с прибавленной единицей возрастает, что и требовалось доказать.

Нам осталось решить уравнение $x^2 - 2x - 2 = 8 + 4\sqrt{3}$.

Ответ: $x = 1 \pm \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}$. ◀

► **Задача 6.** Решить уравнение

$$(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3})+3x(2+\sqrt{9x^2+3})=0.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(y) = y(2 + \sqrt{y^2 + 3})$. Ввиду того, что

$$f'(y) = 2 + \sqrt{y^2 + 3} + \frac{y^2}{\sqrt{y^2 + 3}} > 0,$$

она возрастает на всей прямой.

Исходное уравнение легко переписывается в виде $f(2x+1) = f(-3x)$, что, вследствие монотонности f эквивалентно уравнению $2x+1 = -3x \iff x = -\frac{1}{5}$.

Ответ: $x = -\frac{1}{5}$. ◀

► **Задача 7.** Решить неравенство

$$\frac{6}{2x+1} > \frac{1 + \log_2(2+x)}{x}.$$

Решение. Здесь придется разобрать несколько случаев. Отметим прежде всего, что ОДЗ неравенства состоит из $x > -2$, $x \neq 0, -\frac{1}{2}$.

Случай 1. $x > 0$. Тогда неравенство можно умножить на x . Получим эквивалентное неравенство

$$1 + \log_2(x+2) < \frac{6x}{2x+1} = 3 - \frac{3}{2x+1}.$$

Теперь легко усмотреть, что левая и правая части неравенства есть возрастающие функции от x , причем правая строго меньше 3 для любого $x > 0$.

Если $x \in (0, 1]$, то левая часть не меньше 2, а правая не превосходит своего значения в единице, т.е. числа 2. Значит, при таких x наше неравенство не выполняется, так как правая часть не превосходит левую.

Если $x \in (1, 2]$, то левая часть не меньше $1 + \log_2 3$, а правая не больше $\frac{12}{5}$ (т.е. значения в $x = 2$). Но

$$343 = 3^5 > 128 = 2^7 \Rightarrow 3 > 2^{\frac{7}{5}} \Rightarrow \log_2 3 > \frac{7}{5} \Rightarrow 1 + \log_2 3 > \frac{12}{5}.$$

Мы доказали, что и на промежутке $(1, 2]$ неравенство не имеет решений.

Если $x > 2$, то левая часть больше трех и опять здесь нет решений, поскольку, как мы отметили, правая часть всегда строго меньше трех.

Случай 2. $-\frac{1}{2} < x < 0$. Тогда исходное неравенство эквивалентно следующему:

$$1 + \log_2(x + 2) > \frac{6x}{2x + 1}.$$

Легко видеть, что на этом промежутке левая часть больше нуля, а правая меньше, так что весь интервал $(-\frac{1}{2}, 0)$ состоит из решений исходного неравенства.

Случай 3. $-2 < x < -\frac{1}{2}$. В этом случае левая часть строго меньше двух, тогда как правая строго больше трех (проверьте сами, пожалуйста). Отсюда следует, что ни одна точка указанного интервала не входит в ответ. Вот мы и разобрали все возможные случаи.

Ответ: $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$. ◀

► **Задача 8.** Найти все p такие, что уравнение

$$(x - p)^2(p(x - p)^2 - p - 1) = -1$$

имеет больше положительных корней, чем отрицательных.

Решение. Левая часть уравнения есть четная функция относительно $x - p$, т.е. если $x - p$ удовлетворяет уравнению, то и $p - x$ тоже ему удовлетворяет. В терминах переменной x это запишется так: если x есть корень уравнения, то и $2p - x$ есть также его корень. Таким образом, число корней уравнения, находящихся левее p , равно числу его корней, находящихся правее p .

Если $p \leq 0$, то уравнение не может иметь больше положительных корней, чем отрицательных, так как положительные корни лежали бы правее p и их число было бы больше, чем число корней левее p , что, как мы видели, невозможно.

Пусть $p > 0$. Тогда для того, чтобы положительных корней было больше, чем отрицательных, необходимо и достаточно, чтобы нашелся хотя бы один корень, лежащий на отрезке $[0, 2p]$. Действительно, число отрицательных корней равно числу корней, больших $2p$, ибо $x < 0$ есть корень уравнения тогда и только тогда, когда $2p - x > 2p$ есть его корень. Значит, для того чтобы число положительных корней было больше, чем число отрицательных, надо чтобы существовал хотя бы один положительный корень, меньший, или равный $2p$. Сомнения может вызвать только корень $x = 0$. Но тогда $2p - 0 = 2p$ есть тоже корень, и все доказано.

С помощью подсчета дискриминанта исходное уравнение легко преобразуется к виду

$$(p(x - p)^2 - 1)((x - p)^2 - 1) = 0,$$

откуда легко находятся все его корни (при $p > 0$):

$$x = p - 1, \quad x = p + 1, \quad x = p + \sqrt{\frac{1}{p}}, \quad x = p - \sqrt{\frac{1}{p}}.$$

Осталось решить четыре двойных неравенства $0 \leq x \leq 2p$, где вместо x подставляются указанные корни. Как ни странно, все они эквивалентны неравенству $p \geq 1$, на чем решение и заканчивается.

Ответ: $p \geq 1$. ◀

► **Задача 9.** Найти наибольшее значение a , при котором неравенство

$$(4) \quad a\sqrt{a}(x^2 - 2x + 1) + \frac{\sqrt{a}}{x^2 - 2x + 1} \leq \sqrt[4]{a^3} \left| \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right|$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. По смыслу задачи a должно быть не меньше нуля. Ясно, что при $a = 0$ неравенство имеет решения. Пусть $a > 0$ таково, что для некоторого x неравенство (4) выполняется. Из $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ следует, что (4) можно представить в виде

$$\left(\sqrt[4]{a^3}(x - 1) - \frac{\sqrt[4]{a}}{x - 1} \right)^2 + 2a \leq \sqrt[4]{a^3} \left| \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right|.$$

Значит,

$$2a \leq \sqrt[4]{a^3} \left| \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right| \iff \frac{2a}{\sqrt[4]{a^3}} = 2\sqrt[4]{a} \leq \left| \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right|.$$

Отсюда следует, что $2\sqrt[4]{a} \leq 1 \iff a \leq \frac{1}{16}$.

Мы установили, что если (4) имеет решение, то $a \leq \frac{1}{16}$. Докажем, что при $a = \frac{1}{16}$ решение имеется.

В самом деле, при $a = \frac{1}{16}$ неравенство (4) принимает вид

$$\frac{1}{64}(x - 1)^2 + \frac{1}{4(x - 1)^2} \leq \frac{1}{8} \left| \sin \frac{\pi}{2}x \right|.$$

Непосредственно проверяется, что при $x = 3$ левая часть равна правой, т.е. неравенство (4) имеет как минимум одно решение, и наше решение закончено.

Ответ: $\frac{1}{16}$. ◀

► **Задача 10.** Выяснить, справедливо ли неравенство $y \leq 3,17$, где y — наименьшее на интервале $(0, 1)$ значение функции

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(x + 0,003)^{0,45}} + \frac{3}{(1 - x)^{0,48}} \right) + \frac{1}{2} \left| \frac{1}{(x + 0,003)^{0,45}} - \frac{3}{(1 - x)^{0,48}} \right|.$$

Решение. Докажем сначала, что для каждого $x \in (0, 1)$ число $f(x)$ есть наибольшее из чисел

$$\frac{1}{(x + 0,003)^{0,45}} \quad \text{и} \quad \frac{3}{(1-x)^{0,48}}.$$

В самом деле, при раскрытии модуля знак минус будет иметь меньшее из этих двух чисел. Из-за этого оно сократится при раскрытии первой скобки, и останется как раз наибольшее.

Функция $\frac{1}{(x+0,003)^{0,45}}$, очевидно, убывает на отрезке $[0, 1]$ и в нуле принимает значение, равное $\left(\frac{1000}{3}\right)^{0,45} > 300^{0,45} > 125^{0,45} > 125^{1/3} = 5$.

Функция $\frac{3}{(1-x)^{0,48}}$ на промежутке $[0, 1]$ возрастает и в нуле равна 3. Кроме того, при $x = 0,997$ она превосходит 15 (см. предыдущую выкладку), тогда как функция $\frac{1}{(x+0,003)^{0,45}}$ в этой точке равна единице.

Теперь ясно, что найдется $x_0 \in (0, 1)$ такое, что

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+0,003)^{0,45}} & \text{при } x \leq x_0, \\ \frac{3}{(1-x)^{0,48}} & \text{при } x \geq x_0, \end{cases}$$

причем будет

$$(5) \quad y = \frac{1}{(x_0 + 0,003)^{0,45}} = \frac{3}{(1-x_0)^{0,48}}.$$

Из того, что $f(x)$ убывает при $x \in (0, x_0)$ и возрастает при $x \in (x_0, 1)$, следует, что именно в точке x_0 достигается минимум, равный y . Заметим, что $3,17^2 = 10,0489 > 10$. Поэтому если мы докажем, что $y < \sqrt{10}$, то задача будет решена.

Преобразуем равенство (5), пользуясь тем, что $0,45 = \frac{9}{20}$ и $0,48 = \frac{12}{25}$.

$$\frac{(1-x_0)^{12/25}}{3} = (x_0 + 0,003)^{9/20} \iff 1-x_0 = 3^{25/12}(x_0 + 0,003)^{(9/20) \cdot (25/12)}$$

$$\iff x_0 + 9 \cdot 3^{1/12}(x_0 + 0,003)^{15/16} = 1 \iff$$

$$(6) \quad t + 9 \cdot 3^{1/12} \cdot t^{15/16} = 1,003,$$

где $t = x_0 + 0,003$.

Из равенства (6) мы должны вывести, что

$$y < \sqrt{10} \iff t^{9/20} > \frac{1}{\sqrt{10}} \iff t > \frac{1}{10^{10/9}} = \frac{1}{10 \cdot 10^{1/9}}.$$

Мы докажем даже, что $t > 0,08 > \frac{1}{10 \cdot 10^{1/9}}$. Начнем с правого неравенства.

$$0,08 > \frac{1}{10 \cdot 10^{1/9}} \iff 0,8 > 10^{-(1/9)} \iff 10^{1/9} > \frac{5}{4} \iff \left(\frac{5}{4}\right)^9 < 10.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} 1,25^2 &= 1,5625 < 1,6 \Rightarrow 1,25^4 < 1,6^2 = 2,56 < 2,6 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1,25^8 < 2,6^2 = 6,76 < 7 \Rightarrow 1,25^9 < 1,25 \cdot 7 < 10. \end{aligned}$$

Нам осталось доказать, что $t > 0,08$. Заметим, что левая часть равенства (6) есть возрастающая функция от t , так что достаточно установить, что при подстановке в (6) числа 0,08 вместо t получится число, меньшее чем 1,003.

Для наведения полной строгости я проведу рассуждение с конца. Конечно же, на экзамене сразу догадаться до того, что будет в конце, невозможно. Тем не менее, после того как в вашем решении все сойдется, лучше оформлять его строго, т.е. рассуждая в нужном направлении.

Заметим сначала, что

$$(7) \quad 3^4 < 8^3 \Rightarrow 3^{4/3} < 8 \Rightarrow 3^{1/12} < 8^{1/16}.$$

Далее, $10^{1/8} < \frac{11}{8}$ — это легко проверяется с использованием неравенств

$$(8) \quad \left(\frac{11}{8}\right)^8 > 1,8^4 > 3,2^2 > 10.$$

Из (7) и (8) заключаем, что

$$\frac{10^{1/8} \cdot 3^{1/12}}{8^{1/16}} < \frac{11}{8} \Leftrightarrow 10^{1/8} \cdot 3^{1/12} \cdot 8^{15/16} < 11.$$

Поделив это неравенство на 10, получим, что

$$\begin{aligned} \frac{3^{1/12} \cdot 8^{15/16}}{10^{7/8}} &< 1,1 \Leftrightarrow 9 \cdot \frac{3^{1/12} \cdot 8^{15/16}}{10^{7/8}} < 9,9 < 9,923 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 9 \cdot \frac{3^{1/12} \cdot 8^{15/16}}{10^{15/8}} &< 0,9923 \Leftrightarrow 9 \cdot \frac{3^{1/12} \cdot 8^{15/16}}{100^{15/16}} < 0,9923 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 9 \cdot 3^{1/12} \cdot 0,08^{15/16} &< 0,9923 \Leftrightarrow 0,08 + 9 \cdot 3^{1/12} \cdot 0,08^{15/16} < 1,003, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Ответ: неравенство справедливо. ◀

Наш урок окончен. Оценка выставляется стандартным образом. Заметьте, что я уже не отмечал задачи по уровням. Делать это для нестандартных задач бессмысленно, так как перед ними все равны — и тот, кто поступает на мехмат, и тот, кто сдает математику на филологическом факультете.

Домашнее задание

► 1. Решить неравенство $(x^x - 7x - 6) \cdot \sin x > 0$.

► 2. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 3x - 5} + x\sqrt{x+1} + 5 = 4\sqrt{x+1} + 2\sqrt{2x-5} + 2x.$$

► 3. Решить неравенство $\frac{2 + \log_3 x}{x-1} < \frac{6}{2x-1}$.

- 4. Найти все значения параметра a , при которых неравенство

$$\log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{x^2 + ax + 5} + 1) \cdot \log_5(x^2 + ax + 6) + \log_a 3 \geq 0$$

имеет ровно одно решение.

- 5. Решить систему

$$\begin{cases} (\sin x)^{y+\frac{1}{y}} + (\cos x)^{y+\frac{1}{y}} = 1, \\ 0 < x < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

- 6. Найти все значения параметра a из интервала $(2, 5)$, при которых уравнение $\log_2(3 - |\sin ax|) = \cos(\pi x - \frac{\pi}{6})$ имеет хотя бы одно решение из отрезка $[2, 3]$.

- 7. Найти все a , при которых уравнение $(x \operatorname{tg} x + 1) \sqrt{|x| - a} = \frac{ax^2 + 1}{\cos x}$ имеет нечетное число корней.

- 8. Доказать, что для любых p и t справедливо неравенство $2(2p - 1)^4 + 1 + (1 - 2(2p - 1)^4) \sin 2t \geq 0$, и найти все пары (p, t) , при которых оно обращается в равенство.

- 9. Среди всех решений (a, b, c, d) системы

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 9, \\ c^2 + d^2 = 16, \\ ad + bc \geq 12 \end{cases}$$

найти такие, при которых величина $b + d$ принимает наименьшее значение.

- 10. Найти все a , при которых функция $f(x) = \sin 2x - 8(a + 1) \sin x + (4a^2 + 8a - 14)x$ является возрастающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек.

- 11. Без помощи таблиц найти все $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, удовлетворяющие уравнению $\log_2(\sin 3x - \cos 2x - \frac{3}{10}) = \log_2(\sin 7x - \cos 6x - \frac{3}{10})$.

- 12. Что больше, $\log_9 10$ или $\log_{10} 11$?

- 13. Решить уравнение $\frac{3+2\cos(x-y)}{2} = \sqrt{3+2x-x^2} \cdot \cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right) + \frac{\sin^2(x-y)}{2}$.

- 14. Решить уравнение $\log_{\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}}(x^2 - 4x - 2) = \log_{\frac{1}{2-\sqrt{3}}}(x^2 - 4x - 3)$.

- 15. Решить уравнение $\sqrt{x + \sqrt{3} + 1} + \sqrt{4x - 5} + \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}x + 11} = 6$.

Урок 41

Удачная подстановка или группировка

На уроке 2 мы решали задачи, близкие к нашей сегодняшней тематике. Но то были исключительно тригонометрические уравнения. В принципе, может так оказаться, что алгебраическое уравнение (или неравенство, или система уравнений) решается какой-нибудь необычной группировкой, приводящей к разложению на множители. Подчас самая необычная подстановка может привести к простому решению задачи, над которой вы бились часами.

Понятно, что общих рецептов здесь быть не может. Можно утешать себя тем обстоятельством, что, в принципе, даже на экзамене можно перебрать все возможные группировки членов уравнения и рано или поздно найти ту, что требуется. Но это легко сказать. Когда в момент решения над вами висит ответственность за свою будущую судьбу, все представляется совершенно не так, как на уроке. Мой главный совет здесь — сохранить спокойствие и душевное равновесие. Помните о том, что **вероятность, что вы найдете необычное решение, выше в два раза, если вы уверены в себе и воспринимаете экзамен как ни к чему не обязывающую игру**. Вы снова скажете, что легко, мол, тут советовать, а как, интересно, сам автор писал экзамен, когда был абитуриентом? Признаюсь честно, я здорово волновался (это был 1975 год) и, кстати, понес за это наказание. Я невнимательно прочитал условие простой планиметрической задачи и вместо нее решил более сложную, за что и получил заслуженный минус. К счастью, оценка снизилась всего лишь до четверки, так что автор смог впоследствии стать математиком.

Но все-таки я настаиваю на том, чтобы вы уделите психологической подготовке к экзамену самое усиленное внимание (вплоть до взятия нескольких уроков йоги или аутотренинга). Если вы в этом преуспеете, математический опыт, приобретенный при работе с этой книгой, я уверен, будет достаточным для того, чтобы вы показали самые высокие результаты.

► Задача 1. Решить уравнение

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 8x + 1 = 0.$$

Решение. Довольно быстро можно убедиться, что корни угадать невозможно. Однако ясно, что x не может быть равным нулю, так что уравнение,

деленное на x^2 равносильно исходному. Итак,

$$x^2 - 8x + 17 - \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 8\left(x + \frac{1}{x}\right) + 15 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 8\left(x + \frac{1}{x}\right) + 15 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x + \frac{1}{x} = 3 \quad \text{или} \quad x + \frac{1}{x} = 5,$$

и дальше уже все ясно.

Ответ: $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$. ◀

► **Задача 2.** Для каждого a решить уравнение

$$x^4 + 6x^3 + (4 - 2a)x^2 - (6a + 1)x + a^2 - a = 0.$$

Решение. Левую часть можно разложить на множители, если воспринять ее как квадратный трехчлен от a . Перегруппировав уравнение по степеням a , получим

$$(1) \quad a^2 - (2x^2 + 6x - 1)a + x^4 + 6x^3 + 4x^2 - x = 0.$$

Дискриминант (1), понимаемого как уравнения относительно a , равен

$$D = (2x^2 + 6x - 1)^2 - 4(x^4 + 6x^3 + 4x^2 - x) = (4x - 1)^2.$$

Следовательно,

$$a = \frac{2x^2 + 6x - 1 \pm (4x - 1)}{2} = x^2 + 5x - 1, \quad x^2 + x.$$

Таким образом, исходное уравнение можно представить в виде

$$(a - (x^2 + x))(a - (x^2 + 5x - 1)) = 0,$$

и, значит, оно эквивалентно совокупности уравнений $x^2 + x - a = 0$ и $x^2 + 5x - 1 - a = 0$. Дальнейшее ясно.

Ответ: если $a < -\frac{29}{4}$, то нет решений; если $a = -\frac{29}{4}$, то $x = -\frac{5}{2}$; если $-\frac{29}{4} < a < -\frac{1}{4}$, то $x = \frac{-5 \pm \sqrt{29 + 4a}}{2}$; если $a = -\frac{1}{4}$, то $x = \frac{-5 \pm \sqrt{28}}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$; если $a > -\frac{1}{4}$, то $x = \frac{-5 \pm \sqrt{29 + 4a}}{2}$, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$. ◀

► **Задача 3.** Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{1 + 2x\sqrt{1 - x^2}}{2}} + 2x^2 = 1.$$

Решение. В ОДЗ уравнения входят только те x , для которых $|x| \leq 1$. Пусть x — какое-нибудь решение уравнения. Тогда найдется $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ такое, что $x = \sin t$. Заметим, что $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$ — мы выбрали знак плюс перед косинусом, поскольку для $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ имеем $\cos t \geq 0$. Вспоминая, что $1 - 2\sin^2 t = \cos 2t$, запишем наше уравнение в виде

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1+2\sin t \cos t}{2}} &= \cos 2t \\ \Updownarrow \\ \sqrt{\frac{\sin^2 t + 2\sin t \cos t + \cos^2 t}{2}} &= \sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) \\ \Updownarrow \\ \frac{|\sin t + \cos t|}{\sqrt{2}} &= 2\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \\ \Updownarrow \\ \left|\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right| &= 2\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Ясно, что вне зависимости от знака подмодульного выражения решением уравнения будет любое t , для которого $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 0$. Вспоминая, что $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, заключаем, что $t = -\frac{\pi}{4}$.

Пусть $t \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}]$. Тогда можно раскрыть модуль со знаком минус и сократить на $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$. Получим, что

$$\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \iff \varnothing,$$

поскольку при рассматриваемых t левая часть положительна.

Если $t \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, то исходное уравнение равносильно тому, что

$$\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \iff t = \frac{\pi}{12}$$

— мы снова пользуемся тем, что $t + \frac{\pi}{4} \in (0, \frac{3\pi}{4})$, а на этом промежутке косинус принимает значение $\frac{1}{2}$ только в одной точке (нарисуйте сами картинку на тригонометрическом круге).

Итак, мы получили два решения исходного уравнения: $x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и

$$x = \sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

Ответ: $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$. ◀

► **Задача 4.** Сколько корней имеет на отрезке $[0, 1]$ уравнение

$$8x(1 - 2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1?$$

Решение. И здесь успешно работает тригонометрическая подстановка. Если x — решение данного уравнения из отрезка $[0, 1]$, то $x \neq 0, 1$ и, значит, найдется $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ такое, что $x = \sin t$. Подставим так представленное x в уравнение:

$$8 \sin t (1 - 2 \sin^2 t) (8 \sin^4 t - 8 \sin^2 t + 1) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$8 \sin t \cos 2t \left(8 \cdot \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 - 4(1 - \cos 2t) + 1 \right) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$8 \sin t \cos 2t (2(1 - 2 \cos 2t + \cos^2 2t) - 3 + 4 \cos 2t) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$8 \sin t \cos 2t (2 \cos^2 2t - 1) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$8 \sin t \cos 2t \cos 4t = 1.$$

Из $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ следует, что умножение обеих частей уравнения на $\cos t$ будет равносильным переходом. Получаем, что

$$8 \sin t \cos t \cos 2t \cos 4t = \cos t$$

$$\Downarrow$$

$$4 \sin 2t \cos 2t \cos 4t = \cos t$$

$$\Downarrow$$

$$2 \sin 4t \cos 4t = \cos t \iff \sin 8t = \cos t = \sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right).$$

Пользуясь формулой, преобразующей разность синусов в произведение, получим

$$2 \sin \left(\frac{9}{2}t + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{7}{2}t + \frac{\pi}{4} \right) = 0,$$

откуда $t = \frac{\pi}{14} + \frac{2}{7}n\pi$, $t = -\frac{\pi}{18} + \frac{2}{9}n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Мы должны выбрать такие целые n , чтобы t принадлежало интервалу $(0, \frac{\pi}{2})$. Легко проверить, что для первой серии решений годятся лишь $n = 0, 1$, а для второй — $n = 1$ и $n = 2$. Сами решения искать не надо так как в задаче спрашивается, сколько решений исходного уравнения лежит на отрезке $[0, 1]$.

Ответ: четыре корня. ◀

► **Задача 5.** Найти все решения (x, y, z) системы

$$\begin{cases} 2x^3 + x^2(24 - 2y - 2z) + x(80 - yz - 10y - 10z) + 65 - 9y - 9z - 4yz = 0, \\ 2x^3 + x^2(14 - 2y - 2z) - x(4 + yz) - 30 + 5y + 5z + yz = 0 \end{cases}$$

такие, что $x \in [3, 5]$.

Решение. Обозначим $y + z$ через a , а yz через b . Если считать x известным, то получится линейная система относительно a и b :

$$\begin{cases} (2x^2 + 10x + 9)a + (x + 4)b = 2x^3 + 24x^2 + 80x + 65, \\ (2x^2 - 5)a + (x - 1)b = 2x^3 + 14x^2 - 4x - 30. \end{cases}$$

Из того, что $3 \leq x \leq 5$, следует, что умножение первого уравнения на $x - 1$, а второго — на $x + 4$ приводит к эквивалентной системе. В этой новой системе вычтя из первого уравнения второе, получим, что

$$\begin{aligned} & ((2x^2 + 10x + 9)(x - 1) - (2x^2 - 5)(x + 4))a = \\ & = (x - 1)(2x^3 + 24x^2 + 80x + 65) - (x + 4)(2x^3 + 14x^2 - 4x - 30). \end{aligned}$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получим уравнение

$$(4x + 11)a = 4x^2 + 31x + 55 = (4x + 11)(x + 5) \iff a = x + 5;$$

мы опять воспользовались тем, что $3 \leq x \leq 5$. Подставив значение a во второе уравнение, найдем b :

$$(x - 1)b = 2x^3 + 14x^2 - 4x - 30 - (2x^2 - 5)(x + 5) = 4x^2 + x - 5 = (4x + 5)(x - 1),$$

откуда находим, что $b = 4x + 5$.

Вспомним теперь, что $a = y + z$ и $b = yz$. Имеем систему

$$\begin{cases} y + z = x + 5, \\ yz = 4x + 5 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x + 5 - z, \\ z^2 - (x + 5)z + 4x + 5 = 0. \end{cases}$$

Для того чтобы второе уравнение системы можно было разрешить относительно z , необходимо, чтобы дискриминант $D = (x + 5)^2 - 4(4x + 5)$ был неотрицателен, что имеет место при $x \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$. Опять применяя условие $3 \leq x \leq 5$, заключаем, что $x = 5$. Теперь уже легко находятся y и z .

Ответ: $x = y = z = 5$. ◀

► **Задача 6.** Доказать, что все решения неравенства

$$\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^2-1} > 2$$

удовлетворяют неравенству

$$x + 2\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^4 - 2x^2 + 1} > 1 + 2\sqrt[3]{x^2 - 1}.$$

Решение. Пусть $\sqrt{x-1} = a$, $\sqrt[3]{x^2-1} = b$. Тогда первое неравенство приобретает вид $a + b > 2$. Заметив, что $\sqrt[3]{x^4 - 2x^2 + 1} = b^2$, можно переписать второе неравенство в виде

$$a^2 + 2a + b^2 - 2b > 0 \iff (a + 1)^2 + (b - 1)^2 > 2.$$

Пусть $a + 1 = p$, $b - 1 = q$. Достаточно доказать, что если $p + q > 2$, то $p^2 + q^2 > 2$.

Заметим, что

$$p^2 + q^2 \geq \frac{(p+q)^2}{2} \iff 2p^2 + 2q^2 \geq p^2 + 2pq + q^2 \iff (p-q)^2 \geq 0,$$

и требуемое неравенство доказано.

Наконец,

$$p^2 + q^2 \geq \frac{(p+q)^2}{2} > \frac{2^2}{2} = 2,$$

и наша задача решена.

► **Задача 7.** Решить неравенство

$$\sqrt{x+5} < 1 + \sqrt{-x-3} + \sqrt{(x+5)(-x-3)}.$$

Решение. Перепишем наше неравенство в виде

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{-x-3} < 1 + \sqrt{(x+5)(-x-3)}.$$

Если левая часть ≤ 0 , то любое x из ОДЗ будет решением. ОДЗ состоит из таких x , что $-5 \leq x \leq -3$. Левая часть отрицательна при $-5 \leq x \leq -4$ — это и есть первая часть ответа.

При $x > -4$ при возведении неравенства в квадрат получим ему эквивалентное:

$$\begin{aligned} x+5-2\sqrt{(x+5)(-x-3)}+(-x-3) &= 1+2\sqrt{(x+5)(-x-3)}+(x+5)(-x-3) \\ &\iff \\ (x+5)(-x-3)+4\sqrt{(x+5)(-x-3)}-1 &> 0 \\ &\iff \\ \sqrt{(x+5)(-x-3)} &\in (-\infty, -2-\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}-2, +\infty) \\ &\iff \\ \sqrt{(x+5)(-x-3)} &> \sqrt{5}-2; \end{aligned}$$

мы выбрали второй из лучей, поскольку корень квадратный не может быть меньше нуля. В области допустимых значений последнее неравенство можно возвести в квадрат. Получаем

$$x^2 + 8x + 24 - 4\sqrt{5} < 0 \iff x \in \left(-4 - \sqrt{4\sqrt{5}-8}, -4 + \sqrt{4\sqrt{5}-8}\right).$$

Вспоминая, что мы рассматриваем случай $x > -4$, заключаем, что второй кусок ответа имеет вид $x \in (-4, -4 + \sqrt{4\sqrt{5}-8})$.

Ответ: $-5 \leq x < -4 + \sqrt{4\sqrt{5}-8}$. ◀

► **Задача 8.** Решить в целых числах уравнение

$$2x^2 + 5xy + 3y^2 + 5x + 8y = 7.$$

Решение. Легко убедиться, что уравнение можно переписать в виде

$$(x+y+3)(2x+3y-1) = 4.$$

Почему именно такой вид надо искать? Заметим, что в скобках стоят целые числа, произведение которых равно четырем. А таких чисел очень немного. А именно, если $ab = 4$, где a и b — целые числа, то либо $a = 4, b = 1$, либо $a = 2, b = 2$, либо $a = 1, b = 4$, причем для завершения списка нужно взять еще и пары $(-4, -1)$, $(-2, -2)$, $(-1, -4)$, которые получаются из положительных заменой знаков. Остается решить шесть систем:

$$\begin{cases} x + y + 3 = 4, \\ 2x + 3y - 1 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 3 = 2, \\ 2x + 3y - 1 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 3 = 1, \\ 2x + 3y - 1 = 4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 3 = -4, \\ 2x + 3y - 1 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 3 = -2, \\ 2x + 3y - 1 = -2, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 3 = -1, \\ 2x + 3y - 1 = -4. \end{cases}$$

Ответ: $(1, 0); (-6, 5); (-11, 9); (-27, 20); (-8, 5); (-9, 5)$. ◀

► **Задача 9.** Решить в целых числах уравнение

$$9x^2y^2 + 6xy^2 - 9x^2y + 2x^2 + y^2 - 18xy + 7x - 5y + 6 = 0.$$

Решение. Перепишем это уравнение как квадратное относительно x , считая y известным:

$$(9y^2 - 9y + 2)x^2 + (6y^2 - 18y + 7)x + y^2 - 5y + 6 = 0.$$

Дискриминант его равен

$$D = (6y^2 - 18y + 7)^2 - 4(9y^2 - 9y + 2)(y^2 - 5y + 6) = 4y^2 + 4y + 1 = (2y + 1)^2.$$

Теперь уже легко находится связь между x и y :

$$x = \frac{-(6y^2 - 18y + 7) \pm (2y + 1)}{2(9y^2 - 9y + 2)}.$$

Отметим, что при целых y выражение $9y^2 - 18y + 2$ не обращается в нуль (т.к. корни этого трехчлена не целые) и делить на него можно.

Если в выражении для x выбран знак плюс, то получаем

$$(2) \quad x = \frac{-(6y^2 - 18y + 7) + 2y + 1}{2(9y^2 - 9y + 2)} = \frac{-(y - 3)(3y - 1)}{(3y - 1)(3y - 2)} = \frac{-y + 3}{3y - 2}.$$

Мы произвели сокращение на $3y - 1$, поскольку при целых y это выражение не равно нулю.

Аналогично если взят знак минус, то получаем

$$(3) \quad x = \frac{-(6y^2 - 18y + 7) - 2y - 1}{2(9y^2 - 9y + 2)} = \frac{-(y - 2)(3y - 2)}{(3y - 1)(3y - 2)} = \frac{-y + 2}{3y - 1}.$$

Итак, исходное уравнение эквивалентно совокупности двух, получившихся в (2) и (3).

Решим в целых числах уравнение $-x = \frac{y-2}{3y-1}$. Ясно, что пара $(0, 2)$ есть его решение. Пусть $y > 2$. Тогда числитель и знаменатель правой части положительны и $y - 2 < 3y - 1 \iff y > -\frac{1}{2}$, т.е. знаменатель всегда

больше числителя. Значит, эта дробь не может быть целым числом при $y > 2$. Если $y = 0$, то $x = -2$. Значение $y = 1$ не подходит. Если $y < 0$, то дробь положительна, причем модуль числителя строго больше модуля знаменателя, так что ни одного решения с $y < 0$ уравнение (2) не имеет.

Пусть теперь $-x = \frac{y-3}{3y-2}$. Аналогичными рассуждениями можно установить, что целые решения этого уравнения есть $(0, 3)$ и $(2, 1)$.

Ответ: $(0, 2)$, $(2, 1)$, $(0, 3)$, $(-2, 0)$. ◀

► **Задача 10.** Найти все тройки целых чисел (p, q, s) , для которых выполняется соотношение

$$4p^2 + 3q^2 + 5s^2 - 24q - 1 = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$4p^2 + 3(q-4)^2 + 5s^2 = 49.$$

Здесь нужно искать решения перебором, сократив предварительно число перебираемых вариантов.

Ясно, что $4p^2 \leq 49 \iff |2p| \leq 7 \iff |p| \leq 3$, — мы воспользовались тем, что p — целое число.

Аналогичным образом

$$3(q-4)^2 \leq 49 \Rightarrow (q-4)^2 \leq 16 \iff |q-4| \leq 4.$$

И, наконец,

$$5s^2 \leq 49 \Rightarrow s^2 \leq 9 \iff |s| \leq 3.$$

Перед тем, как приступить к перебору, полезно заметить, что в любом решении (p, q, s) знаки чисел p , $(q-4)$ и s можно менять независимо друг от друга, и тройка все равно останется решением. Следовательно, можно искать лишь такие тройки (p, q, s) , что $p \geq 0$, $q-4 \geq 0$, $s \geq 0$.

Я не буду приводить здесь перебор. Отмечу только, что есть единственная тройка (p, q, s) с неотрицательными p , $q-4$ и s , а именно, тройка $(1, 4, 3)$.

Ответ: $(1, 4, 3)$, $(-1, 4, 3)$, $(-1, 4, -3)$, $(1, 4, -3)$. ◀

Наш урок окончен. Работающие на уровне 3 ставят себе оценку стандартным образом. Для уровня 2 стандарт уменьшается в два раза, т.е. пятерка ставится за 5 задач, четверка — за три задачи и «плюс-минус», тройка — за две задачи и еще что-нибудь (хотя бы «минус-плюс»).

Для уровня 1 оценка ставится по стандарту исходя из числа хорошо понятых решений, приведенных мной. При этом самостоятельно решенная задача засчитывается за два понятых решения.

Домашнее задание

- 1. Решить уравнение $x^4 - 4x^3 + x^2 + 4x + 1 = 0$.
- 2. Решить уравнение $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 3 = 0$.
- 3. Решить неравенство $5x + 13 + 10\sqrt{x+2} \geq 4\sqrt{x^2+x-2} + 5\sqrt{x-1}$.
- 4. Решить в целых числах уравнение $5x^2 + y^2 + 3z^2 - 2yz = 30$.
- 5. Найти наименьшее x , для которого существуют y и z такие, что $x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1$.
- 6. Пусть m и n — натуральные числа, $\frac{m}{n}$ — правильная несократимая дробь. Известно, что дробь $\frac{2n-m}{3n+2m}$ сократима на натуральное $k > 1$. Найти все возможные k .
- 7. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 10z + 6y + \frac{\sqrt{3}}{2}x - 17} + \sqrt{3x^2 - 2\sqrt{3}(\cos \pi y + \cos \pi z)x + 4} = 0.$$
- 8. Решить неравенство $\sqrt{(x-5)(-x+7)} + 1 > -\sqrt{x-5} + \sqrt{-x+7}$.
- 9. Решить неравенство $\sqrt{9 - \frac{9}{x}} < x - \sqrt{x - \frac{9}{x}}$.
- 10. Решить в целых числах уравнение $15x^2y^2 - 8yx^2 + 28y^2x + x^2 + 5y^2 - 38xy + 8x - 24y + 16 = 0$.
- 11. Решить уравнение $(x^2 - 3x + 1)(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) = -30$.
- 12. Для каждого $a \neq 0$ решить уравнение $x^3 - 3x = a^3 + \frac{1}{a^3}$.
- 13. Решить уравнение $\log_{x/4}(x^2) - \log_{8x}(x^3) = 0$.
- 14. Решить уравнение $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5) = 10$.
- 15. Решить уравнение $(x-1)(x-2)(x-4)(x-8) = 7x^2$.
- 16. Решить уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} = 0$.
- 17. Решить уравнение $x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{35}{12}$.
- 18. Решить уравнение $3 \cos x + \sin x = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.
- 19. Решить уравнение $(x+1)^{\log_3(x^2+x)} = (x^2+x)^{\log_3(2-x)}$.
- 20. Решить уравнение $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x^3 + 14x^2 + 24x = 0$.

Урок 42

Геометрический подход

На сегодняшнем уроке речь пойдет о решении негеометрических задач геометрическими методами. Точнее было бы назвать эти методы координатными, поскольку применение их состоит в изображении на координатной плоскости графиков и множеств, относящихся к заданной ситуации, и в зависимости от геометрических свойств последних, упрощение рассматриваемой задачи.

Нам потребуется хорошее владение построением множеств на плоскости, так что проверьте себя, решив две первых и две последних задачи урока 25. Если есть проблемы, повторите этот урок, пожалуйста.

► **Задача 1.** При каких a система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ x + y + z = a \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение. Ясно, что система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда уравнение

$$x^2 + y^2 + x + y = a \iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = a + \frac{1}{2}$$

имеет единственное решение.

Но множество точек, задаваемых на плоскости этим уравнением, пусто при $a < -\frac{1}{2}$, состоит из одной точки при $a = -\frac{1}{2}$ и является окружностью с центром $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ радиуса $\sqrt{a + \frac{1}{2}}$ при $a > -\frac{1}{2}$, т.е. имеет в этом случае бесконечное множество решений. Теперь уже ясно, каков в этой задаче

Ответ: при $a = -\frac{1}{2}$. ◀

► **Задача 2.** Среди всех решений неравенства $y - x \geq x^2 + 1$ найти те, для которых $y - 2x$ принимает наименьшее значение.

Решение. Перепишем наше неравенство в виде $y \geq x^2 + x + 1$. Множество точек на плоскости, задаваемое последним неравенством, лежит выше параболы $y = x^2 + x + 1$ и на ее границе (см. рис. 1).

Предположим, что величина $y - 2x$ принимает какое-то значение C . Множество всех точек плоскости таких, что $y - 2x = C$, лежит на прямой,

причем с ростом C эта прямая движется параллельно себе снизу вверх (см. рис. 1).

Точки, удовлетворяющие исходному неравенству и лежащие на прямой $y - 2x = C$, найдутся только в том случае, если эта прямая пересекает параболу. Понятно, что C примет свое наименьшее значение C_0 , если прямая $y - 2x = C_0$ касается параболы в некоторой точке x_0 .

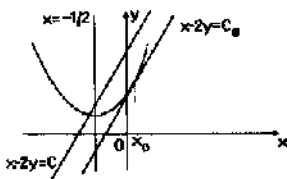


Рис. 1

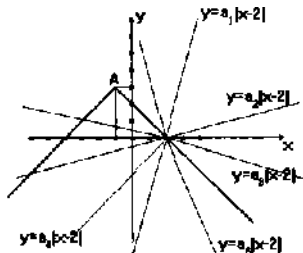


Рис. 2

Уравнение касательной к параболе $y = x^2 + x + 1$ в точке x_0 имеет вид $y = x_0^2 + x_0 + 1 + (2x_0 + 1)(x - x_0) = (2x_0 + 1)x + 1 - x_0^2$.

Из того, что эта касательная совпадает с прямой $y = 2x + C_0$, следует, что $2x_0 + 1 = 2 \iff x_0 = \frac{1}{2}$. Теперь уже легко найти, что $C_0 = \frac{3}{4}$ и $y_0 = x_0^2 + x_0 + 1 = \frac{7}{4}$.

Ответ: $(\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$. ◀

► **Задача 3.** При всех значениях параметра a решить уравнение

$$|x + 1| + a|x - 2| = 3.$$

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде $a|x - 2| = 3 - |x + 1|$. График функции $y = 3 - |x + 1|$ изображен на рис. 2. Это «уголок» с вершиной $A = (-1, 3)$ и лучами, идущими вниз. Здесь же нарисованы всевозможные графики функций $y = a|x - 2|$ при различных a .

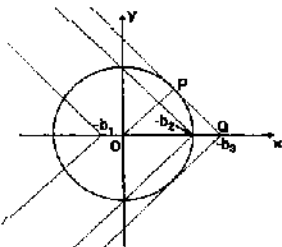


Рис. 3

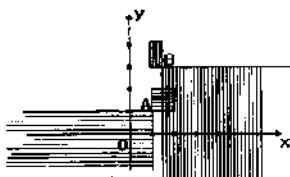


Рис. 4

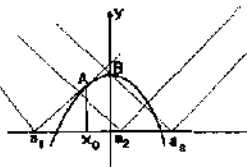


Рис. 5

Эти графики — «уголки» с вершиной в точке $(2, 0)$. При этом если $a = 0$, то «уголок» вырождается в прямую $y = 0$. Если $a > 0$, то график лежит выше оси абсцисс, если $a < 0$, то стороны «уголка» смотрят вниз.

График функции $y = 3 - |x + 1|$ тоже проходит через точку $(2, 0)$. При этом если $a > 1$, то стороны уголка идут вверх круче, чем проходящая через точку $(2, 0)$ прямая графика $y = 3 - |x + 1|$, так что графики имеют лишь одну общую точку $x = 2$. То же самое имеет место, если $a < -1$, но при этом стороны уголка идут вниз круче, чем лучи графика $y = 3 - |x + 1|$. На рисунке 2 эти два случая изображены с помощью графиков $y = a_1|x - 2|$ и $y = a_5|x - 2|$.

Если $a = 1$, то общая часть графиков есть отрезок от точки A до точки $(2, 0)$. Значит, в этом случае решениями исходного неравенства будут все $x \in [-1, 2]$.

Если $-1 < a < 1$, то кроме точки $(2, 0)$ график $y = a|x - 2|$ пересекает график $y = 3 - |x + 1|$ еще в одной точке на луче, лежащем левее прямой $x = -1$ (на рисунке 2 это иллюстрируется графиком $y = a_2|x - 2|$). Эта вторая точка легко находится из равенства $x + 4 = 2a - ax \iff x = \frac{2a-4}{a+1}$.

И, наконец, если $a = -1$, то графики имеют общий луч, начинающийся в точке $(2, 0)$ и лежащий правее прямой $x = 2$. Значит, в этом случае ответ будет $x \geq 2$.

Ответ: если $|a| > 1$, то $x = 2$; если $a = 1$, то $-1 \leq x \leq 2$; если $a = -1$, то $x \geq 2$; если $|a| < 1$, то $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{2a-4}{a+1}$. ◀

► **Задача 4.** При каких b система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ |y| - x = b \end{cases}$$

имеет ровно три решения?

Решение. Множество точек плоскости, удовлетворяющих первому уравнению, есть окружность радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат. Множество точек, задаваемое вторым уравнением, есть уголок, вершина которого находится в точке $(-b, 0)$, а стороны состоят из той части прямых $y = \pm(x + b)$, которая лежит левее прямой $x = -b$ (см. рис. 3).

Из геометрических соображений ясно, что множества будут иметь ровно три общие точки только в случае, когда вершина уголка попадет в точку $(\sqrt{2}, 0)$ (отмеченную на рис. 3 как $-b_1$). При $-b < -\sqrt{2}$ или $-b > -b_3$ система решений иметь не будет, при $-\sqrt{2} < -b < -b_1$ и $-b = -b_3$ она будет иметь два решения, а при $-b_1 < -b < -b_2$ решений будет четыре.

Ответ: при $b = -\sqrt{2}$. ◀

► **Задача 5.** Найти все пары (x, y) такие, что

$$\begin{cases} \log_{2-x}(2-y) > 0, \\ \log_{4-y}(2x-2) > 0. \end{cases}$$

Решение. Первое неравенство системы равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} 2 - x > 1, \\ 2 - y > 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0 < 2 - x < 1, \\ 0 < 2 - y < 1. \end{cases}$$

Множество на плоскости, задающее указанную совокупность, заштриховано горизонтальными линиями на рис. 4.

Второе неравенство системы дает следующую совокупность систем:

$$\begin{cases} 4 - y > 1, \\ 2x - 2 > 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0 < 4 - y < 1, \\ 0 < 2x - 2 < 1. \end{cases}$$

Множество, задаваемое этой совокупностью, изображено на рис. 4 вертикальной штриховкой.

Ясно, что пересечение этих множеств есть прямоугольник с вершинами $(\frac{3}{2}, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(\frac{3}{2}, 2)$, так что теперь легко выписывается ответ.

Ответ: $\frac{3}{2} < x < 2$, $1 < y < 2$. ◀

► **Задача 6.** Найти все a , при которых неравенство $3 - |x - a| > x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

Решение. Исходное неравенство удобнее переписать в виде $3 - x^2 > |x - a|$. На рисунке 5 изображена парабола $y = 3 - x^2$ и графики $y = |x - a|$ для трех различных a .

С изменением a уголок $y = |x - a|$ скользит по оси абсцисс. Точка a_1 характеризует тот момент, когда луч $y = x - a$, $x \geq a$ уголка касается параболы в некоторой точке A . Ясно, что если $a < a_1$, то неравенство решений иметь вообще не будет, т.к. график $y = |x - a|$ будет лежать строго выше графика $y = 3 - x^2$. Точка a_3 взята так, чтобы луч $y = a_3 - x$, $x \leq a_3$ проходил через точку $B = (0, 3)$. Ясно, что только тогда, когда $a_1 < a < a_3$, найдется точка на параболе $y = 3 - x^2$, которая имеет отрицательную абсциссу и лежит выше точки с той же абсциссой, лежащей на графике $y = |x - a|$, т.е. отрицательное решение исходного неравенства.

Нам осталось найти a_1 и a_3 . Проще находится a_3 . Действительно, лучи уголка $y = |x - a_3|$ наклонены к оси абсцисс под углами 45° и 135° , откуда заключаем, что треугольник с вершинами $(0, 3)$, $(0, 0)$ и $(a_3, 0)$ равнобедренный, так что $a_3 = 3$.

Уравнение касательной к параболе в точке с абсциссой x_0 имеет вид

$$y = 3 - x_0^2 - 2x_0(x - x_0) = -2x_0x + x_0^2 + 3.$$

Из того, что эта касательная совпадает с прямой $y = x - a_1$, следует, что $x_0 = -\frac{1}{2}$ и $a_1 = -x_0^2 - 3 = -\frac{13}{4}$.

Ответ: $-\frac{13}{4} < a < 3$. ◀

► **Задача 7.** Найти все a , при которых минимум функции

$$f(x) = |x - a| + |2x + a^2|$$

больше единицы.

Решение. Рассмотрим сначала случай, когда

$$-\frac{a^2}{2} < a \iff a \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty).$$

В этом случае график $f(x)$ будет иметь вид как на рис. 6.

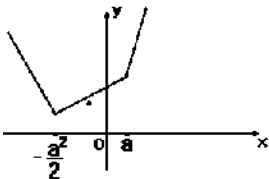


Рис. 6

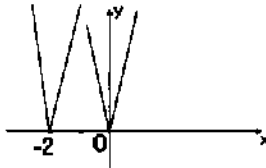


Рис. 7

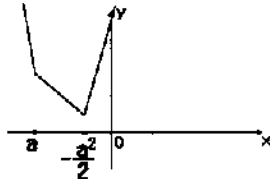


Рис. 8

Это легко проверяется раскрытием модулей. Значит, минимальное значение $f(x)$ при таких a достигается в точке $x = -\frac{a^2}{2}$. Подставим это значение в $f(x)$ и запишем тот факт, что минимум больше единицы:

$$\left| -\frac{a^2}{2} - a \right| > 1 \iff \frac{a^2}{2} + a > 1 \iff a \in (-\infty, -1 - \sqrt{5}) \cup (-1 + \sqrt{5}, +\infty).$$

Легко видеть, что все полученные a входят в рассматриваемую область $a < -2$ или $a > 0$.

В случае, когда $-\frac{a^2}{2} = a \iff a = 0, 2$, имеем $f(x) = 3|x - a|$ (см. рис. 7). Здесь минимум $f(x)$ равен нулю, так что эти a не подходят.

Пусть, наконец, $a < -\frac{a^2}{2} \iff a \in (-2, 0)$. График $f(x)$ для этого случая изображен на рисунке 8.

Мы видим, что опять минимум $f(x)$ принимается в точке $-\frac{a^2}{2}$. Найдем те a , при которых он больше 1:

$$\left| -\frac{a^2}{2} - a \right| > 1 \iff -\frac{a^2}{2} - a > 1 \iff a \in \emptyset.$$

Ответ: $a \in (-\infty, -1 - \sqrt{5}) \cup (-1 + \sqrt{5}, +\infty)$. ◀

► **Задача 8.** При каких a уравнение $||x| - a| = a^2$ имеет ровно два решения?

Решение. Ясно, что в случае, когда $a = 0$, уравнение имеет ровно одно решение. Предположим, что $a < 0$. Тогда выражение, стоящее под внешним модулем, будет положительно и этот модуль можно опустить. График функции $y = |x| - a$ изображен для таких a на рис. 9.

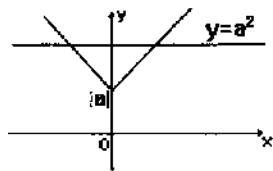


Рис. 9

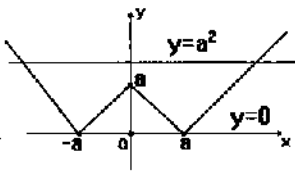


Рис. 10

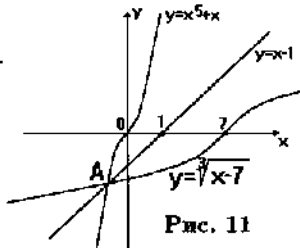


Рис. 11

Исходное уравнение будет иметь два решения тогда и только тогда, когда прямая $y = a^2$ будет пересекать уголок в двух точках. Ясно, что это произойдет тогда, когда $a^2 > |a| \iff a < -1$.

График левой части при $a > 0$ изображен на рисунке 10. Горизонтальная прямая либо пересекает этот график в двух точках (если она лежит выше прямой $y = a$), либо совпадает с осью абсцисс. Но у нас $a > 0$, так что прямая $y = a^2$ не может совпадать с осью абсцисс. Значит, остается случай, когда $a^2 > a \iff a > 1$.

Ответ: при $|a| > 1$. ◀

► **Задача 9.** Решить уравнение $x^5 + x = \sqrt[3]{x-7}$.

Решение. На рисунке 11 изображены грубые эскизы графиков $y = x^5 + x$ и $y = \sqrt[3]{x-7}$. Их вид подсказывает, что они пересекаются в одной точке, но это, конечно, надо строго доказать, не ссылаясь на графики.

Заметим, во-первых, что при $x = -1$ значения функций $y = x^5 + x$ и $y = \sqrt[3]{x-7}$ совпадают. Для того, чтобы доказать, что других точек пересечения у графиков нет, мы установим, что при $x > -1$ будет

$$(1) \quad x^5 + x > x - 1 > \sqrt[3]{x-7},$$

а при $x < -1$, наоборот,

$$(2) \quad \sqrt[3]{x-7} > x - 1 > x^5 + x.$$

Докажем, что имеют место неравенства (1). Если $x > -1$, то $x^5 > -1$, откуда следует, что $x^5 + x > x - 1$.

Кроме того,

$$(x-1)^3 - (x-7) = x^3 - 3x^2 + 2x + 6 = (x+1)((x-2)^2 + 2),$$

откуда следует, что $x-1 - \sqrt[3]{x-7}$ больше нуля при $x > -1$ и меньше нуля при $x < -1$. Этим установлено неравенство (1) и левое из неравенств (2). Осталось доказать, что при $x < -1$ будет $x^5 + x < x - 1 \iff x^5 < -1$, а последнее неравенство, очевидно, выполняется.

Итак, задача полностью решена.

Ответ: $x = -1$. ◀

► **Задача 10.** При каких a и b система

$$\begin{cases} a^2x - by = a^2 - b, \\ bx - b^2y = 2 + 4b \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

Решение. Ясно, что при $b = 0$ второе уравнение (а значит, и система) решений не имеет. Значит, можно считать, что $b \neq 0$ и поделить первое уравнение системы на b , а второе — на b^2 . Тогда нашу систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} y = \frac{a^2}{b}x - \frac{a^2}{b} + 1, \\ y = \frac{1}{b}x - \frac{4}{b} - \frac{2}{b^2}. \end{cases}$$

Каждое из уравнений получившейся системы задает прямую. Система имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда эти прямые совпадают. А это, в свою очередь, имеет место, если и только если

$$\begin{cases} \frac{a^2}{b} = \frac{1}{b}, \\ -\frac{a^2}{b} + 1 = -\frac{4}{b} - \frac{2}{b^2}. \end{cases}$$

Последняя система легко решается: $a = \pm 1$, $b = -1, -2$.

Ответ: $a = \pm 1$, $b = -1, -2$. ◀

Наш урок окончен. Оценка выставляется стандартным образом.

Домашнее задание

► 1. Решить уравнение $x^2 + 2x + 3 = \sqrt{4 - x^2}$.

► 2. Среди решений (x, y) системы неравенств

$$\begin{cases} x + 2y \leq 3, \\ 2x - y \leq 1, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$$

найти все те, для которых выражение $x^2 + y^2$ принимает максимальное значение.

► 3. Известно, что $x + y + z = 1$. Найти наименьшее значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

► 4. Верно ли, что уравнение $\log_{1/16} x = 16^{-x}$ имеет ровно один корень?

► 5. Решить неравенство $\frac{6 - 3^{x+1}}{x} > \frac{10}{2x - 1}$.

► 6. При каких a уравнение $ax - |x| - |x + 2| = \frac{a}{2}$ имеет не менее двух решений?

- 7. При каких a неравенство

$$x^2 + y^2 \leq 6x - 4y + a^2 + a - 13$$

имеет не менее пяти целочисленных решений?

- 8. При всех значениях параметра a решить неравенство

$$\sqrt{|x+1|} \leq a-x.$$

- 9. При каких a уравнение $x|x-2a|-1-a=0$ имеет единственный корень?

- 10. Найти наименьшее значение функции

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + x + y + \frac{1}{2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5}.$$

- 11. Найти все a , для которых неравенство

$$1 + |x-a| > x^2$$

имеет хотя бы одно решение, большее единицы.

- 12. При каких a система неравенств

$$\begin{cases} x+y \leq 3, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ y+2x \geq 2, \\ y+4x \leq a \end{cases}$$

имеет единственное решение?

- 13. При каких a уравнение

$$\log_2 \sqrt{8x} + \frac{1}{2} |\log_2 x + x - 3| = a + \frac{x}{2}$$

имеет единственное решение?

- 14. Найти все a , при которых функция

$$f(x) = |x-a+1| + |x+3a|$$

является четной.

- 15. Найти все a , для которых уравнение $ax^2 + |x| = |x+1|$ не имеет решений.

Глава 10

Стереометрия

Стереометрия — это геометрия в пространстве. Во многом задачи по стереометрии редуцируются к геометрическим задачам на плоскости, поскольку обычно требуемые элементы можно найти, сведя исходную задачу к нескольким планиметрическим. Предмет следующих (и последних!) восьми уроков и состоит в том, чтобы научить вас это делать.

Отмечу еще, что при решении стереометрических задач как никогда важно строго обосновывать все свойства рассматриваемых элементов — доказывать, к примеру, что высота пирамиды проходит через указанную вами точку, что центр описанного или вписанного шара лежит так, как у вас на чертеже, и т.п. Легко видеть, что доказывать геометрические свойства фигур в пространстве труднее, чем на плоскости. Например, если прямые на плоскости не пересекаются, то они параллельны. В пространстве этого уже мало — чтобы проверить параллельность прямых, надо доказывать, что они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Еще одна трудность, с которой сталкивается абитуриент при решении задачи по стереометрии, состоит в том, что часто невозможно сколь угодно полно изобразить условие задачи на чертеже. Это бывает, когда рассматривается, например, сфера, необычным образом связанная с многогранником, — например, сфера, касающаяся всех ребер тетраэдра. А если еще сказано, что некоторая плоскость касается этой сферы, да еще что в сечении ею тетраэдра получится то-то и то-то с такими-то свойствами, изобразить это становится совсем невозможно. В таком случае главное — не пугаться. Если изобразить невозможно, значит, скорее всего и не нужно. У сферы, как правило, достаточно изображать только центр и важнейшие точки, через которые она проходит. Если на одном чертеже все не умещается, можно сделать два. Все равно в любой данный момент рассмотрения задачи вам нужен какой-то один элемент или его свойства. Поэтому вполне достаточно подробно начертить этот элемент, забыв временно про остальные.

Пожалуй, из общих ценных указаний это все. Перехожу к изложению основных теорем и формул стереометрии.

I. Основные теоремы стереометрии

1. Теоремы о параллельности прямых и плоскостей

- а) Если прямая параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна самой плоскости.
- б) Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости и пересекает эту другую плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна первой прямой.
- в) Если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то получившиеся две линии пересечения параллельны.
- г) Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны соответственно двум пересекающимся прямым второй плоскости, то эти плоскости параллельны.

2. Теоремы о перпендикулярности прямых и плоскостей

- а) Для того, чтобы прямая была перпендикулярна к плоскости, необходимо и достаточно, чтобы она была перпендикулярна к двум произвольным непараллельным прямым, лежащим в этой плоскости.
- б) Для того, чтобы прямая DE , лежащая в плоскости π , была перпендикулярна наклонной AC к этой плоскости, необходимо и достаточно, чтобы DE была перпендикулярна к ее проекции BC (см. рис. 1). (Это чуть более общая теорема, чем та, что в школе называется теоремой о трех перпендикулярах. Я для краткости буду называть эту теорему теоремой о трех перпендикулярах).

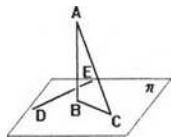


Рис. 1

- в) Если две прямые перпендикулярны к одной и той же плоскости, то они параллельны.
- г) Если две плоскости перпендикулярны к одной и той же прямой, то они параллельны.
- д) Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и к другой.
- е) Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

3. С к р е щ и в а ю щ и е с я п р я м ы е

- а) Угол между скрещивающимися прямыми k и l определяется как угол между прямой k и любой прямой, пересекающей k и параллельной l .

б) Расстояние между скрещивающимися прямыми находится как расстояние от одной из этих прямых до плоскости, содержащей другую прямую и параллельной первой прямой.

4. К р у г л ы е т е л а

а) Если из точки, лежащей вне сферы, к этой сфере проведены две касательные, то длины их равны.

б) Если из точки A , лежащей вне сферы, к сфере проведены секущая ABC (B и C — точки ее пересечения со сферой) и касательная AD , то

$$AB \cdot AC = AD^2.$$

в) Если дана сфера с центром O и плоскость π касается сферы в точке A , то радиус OA перпендикулярен плоскости π .

II. Основные формулы стереометрии

1. П р и з м а

а) Площадь боковой поверхности призмы равна боковому ребру, умноженному на периметр сечения призмы плоскостью, перпендикулярной боковым ребрам.

б) Объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

в) Площадь боковой поверхности прямой призмы равна периметру ее основания, умноженному на высоту.

2. П и р а м и д а

а) Объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту (т.е. $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot H$, где S — площадь основания, а H — высота).

б) Объем усеченной пирамиды с площадями оснований S_1 и S_2 и высотой H равен $V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})H$.

в) Объем любого многогранника (и, в частности, пирамиды), описанного около шара радиуса R , равен $V = \frac{1}{3}SR$, где S — площадь полной поверхности многогранника.

3. Ц и л и н д р

а) Площадь боковой поверхности цилиндра равна $S = 2\pi RH$, где R — радиус основания и H — высота.

б) Объем цилиндра равен $V = \pi R^2 H$

4. П р я м о й к р у г л о в о й к о н у с

а) Площадь боковой поверхности прямого кругового конуса с радиусом R и высотой H равна $\pi R \sqrt{R^2 + H^2}$.

б) Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна

$$S = \pi(R_1 + R_2)L,$$

где R_1 и R_2 — радиусы оснований, а L — образующая.

в) Объем (не обязательно прямого кругового) конуса равен $V = \frac{1}{3}SH$, где S — площадь основания, H — высота.

г) Объем усеченного конуса равен $V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})H$, где S_1 и S_2 — площади оснований и H — высота.

5. С ф е р а, ш а р

а) Площадь сферы равна $S = 4\pi R^2$, где R — ее радиус.

б) Площадь шарового сегмента равна $2\pi RH$, где H — высота сегмента.

в) Объем шара равен $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

г) Объем шарового сегмента равен $V = \pi H^2(R - \frac{H}{3})$.

Урок 43

Тривиальные задачи

Именно с таких задач нужно начинать работать со стереометрией. Многие из них могут служить маленькой частью решения более сложной задачи, а рассуждения, которые в них применяются, весьма поучительны, так как показывают, что и как надо обосновывать в стереометрических задачах.

Напомню вначале, что пирамида называется правильной n -угольной, если ее основание есть правильный n -угольник, а все боковые ребра равны.

► **Задача 0.** Доказать, что пирамида является правильной n -угольной, если и только если основание ее есть правильный n -угольник, а высота проходит через центр основания.

Решение. Пусть $A_1, \dots, A_n$ — вершины основания и S — вершина пирамиды. Предположим, что пирамида правильная и l — длина ее бокового ребра. Пусть H — точка пересечения высоты пирамиды с плоскостью основания. Докажем, что расстояние от H до любой из вершин основания одно и то же.

Действительно, если A_k — произвольная вершина основания, то $SH \perp A_k H$, так как SH , будучи высотой пирамиды, перпендикулярно любой прямой, лежащей в плоскости ее основания. Значит, треугольник $A_k S H$ прямоугольный и по теореме Пифагора имеем

$$H A_k = \sqrt{S A_k^2 - S H^2} = \sqrt{l^2 - S H^2},$$

откуда видно, что полученная величина не зависит от k . Значит, расстояния от H до всех вершин пирамиды равны, т.е. H — центр описанной окружности, совпадающий с центром основания.

Мы доказали, что если пирамида правильная, то ее высота проектируется в центр основания. Обратно, пусть SH — высота пирамиды, где H — центр основания. Этот центр совпадает с центром описанной окружности, так что

$$HA_1 = HA_2 = \dots = HA_n = r.$$

Значит, для любого k боковое ребро, соединяющее вершины S и A_k равно по теореме Пифагора (см. предыдущий абзац)

$$\sqrt{SH^2 + A_k H^2} = \sqrt{SH^2 + r^2},$$

так что длина k -го бокового ребра не зависит от k . Значит, все эти ребра равны и мы доказали, что пирамида правильная, закончив, тем самым, решение нашей задачи.

- **Задача 1.** Доказать, что в правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся ребра взаимно перпендикулярны.

Решение. Пусть $SABC$ — правильная пирамида с вершиной S . Докажем, например, что $AB \perp SC$. Пусть O — центр основания. Тогда SO — высота пирамиды и прямая CO есть проекция наклонной SC . По теореме о трех перпендикулярах достаточно доказать, что $AB \perp CO$. Но это, очевидно, имеет место, ибо треугольник ABC правильный и CO — биссектриса угла ACB . Задача решена.

- **Задача 2.** Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ с вершиной S . Плоскость π проходит через боковое ребро SA и высоту SO пирамиды. Доказать, что плоскость π перпендикулярна грани SBC .

Решение. Согласно предыдущей задаче имеем $SA \perp BC$. Кроме того, $SO \perp BC$ как высота в пирамиде, перпендикулярная всем прямым плоскости ABC . Мы видим, что прямая BC перпендикулярна двум пересекающимся прямым SA и SO плоскости π . Значит, $BC \perp \pi$. Плоскость SBC содержит прямую BC , перпендикулярную плоскости π . Значит, $SBC \perp \pi$, что и требовалось доказать.

- **Задача 3.** Пусть $SABC$ — правильная треугольная пирамида. Из точки A ее основания опустим перпендикуляр на плоскость SBC — пусть он пересекает ее в точке P . Доказать, что P лежит на апофеме пирамиды, т.е. на высоте треугольника SBC .

Решение. Относительно плоскости SBC отрезки AB и AC есть наклонные, а BP и CP — их проекции. Треугольник ABC правильный, так что $AB = AC$. По теореме Пифагора

$$CP = \sqrt{AC^2 - AP^2} = \sqrt{AB^2 - AP^2} = BP.$$

Мы видим, что расстояния от P до точек B и C равны. Значит, точка P лежит на серединном перпендикуляре к прямой BC , совпадающем с апофемой пирамиды, и все доказано.

- **Задача 4.** Доказать, что центр O сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду $SABC$ (S — вершина), лежит на высоте SH пирамиды.

Решение. Центр вписанной сферы равноудален от всех граней пирамиды. Отсюда следует, что он лежит на пересечении биссектральных плоскостей двугранных углов при ребрах SA, SB и SC . Мы докажем, что плоскость π , проходящая через ребро SA и высоту SH , является биссектральной для двугранного угла, образованного плоскостями SAC и SAB . Аналогичным образом плоскость SHC окажется биссектральной для двугранного угла при ребре SC , так что O будет лежать на пересечении плоскостей SHA и SCH , которое есть в точности высота пирамиды.

Итак, доказываем, что плоскость π является биссектральной (см. рис. 2). В треугольнике SAC опустим высоту из вершины C , а в треугольнике SBA опустим высоту из вершины B . Треугольники SAC и SBA равны, так что перпендикуляры пересекут прямую SA в одной и той же точке K . Угол BKC есть, очевидно, линейный угол двугранного угла при ребре SA . Кроме того, прямая SA перпендикулярна плоскости BKC , будучи перпендикулярной двум ее пересекающимся прямым CK и BC . Плоскость π проходит через прямую SA , так что она перпендикулярна плоскости BKC . Пусть D — точка пересечения плоскости π с прямой BC . Ввиду того, что D есть пересечение прямой AH со стороной BC , точка D есть середина отрезка BC .

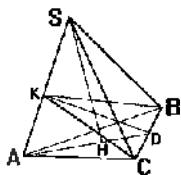


Рис. 2

Плоскости π и BKC пересекаются по прямой KD . В треугольнике BKC имеем $BK = KC$, так что KD — биссектриса угла BKC . Из перпендикулярности плоскостей π и BKC следует, что угол DKC есть линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями SAC и π . Аналогично угол DKB есть линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями π и SAB . Но эти линейные углы равны и плоскость π является биссектральной, что и требовалось доказать.

- **Задача 5.** Пусть в правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S и основанием ABC угол $ASB = \alpha < \frac{2}{3}\pi$. Найти двугранный угол φ между боковыми гранями.

Решение. На рисунке 2 уже изображен линейный угол искомого двугранного угла. Пусть $SA = l$. Тогда $AB = BC = AC = 2l \sin \frac{\alpha}{2}$. Высота BK в треугольнике SAB равна $l \sin \alpha$. Следовательно, мы знаем все стороны

треугольника BKC :

$$BC = 2l \sin \frac{\alpha}{2}, \quad BK = KC = l \sin \alpha.$$

Теперь уже легко найти угол $\varphi = \angle BKC$:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{1}{2}BC}{BK} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} \Rightarrow \varphi = 2 \arcsin \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} \right).$$

Ответ: $\varphi = 2 \arcsin \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} \right)$. ◀

- **Задача 6.** В правильной треугольной пирамиде дана сторона основания a и высота h . Найти длину бокового ребра.

Решение. Пусть $SABC$ — наша пирамида с вершиной S и основанием ABC . Нам по-прежнему годится рисунок 2. Имеем $AB = BC = AC = a$ и $SH = h$. Треугольник ABC правильный, так что H есть точка пересечения его медиан. В частности, $AH = \frac{2}{3}AD = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Теперь сторона SA находится из теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника SHA .

Ответ: $\sqrt{h^2 + \frac{1}{3}a^2}$. ◀

- **Задача 7.** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S и основанием ABC дана высота h и $AB = a$. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.

Решение. Пусть SH — высота пирамиды и O — центр описанной около нее сферы. Отрезки OA, OB и OC равны как радиусы. Значит, и их проекции на плоскость ABC равны. Отсюда следует, что точка O проектируется в центр описанной окружности треугольника ABC , т.е. на точку H . Следовательно, точка O лежит на высоте SH нашей пирамиды. При этом SO есть радиус сферы. Обозначим его через R . Тогда $OH = \sqrt{R^2 - AH^2}$. Мы не знаем, лежит точка O внутри пирамиды или вне ее. Если она лежит внутри, то

$$SO + OH = h \Rightarrow OH = h - SO = h - R \Rightarrow \sqrt{R^2 - \frac{1}{3}a^2} = h - R.$$

Если точка O лежит вне пирамиды, то

$$SO - OH = h \Rightarrow -OH = h - R \Rightarrow -\sqrt{R^2 - \frac{1}{3}a^2} = h - R.$$

Однако в каждом из этих случаев имеем

$$(\pm OH)^2 = (h - R)^2 \iff R^2 - \frac{1}{3}a^2 = h^2 - 2Rh + R^2 \iff R = \frac{3h^2 + a^2}{6h}.$$

Ответ: $R = \frac{3h^2 + a^2}{6h}$. ◀

- **Задача 8.** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S и основанием ABC дана высота h и $AB = a$. Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду.

Решение. Радиус r вписанной сферы можно найти только одним способом — из формулы $V = \frac{1}{3}Sr$, где S — полная поверхность пирамиды, а V — ее объем.

Площадь треугольника ABC равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Из задачи 6 мы знаем, что боковое ребро равно $\sqrt{h^2 + \frac{1}{3}a^2}$. Отсюда находим высоту SD в треугольнике BCS (см. рис. 2):

$$SD = \sqrt{SC^2 - CD^2} = \sqrt{h^2 + \frac{1}{3}a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{h^2 + \frac{1}{12}a^2}.$$

Значит, площадь каждой из боковых граней равна

$$S_{бок} = \frac{1}{2}a\sqrt{h^2 + \frac{1}{12}a^2}.$$

Теперь уже можно найти, что

$$S = 3S_{бок} + S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2}a\sqrt{h^2 + \frac{1}{12}a^2}.$$

Объем пирамиды равен $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{1}{12}a^2h\sqrt{3}$. Окончательно находим

$$r = \frac{3V}{S} = \frac{\frac{1}{4}a^2h\sqrt{3}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2}a\sqrt{h^2 + \frac{1}{12}a^2}} = \frac{ah}{a + \sqrt{12h^2 + a^2}}.$$

Ответ: $r = \frac{ah}{a + \sqrt{12h^2 + a^2}}$. ◀

- **Задача 9.** Доказать, что плоскости, проходящие через вершину правильной четырехугольной пирамиды и диагонали ее основания, взаимно перпендикулярны.

Решение. Пусть $SABCD$ — наша пирамида с вершиной S и основанием $ABCD$ (рис. 3). Нам надо доказать, что плоскости SBD и SAC перпендикулярны. Прямая DB перпендикулярна AC , ибо AC и BD есть диагонали квадрата $ABCD$. Кроме того, $BD \perp SH$, так как SH — высота пирамиды, перпендикулярная любой прямой, лежащей в плоскости ABC . Отсюда следует, что BD перпендикулярно плоскости SAC , будучи перпендикулярно двум пересекающимся прямым AC и SH , лежащим в этой плоскости.

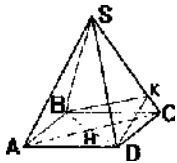


Рис. 3

Итак, плоскость SBD содержит перпендикуляр к плоскости SAC и потому эти плоскости перпендикулярны, что и требовалось доказать.

- **Задача 10.** Доказать, что любое боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды перпендикулярно не пересекающейся с ним диагонали основания.

Решение. Пусть опять $SABCD$ — наша пирамида. Мы должны установить, что $SA \perp BD$ (см. рис. 3). Но по теореме о трех перпендикулярах это имеет место, если и только если DB перпендикулярно проекции SA на плоскость $ABCD$, т.е. прямой AC . Но, конечно же, прямые AC и BD перпендикулярны как диагонали квадрата, чем все и доказано.

- **Задача 11.** Доказать, что центр сферы, вписанной в правильную четырехугольную пирамиду, лежит на ее высоте.

Решение. Достаточно доказать, что плоскости SAC и SBD биссектральные при соответствующих двугранных углах. Поскольку центр вписанной сферы лежит на пересечении всех биссектральных плоскостей, он будет лежать на пересечении плоскостей SAC и SBD (если мы докажем, что они биссектральные), т.е. на высоте SH .

Докажем, например, что плоскость SAC является биссектральной.

Треугольники SDC и SBC равны, так что высоты, опущенные из вершин B и D на прямую SC , попадут в одну и ту же точку K (рис.3). Ясно, что угол BKD есть линейный угол двугранного при ребре SC .

Плоскость SAC пересекается с плоскостью BDK по прямой HK . Из того, что H — середина BD , следует, что KH — биссектриса (ибо $BK = KD$). Слово в слово так же, как в задаче 4, доказывается, что угол HKD есть линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями SAC и SDC , а угол HKB есть линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями SBC и SAC . Из $\angle BKH = \angle HKD$ следует теперь, что плоскость SAC биссектральная, что и требовалось доказать.

- **Задача 12.** Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S и основанием $ABCD$. Известно, что сторона основания этой пирамиды равна 6, а высота $SH = 4$. Найти радиус шара, вписанного в трехгранный угол при вершине C , касающегося шара, вписанного в пирамиду и целиком лежащего внутри пирамиды $SBCD$.

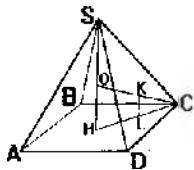


Рис. 4

Решение. Пусть O — центр шара, вписанного в пирамиду. Мы знаем, что он лежит на высоте SH и, значит, отрезок OH равен его радиусу. Найдем OH .

Объем пирамиды V равен $\frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 = 48$. Боковая сторона SA находится по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника SAH (рис. 4):

$$SA = \sqrt{AH^2 + SH^2} = \sqrt{18 + 16} = \sqrt{34}.$$

Значит, высота в треугольнике SAB равна

$$\sqrt{SA^2 - \frac{1}{4}AB^2} = \sqrt{34 - 9} = 5.$$

Следовательно, $S_{SAB} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15$.

Теперь уже можно найти площадь полной поверхности пирамиды:

$$S = 4 \cdot S_{SAB} + S_{ABCD} = 60 + 36 = 96.$$

Отсюда находим радиус вписанного шара:

$$OH = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot 48}{96} = \frac{3}{2}.$$

Обозначим центр второго шара через K . Оба шара вписаны в трехгранный угол C , так что центры их лежат на пересечении биссектральных плоскостей двугранных углов при ребрах CD и CB , а эти плоскости пересекаются по прямой CO . Тем самым, мы доказали, что точка K лежит на отрезке OC . Если L — проекция точки K на плоскость $ABCD$, то L лежит на HC и KL есть искомый радиус, который мы обозначим через x .

Треугольник OHC прямоугольный, откуда следует, что

$$OC = \sqrt{OH^2 + HC^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 18} = \frac{9}{2}.$$

Из подобия треугольников OHC и KLC следует, что

$$\frac{OH}{KL} = \frac{OC}{KC} \iff \frac{3/2}{x} = \frac{9/2}{9/2 - 3/2 - x}$$

— мы использовали тот факт, что отрезок OK равен сумме радиусов сфер (ведь они касаются!) и $CK = CO - OK$. Из полученного уравнения находим, что $x = \frac{3}{4}$.

Ответ: $\frac{3}{4}$. ◀

- **Задача 13.** Доказать, что диагональ куба перпендикулярна любой скрещивающейся с ней диагональю боковой грани.

Решение. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — наш куб. Докажем, что диагональ $B_1 D$ перпендикулярна диагонали AC . Но проекция $B_1 D$ на плоскость $ABCD$ есть BD . По теореме о трех перпендикулярах из $AC \perp BD$ следует, что $AC \perp B_1 D$, что и требовалось доказать.

- **Задача 14.** Найти угол между диагональю куба и пересекающейся с ней диагональю боковой грани.

Решение. Если $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — наш куб, то мы должны найти угол между отрезками $B_1 D$ и $C_1 D$. Треугольник $B_1 C_1 D$ прямоугольный. Если мы обозначим искомый угол через α , то

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B_1 C_1}{C_1 D} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда $\alpha = \arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $\alpha = \arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$. ◀

- **Задача 15.** Найти угол между скрещивающимися диагоналями смежных граней куба.

Решение. Пусть опять $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ есть наш куб. Нам надо найти угол между диагоналями AC и DC_1 . Но $A_1 C_1 \parallel AC$, так что искомым углом равен углу $A_1 C_1 D$. Но треугольник $A_1 C_1 D$ равносторонний, так как каждая из его сторон равна $a\sqrt{2}$, где a — сторона куба. Теперь уже ясно, каким будет

Ответ: 60° . ◀

- **Задача 16.** Найти синус угла между высотами, опущенными из двух вершин правильного тетраэдра на противоположные грани.

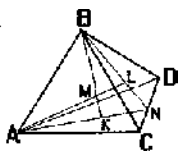


Рис. 5

Решение. Напомню сначала, что правильным тетраэдром называется тетраэдр, в котором все ребра равны. Пусть дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром a . Найдем угол между высотами BK и AL (см. рис. 5).

Докажем, что эти высоты пересекаются (на рисунке они уже таковыми изображены). Действительно, плоскость ABK пересекает ребро CD в его середине N . Кроме того, правильный тетраэдр является правильной пирамидой по отношению к любой своей вершине. Значит, высота AL попадает в центр грани BCD . Но вся медиана BN , а значит, и центр грани BCD лежат в плоскости ABK . Значит, и высота AL лежит в плоскости ABK и мы доказали, что высоты лежат в одной плоскости. Непараллельность их очевидна, так что они действительно пересекаются в некоторой точке M .

В четырехугольнике $MLNK$ углы L и K прямые, откуда следует, что

$$\sin \angle AMB = \sin(\pi - \angle LNK) = \sin \angle LNK = \frac{BK}{BN}.$$

Легко найти, что $BK = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, $BN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, откуда получаем

Ответ: синус искомого угла равен $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ◀

- **Задача 17.** Объем правильной треугольной пирамиды равен одной шестой куба бокового ребра. Найти плоский угол при вершине.

Решение. Пусть пирамида $SABC$ правильная с вершиной S и основанием ABC . Обозначим ее боковое ребро через b , а угол при вершине — через α . Тогда сторона основания равна $2b \sin \frac{\alpha}{2}$. Значит, площадь основания есть $\frac{1}{4}(2b \sin \frac{\alpha}{2})^2 \sqrt{3} = b^2 \sqrt{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

Высота SH находится из прямоугольного треугольника SCH по теореме Пифагора:

$$SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = \sqrt{b^2 - \frac{1}{3} \left(2b \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2} = b \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Теперь уже можно вычислить через b и α объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} \cdot b^2 \sqrt{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot b \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{6} b^3.$$

В получившемся уравнении сокращается b и мы получаем, что

$$2\sqrt{3}y\sqrt{1 - \frac{4}{3}y} = 1 \iff 2y\sqrt{3 - 4y} = 1 \iff 16y^3 - 12y^2 + 1 = 0,$$

где $y = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

Легко угадать, что корнями получившегося кубического уравнения будут числа $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$. Других корней нет, так как корень $\frac{1}{2}$ имеет кратность 2. Из неотрицательности y следует, что

$$y = \frac{1}{2} \iff \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}$. ◀

- **Задача 18.** Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углами α и β . Найти угол между этими диагоналями.

Решение. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — наш параллелепипед. Если угол между диагональю AD_1 и плоскостью $ABCD$ равен α , то, поскольку AD есть проекция AD_1 на плоскость $ABCD$, сам угол DAD_1 равен α . Аналогично, если угол между диагональю AB_1 и плоскостью $ABCD$ равен β , то и сам угол BAB_1 равен β .

Пусть $AA_1 = a$. Тогда $AD_1 = \frac{a}{\sin \alpha}$, $AB_1 = \frac{a}{\sin \beta}$. Кроме того, $AD = a \operatorname{ctg} \alpha$ и $AB = a \operatorname{ctg} \beta$. Теперь сторону $B_1 D_1$ можно найти из треугольника $A_1 B_1 D_1$ по теореме Пифагора:

$$B_1 D_1^2 = A_1 B_1^2 + A_1 D_1^2 = a^2 (\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta).$$

Теперь косинус искомого угла $\varphi = \angle B_1 A D_1$ находится с помощью теоремы косинусов для треугольника $AB_1 D_1$:

$$\cos \varphi = \frac{\frac{a^2}{\sin^2 \alpha} + \frac{a^2}{\sin^2 \beta} - a^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - a^2 \operatorname{ctg}^2 \beta}{2 \cdot \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \frac{a}{\sin \beta}} = \sin \alpha \sin \beta.$$

Ответ: $\arccos(\sin \alpha \sin \beta)$. ◀

- **Задача 19.** Одна из высот некоторого тетраэдра проходит через точку пересечения высот противоположной грани. Доказать, что все остальные высоты тетраэдра обладают этим же свойством.

Решение. Пусть $ABCD$ — произвольный тетраэдр. Докажем, что высота DH , опущенная из точки D , пересекается с высотой BB_1 треугольника ABC если и только если ребра AC и BD перпендикулярны.

В самом деле, прямая AC перпендикулярна к наклонной BD тогда и только тогда, когда она перпендикулярна ее проекции BH (по теореме о трех перпендикулярах). А последнее имеет место если и только если BH — высота треугольника ABC .

Пусть теперь высота, опущенная из точки D на плоскость ABC , попала в точку пересечения высот треугольника ABC . Тогда по предыдущему замечанию имеем

$$AC \perp BD, \quad AD \perp BC, \quad \text{и} \quad AB \perp CD.$$

Пусть теперь высота опущена, скажем, из вершины A и пусть K — ее пересечение с плоскостью BCD . Из $AC \perp BD$ следует, что точка K лежит на высоте, проведенной в треугольнике BCD из вершины C . Из $AD \perp BC$ следует, что K лежит и на высоте, проведенной из вершины D в треугольнике BCD . Значит, K есть точка пересечения двух (а, следовательно, и всех) высот треугольника BCD , что и требовалось доказать.

Наш урок окончен. Оценка ставится стандартным образом.

Домашнее задание

- 1. В конус вписан шар. Площадь поверхности шара равна площади основания конуса. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания.
- 2. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , а высота, опущенная из какой-нибудь вершины основания на противоположную ей боковую грань равна b . Найти объем пирамиды.
- 3. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный p . Найти объем пирамиды, если двугранный угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен α .
- 4. Основание пирамиды — равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом 8 см. Каждое из боковых ребер равно 9 см. Найти объем пирамиды.
- 5. В правильной четырехугольной пирамиде боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α . Найти угол между смежными боковыми гранями.
- 6. Определить объем параллелепипеда, у которого все ребра равны 1, а плоские углы при одной из вершин равны $\varphi < \frac{\pi}{2}$.
- 7. Основание пирамиды — правильный треугольник со стороной 6 см. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно 4 см. Найти радиус шара, описанного вокруг пирамиды.

- 8. Шар вписан в усеченный конус. Доказать, что площадь поверхности шара меньше площади боковой поверхности конуса.
- 9. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 13 см, а диагонали его боковой грани равны $4\sqrt{10}$ и $3\sqrt{17}$ см. Найти объем параллелепипеда.
- 10. Найти отношение объема куба к объему правильного тетраэдра, ребро которого равно диагонали грани куба.
- 11. Центр верхнего основания правильной четырехугольной призмы и середины сторон нижнего основания служат вершинами вписанной в призму пирамиды, объем которой равен V . Найти объем призмы.
- 12. Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна h , а двугранный угол при основании равен 60° . Найти полную поверхность пирамиды.
- 13. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 1 см, а ее боковая поверхность равна 3 см^2 . Найти объем пирамиды.
- 14. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны a и b . Диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом 60° . Найти боковую поверхность параллелепипеда.
- 15. Высота правильного тетраэдра равна h . Вычислить его полную поверхность.
- 16. Найти объем правильной треугольной призмы, если сторона ее основания равна a , а боковая поверхность равна сумме площадей оснований.
- 17. В основании пирамиды лежит квадрат. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к нему под углом 45° . Среднее по величине боковое ребро равно l . Найти объем пирамиды.
- 18. Боковая поверхность конуса равна S , а расстояние от центра основания до образующей равно r . Найти объем конуса.
- 19. Найти отношение объема шара к объему вписанного куба.
- 20. Металлический шар радиуса R перелит в конус, боковая поверхность которого в три раза больше площади основания. Найти высоту конуса.
- 21. Равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3 и острым углом 60° вращается вокруг меньшего основания. Найти объем полученной фигуры вращения.
- 22. Основаниями правильной усеченной пирамиды служат квадраты со сторонами a и b , где $a > b$. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45° . Найти объем усеченной пирамиды.
- 23. Вычислить объем правильного тетраэдра, если радиус описанной около него сферы равен r .
- 24. В правильной треугольной пирамиде отношение бокового ребра к высоте равно 2. Найти отношение радиуса вписанного в пирамиду шара к стороне основания пирамиды.
- 25. В правильной четырехугольной пирамиде с боковым ребром, равным 20, угол при вершине равен $\frac{\pi}{3}$. Через точку, лежащую на одном из

боковых ребер, проведена прямая, перпендикулярная этому ребру и пересекающая высоту пирамиды. Найти длину отрезка этой прямой, лежащего внутри пирамиды, если точка пересечения этой прямой с высотой делит высоту на две части в отношении 3:7, считая от вершины.

- 26. В правильную шестиугольную пирамиду вписан прямой конус, и около нее описан прямой конус. Даны высота пирамиды H и радиус основания описанного конуса R . Найти разность объемов описанного и вписанного конусов.
- 27. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно b , а радиус описанного шара равен R . Найти объем пирамиды.
- 28. Отношение объемов двух шаров равно k . Найти отношение их площадей поверхности.
- 29. В шар вписан конус с высотой H . Объем конуса равен $1/4$ объема шара. Найти объем шара.
- 30. В сферу вписана правильная четырехугольная пирамида, у которой двугранный угол при основании равен α . Площадь сферы равна S . Найти площадь основания пирамиды.
- 31. В цилиндр вписана правильная треугольная призма объема V . Найти объем цилиндра.
- 32. Все ребра прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют равные длины. Найти угол между BC_1 и AC .
- 33. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, а площади диагональных сечений равны Q_1 и Q_2 . Найти площадь боковой поверхности.
- 34. Основание пирамиды — треугольник со сторонами 5, 5 и 6. Высота пирамиды проходит через центр круга, вписанного в этот треугольник и равна 2. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.
- 35. Боковое ребро правильной треугольной усеченной пирамиды равно b и образует со стороной большего основания угол β . Площади оснований относятся как 4:1. Найти объем пирамиды.
- 36. Все ребра треугольной пирамиды, кроме AB , имеют длину a , причем угол ACB равен α . Найти объем пирамиды.
- 37. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны a и b , где $a > b$. Угол между плоскостями боковой грани и основания равен φ . Найти площадь полной поверхности усеченной пирамиды.
- 38. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ высота SO равна диагонали основания. Пусть M и N есть соответственно середины ребер BC и SA . Найти угол между прямыми SM и BN .
- 39. Диагонали осевого сечения цилиндра пересекаются под углом α , обращенным к основанию. Объем цилиндра равен V . Найти его высоту.
- 40. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α , проведена плоскость, составляющая с основанием угол β . Найти объем конуса, если высота его равна h .

Урок 44 [2]

Вспомогательные задачи

Этот урок должен подготовить вас к стереометрическому мышлению на более высоком уровне. Практически все задачи, которые будут разобраны здесь, должны пониматься как новые теоремы стереометрии и их надо выучить «назубок». Владение ими даст вам большое преимущество перед школьниками, которые не изучали таких теорем. Уже прорешивая варианты вступительных экзаменов, вы убедитесь, что благодаря методам этого урока, многие задачи «на пятерку» для вас будут очевидными.

- **Задача 1.** Дан трехгранный угол с плоскими углами α , β и γ и противолежащими им двугранными углами A , B и C . Доказать, что существует трехгранный угол с плоскими углами $\pi - A$, $\pi - B$ и $\pi - C$ и двугранными углами $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$ и $\pi - \gamma$.

Решение. Докажем сначала легкое вспомогательное утверждение. Пусть дан двугранный угол и точка P внутри него. Предположим, что из P опущены перпендикуляры PR и PQ на плоскости двугранного угла. Тогда угол RPQ равен $\pi - A$, где A — величина двугранного угла (см. рис. 1).

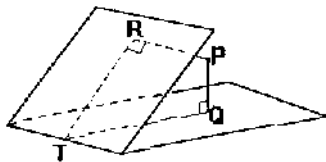


Рис. 1

Действительно, опустим из точки Q перпендикуляр QT на ребро двугранного угла. По теореме о трех перпендикулярах отрезок PT будет перпендикулярен ребру двугранного угла. Снова применяя теорему о трех перпендикулярах для ребра двугранного угла, наклонной PT и ее проекции RT , получим, что и отрезок RT перпендикулярен ребру нашего двугранного угла. Значит, угол RTQ есть линейный угол исходного двугранного угла.

Плоскость TPQ перпендикулярна той грани двугранного угла, что содержит точку Q , так как она проходит через перпендикуляр PQ к этой плоскости. Ребро двугранного угла перпендикулярно двум непараллельным прямым TQ и PQ , лежащим в этой плоскости. Значит, оно перпендикулярно плоскости TPQ . Аналогичным образом, оно перпендикулярно плоскости TPR . Но через точку T можно провести только одну плоскость, перпендикулярную к данной прямой. Значит, плоскости TPQ и TPR совпадают, т.е.

точки T, P, Q и R лежат в одной плоскости. Теперь наше вспомогательное утверждение доказано, поскольку в четырехугольнике $TQPR$ имеем

$$\angle TRP = \angle TQP = 90^\circ \Rightarrow \angle RTQ + \angle RPQ = 180^\circ,$$

что и требовалось.

Решаем исходную задачу. Пусть $SABC$ — трехгранный угол с вершиной S и ребрами SA, SB и SC . Возьмем какую-нибудь точку S_1 внутри него и опустим перпендикуляры S_1A_1, S_1B_1 и S_1C_1 на плоскости SBC, SAC и SAB соответственно. Утверждается, что трехгранный угол с вершиной S_1 будет искомым (он называется полярным к исходному углу). Действительно, то, что плоские углы полярного угла будут дополнять до π двугранные углы исходного, прямо следует из нашего вспомогательного утверждения. Однако и второй факт (а именно, то, что двугранные углы полярного угла дополняют до π плоские углы исходного угла) следует из вспомогательного утверждения, поскольку ребра SA, SB, SC перпендикулярны граням $S_1B_1C_1, S_1A_1C_1$ и $S_1A_1B_1$ соответственно (докажите сами!) — ведь тогда исходный угол будет полярным к полярному и его плоские углы будут дополнять двугранные углы полярного до π , что и требовалось доказать.

- **Задача 2.** Доказать, что сумма плоских углов трехгранного угла меньше 2π .

Решение. Пусть дан трехгранный угол с вершиной S . Отметим на его ребрах равные отрезки SA, SB и SC . Пусть O — проекция точки S на плоскость ABC . Рассмотрим треугольники ABS и ABO . Они оба равнобедренные (ибо $AS = BS$ по построению, а проекции равных отрезков равны, так что $AO = OB$). Наклонная всегда больше своей проекции, так что при равных основаниях, боковая сторона треугольника ASB больше боковой стороны треугольника AOB . Выразив каждую из боковых сторон через основание, получим, что

$$\begin{aligned} AO &= \frac{AB}{2 \sin \left(\frac{1}{2} \angle AOB \right)} < AS = \frac{AB}{2 \sin \left(\frac{1}{2} \angle ASB \right)} \iff \\ \iff \sin \left(\frac{1}{2} \angle ASB \right) &< \sin \left(\frac{1}{2} \angle AOB \right) \iff \angle ASB < \angle AOB; \end{aligned}$$

мы перешли от синусов к углам, потому, что их половинки лежат в первой четверти, где синус возрастает.

Аналогично доказывается, что $\angle BSC < \angle BOC$ и $\angle ASC < \angle AOC$. Сложив почленно эти неравенства, получим

$$\angle ASB + \angle BSC + \angle ASC < \angle AOB + \angle BOC + \angle AOC \leq 2\pi,$$

причем оба неравенства будут строгими, если точка O лежит вне треугольника ABC . Наша задача полностью решена.

- **Задача 3.** Пусть α , β и γ — плоские углы трехгранного угла, A , B и C — противоположные им двугранные углы. Доказать, что

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}.$$

Это утверждение называется *теоремой синусов* для трехгранных углов.

Решение. Пусть дан трехгранный угол с вершиной S и ребрами SA , SB и SC , двугранные углы при которых равны соответственно A , B и C . Возьмем какую-нибудь точку P на ребре SA . Пусть O — ее проекция на плоскость SAC . Пусть R — проекция точки O на ребро SC и Q — проекция точки O на ребро SB (см. рис. 2).

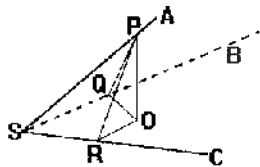


Рис. 2

Я изобразил случай, когда точка O попала вовнутрь угла SBC . В рассуждениях не надо будет заменять ни одного слова и в случае, если точка O попала вне или на сторону угла SBC .

Из теоремы о трех перпендикулярах следует, что угол PRO равен C , а угол PQO равен B , поскольку каждый из них есть линейный угол двугранного угла при соответствующем ребре. Нужно найти двумя способами отрезок PO .

С одной стороны, $PO = PR \sin C = SP \cdot \sin \beta \cdot \sin C$. С другой стороны, имеем $PO = PQ \sin B = SP \sin \gamma \sin B$. Приравниваем:

$$SP \cdot \sin \beta \cdot \sin C = SP \sin \gamma \sin B \Leftrightarrow \sin \beta \cdot \sin C = \sin \gamma \sin B \Leftrightarrow \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C},$$

что и требовалось доказать. Аналогично устанавливается и левое равенство, обещанное в условии. Задача решена.

- **Задача 4.** Пусть α , β и γ — плоские углы трехгранного угла, A , B и C — противоположные им двугранные углы. Доказать, что

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A.$$

Это — первая *теорема косинусов* для трехгранных углов.

Решение. Пусть мы имеем трехгранный угол с вершиной S и ребрами SA , SB и SC . Возьмем произвольную точку P на ребре SA . Проведем через точку P плоскость π , перпендикулярную прямой SA . Пусть она пересечет ребра SC и SB в точках Q и R соответственно (см. рис. 3).

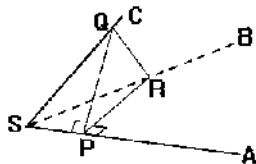


Рис. 3

Выразим двумя способами квадрат отрезка QR по планиметрической теореме косинусов. Обозначим длину SP через p . Тогда

$$PQ = p \operatorname{tg} \beta, \quad PR = p \operatorname{tg} \gamma, \quad SQ = \frac{p}{\cos \beta} \quad \text{и} \quad SR = \frac{p}{\cos \gamma}.$$

Имеем с одной стороны

$$\begin{aligned} QR^2 &= QS^2 + SR^2 - 2 \cdot QS \cdot SR \cdot \cos \alpha = \\ &= \frac{p^2}{\cos^2 \gamma} + \frac{p^2}{\cos^2 \beta} - \frac{2p^2}{\cos \beta \cos \gamma} \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Угол QPR равен A , так что можем записать теорему косинусов для треугольника PQR в следующем виде:

$$\begin{aligned} QR^2 &= QP^2 + RP^2 - 2 \cdot QP \cdot PR \cdot \cos A = \\ &= p^2 \operatorname{tg}^2 \beta + p^2 \operatorname{tg}^2 \gamma - 2p^2 \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \cos A. \end{aligned}$$

Приравнявая выражения для QR^2 , сокращая на p^2 , и пользуясь формулами

$$\frac{1}{\cos^2 \gamma} = 1 + \operatorname{tg}^2 \gamma, \quad \frac{1}{\cos^2 \beta} = 1 + \operatorname{tg}^2 \beta,$$

придем к равенству

$$2 - \frac{2 \cos \alpha}{\cos \beta \cos \gamma} = - \frac{2 \sin \beta \sin \gamma \cos A}{\cos \beta \cos \gamma},$$

которое после умножения на $\frac{1}{2} \cos \beta \cos \gamma$ и перегруппировки дает то, что требуется.

Теорема доказана для случая, когда плоскость π пересекает оба ребра SC и SB . Разберите, пожалуйста, сами случаи, когда плоскость π пересекает одно из ребер и продолжение другого, или продолжения обоих ребер, или не пересекает одного из ребер (возможно, не пересекает ни одного ребра). В случае, когда плоскость π пересекает каждую из прямых SC и SB , надо знаки некоторых косинусов поменять, что не повлияет на равенство. Если хотя бы одна из прямых SA и SB не пересекается с плоскостью π , то левая и правая часть в теореме косинусов равны нулю.

► **Задача 5.** Три прямые пересекаются в точке A . На каждой из них взято по две точки: B и B_1 , C и C_1 , D и D_1 . Доказать, что

$$\frac{V_{ABCD}}{V_{AB_1C_1D_1}} = \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{AB_1 \cdot AC_1 \cdot AD_1},$$

где через V_{ABCD} (соответственно $V_{AB_1C_1D_1}$) мы обозначили для краткости объем тетраэдра $ABCD$ (соответственно $AB_1C_1D_1$).

Решение. Пусть h и h_1 — длины перпендикуляров, опущенных соответственно из точек D и D_1 на плоскость ABC , совпадающую с плоскостью AB_1C_1 .

Обозначим площади треугольников ABC и AB_1C_1 через S и S_1 соответственно. Мы знаем из планиметрии (см. урок 29), что $\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{AB_1 \cdot AC_1}$. Кроме того,

$$\frac{V_{ABCD}}{V_{AB_1C_1D_1}} = \frac{Sh}{S_1 h_1} = \frac{AB \cdot AC \cdot h}{AB_1 \cdot AC_1 \cdot h_1},$$

и остается доказать лишь, что $\frac{h}{h_1} = \frac{AD}{AD_1}$.

Пусть P — проекция точки D на плоскость ABC и P_1 — проекция точки D_1 на ту же плоскость. Треугольники APD и AP_1D_1 подобны, и, следовательно,

$$\frac{AD}{AD_1} = \frac{DP}{D_1P_1} = \frac{h}{h_1},$$

что и требовалось доказать. Наша задача решена.

► **Задача 6.** Доказать, что объем произвольного тетраэдра $ABCD$ равен

$$V = \frac{1}{6} \cdot AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin \varphi,$$

где d — расстояние между прямыми AB и CD , а φ — угол между ними.

Решение. Проведем через прямую AB плоскость, параллельную прямой CD , через прямую CD — плоскость, параллельную прямой AB . Аналогичным образом проведем пары плоскостей для пар ребер AD и BC , AC и BD .

Докажем, что плоскости, построенные для пары AB и CD параллельны. Действительно, каждая из них содержит две пересекающиеся прямые, одна из которых совпадает с AB или CD , а другая параллельна той прямой из пары AB, CB , которая не лежит в плоскости. Значит, согласно признаку г) из пункта «Теоремы о параллельности прямых и плоскостей» урока 43, эти плоскости параллельны. Аналогичным образом, параллельны плоскости в каждой из других двух пар. Следовательно, эти шесть плоскостей ограничивают параллелепипед (рис. 4).

Если принять за основание параллелепипеда грань AD_1BC_1 , то высота будет равна в точности расстоянию между прямыми AB и CD , т.е. d . Площадь этой грани равна $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot C_1D_1 \cdot \sin \varphi$, ибо угол между диагоналями AB и C_1D_1 равен углу между прямыми AB и CD , т.е. φ .

Мы доказали, что объем построенного параллелепипеда равен

$$W = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin \varphi.$$

Найдем, какую часть объема параллелепипеда составляет объем тетраэдра $ABCD$. Ясно, что

$$(1) \quad V = V_{ABCD} = W - V_{ABCD_1} - V_{ABDC_1} - V_{ADCB_1} - V_{BDCA_1}.$$

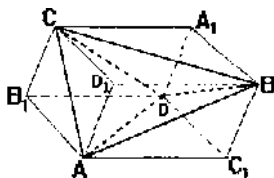


Рис. 4

Пирамида AB_1CD имеет основание AB_1D , по площади равное половине площади параллелограмма AB_1DC_1 . Высота этой пирамиды, опущенная из вершины C , совпадает с высотой параллелепипеда. Объем пирамиды AB_1CD равен одной трети произведения площади основания AB_1D на высоту, опущенную из вершины C . Это доказывает, что $V_{AB_1CD} = \frac{1}{6}W$.

Аналогично объемы всех остальных пирамид, дополняющих $ABCD$ до параллелепипеда, равны $\frac{1}{6}W$. Подставляя эти значения в равенство (1), получим, что

$$V = W - \frac{4}{6}W = \frac{1}{3}W = \frac{1}{6} \cdot AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin \varphi,$$

что и требовалось доказать.

► **Задача 7.** Дан тетраэдр $ABCD$. Точки K, L, M и N лежат на ребрах AD, DC, AB и BC соответственно. Доказать, что эти четыре точки лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

а) $KL \parallel AC \parallel MN$;

б) если хотя бы одна из прямых KL и MN не параллельна AC , то они обе не параллельны AC и пересекают эту прямую в одной и той же точке.

Решение. Предположим, что точки K, L, M и N лежат в одной плоскости π . Возможны два случая.

Случай 1. Плоскость π параллельна прямой AC . Тогда, очевидно, имеет место а).

Случай 2. Плоскость π пересекает прямую AC в некоторой точке P . Тогда прямая KL не может быть параллельна AC . Точка ее пересечения с AC лежит как на AC , так и на KL , а значит, и на плоскости π . Но точка, одновременно лежащая в плоскости π и на прямой AC , всего одна — это точка P . Итак, прямая KL проходит через точку P . Аналогично прямая MN обязана проходить через точку P , и мы установили необходимость условий, данных в задаче.

Докажем достаточность каждого из условий а) и б). Если выполнено а), то прямые по определению параллельности лежат в одной плоскости. В этой же плоскости будут лежать и все точки K, L, M, N .

Если выполнено условие б), то прямые KL и MN пересекаются и, значит, лежат в одной плоскости, чем все и доказано.

► **Задача 8.** Дан тетраэдр $ABCD$. Точки K, L, M и N лежат на ребрах AD, DC, AB и BC соответственно. Доказать, что эти четыре точки лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$(2) \quad \frac{AK}{KD} \cdot \frac{DL}{LC} = \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC}.$$

Решение. Предположим сначала, что все эти точки лежат в одной плоскости. Если эта плоскость параллельна AC , то каждая из прямых KL и NM параллельна AC . В этом случае треугольники ADC и KLD подобны, и, значит,

$$\frac{AK}{KD} = \frac{LC}{DL} \iff \frac{AK}{KD} \cdot \frac{DL}{LC} = 1.$$

Точно так же из подобия треугольников ABC и MNB следует, что

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} = 1 = \frac{AK}{KD} \cdot \frac{DL}{LC},$$

т.е. в этом случае условие (2) выполняется.

Если плоскость пересекает прямую AC в некоторой точке P , то из предыдущей задачи мы уже знаем, что прямые MN и KL пересекут эту прямую в той же точке P . Запишем теорему Менелая для треугольников ADC и ABC и секущих KP и MP :

$$\frac{AK}{KD} \cdot \frac{DL}{LC} \cdot \frac{PC}{PA} = 1 = \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{PC}{PA} \iff \frac{AK}{KD} \cdot \frac{DL}{LC} = \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC},$$

и необходимость условия (2) доказана.

Проверим его достаточность. Пусть выполняется условие (2). Если обе части равенства равны 1, то имеем, в частности,

$$\frac{AK}{KD} = \frac{CL}{LD} \Rightarrow \frac{AD}{KD} = \frac{CD}{LD},$$

а отсюда уже следует, что треугольники ADC и KDL подобны и что $KL \parallel AC$. Аналогично $MN \parallel AC$ и, значит, $MN \parallel KL$. Мы доказали, что в этом случае все четыре точки лежат в одной плоскости.

Если обе части равенства (2) не равны 1, то каждая из прямых KL и MN пересекает прямую AC — пусть это будет соответственно в точках P_1 и P_2 . Снова пишем теорему Менелая:

$$\frac{AK}{KD} \cdot \frac{DL}{LC} \cdot \frac{P_1C}{P_1A} = 1 = \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{P_2C}{P_2A} \iff \frac{P_1C}{P_1A} = \frac{P_2C}{P_2A} \iff P_1 = P_2.$$

Значит, прямые KL и MN пересекают AC в одной и той же точке. Согласно предыдущей задаче они лежат в одной плоскости, чем все и доказано.

► **Задача 9.** Сфера касается ребер AD, DC, AB и BC тетраэдра $ABCD$. Доказать, что все точки касания лежат в одной плоскости.

Решение. Обозначим точки касания сферы с ребрами AD, DC, AB и BC соответственно через K, L, M и N . Касательные, проведенные из одной точки к сфере равны, так что имеем

$$AK = AM, KD = DL, CL = CN \text{ и } BM = BN.$$

Применим результат задачи 8 и проверим для нашего случая равенство (2):

$$\frac{AK}{AM} \cdot \frac{DL}{DK} \cdot \frac{CN}{CL} \cdot \frac{BM}{BN} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

↓

$$\frac{AK}{KD} \cdot \frac{DL}{LC} = \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC},$$

что и требовалось доказать. Задача полностью решена.

- **Задача 10.** Дан тетраэдр $ABCD$. Доказать, что ребра AD и BC перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2.$$

Решение. Нам потребуется одно несложное вспомогательное утверждение. Пусть дан треугольник ABC . Тогда геометрическое место точек H таких, что H лежит в плоскости этого треугольника и $AB^2 - AH^2 = BC^2 - CH^2$, совпадает с высотой треугольника ABC , опущенной из вершины B .

Пусть какая-нибудь точка H принадлежит указанному ГМТ. Если H_1 — проекция H на прямую AC , то $AH^2 = AH_1^2 + H_1H^2$ и $CH^2 = CH_1^2 + H_1H^2$, откуда получаем, что

$$\begin{aligned} AB^2 - AH^2 = BC^2 - CH^2 &\iff AB^2 - AH_1^2 - HH_1^2 = BC^2 - CH_1^2 - HH_1^2 \iff \\ &\iff AB^2 - AH_1^2 = BC^2 - CH_1^2. \end{aligned}$$

Итак, точка H принадлежит указанному ГМТ тогда и только тогда, когда ему принадлежит точка H_1 . Но на прямой AC есть единственная точка из нашего ГМТ — это основание высоты треугольника ABC , опущенной из вершины C .

В самом деле, ясно, что основание высоты лежит в нашем ГМТ. Введем на прямой AC координаты с началом в точке A . Пусть точка C имеет координату c и точка с координатой x принадлежит рассматриваемому ГМТ.

$$\text{Тогда} \quad AB^2 - x^2 = BC^2 - (c - x)^2 \iff x = \frac{AB^2 + c^2 - BC^2}{2c},$$

чем и доказана единственность точки x , ибо в правой части равенства для x стоит константа. Наше утверждение про ГМТ доказано.

Пусть H — основание высоты тетраэдра $ABCD$, опущенной из вершины D . Мы уже знаем, что $AD \perp BC$ тогда и только тогда, когда точка H лежит на высоте треугольника ABC , опущенной из вершины B . Последнее, согласно нашему вспомогательному утверждению, имеет место, если и только если

$$\begin{aligned} AB^2 - AH^2 = BC^2 - BH^2 &\iff AB^2 + CH^2 = BC^2 + AH^2 \iff \\ \iff AB^2 + CH^2 + HD^2 = BC^2 + AH^2 + HD^2 &\iff AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Наш урок окончен. Оценку ставьте себе, как обычно. Все десять задач с решениями знать и помнить **наизусть**. Без этого нет смысла браться за следующий урок.

Домашнее задание

- 1. Докажите, что если двугранные углы трехгранного угла прямые, то его плоские углы тоже прямые.
- 2. Докажите, что трехгранные углы равны, если равны их соответственные двугранные углы.
- 3. Докажите, что сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего плоского угла.
- 4. Докажите, что сумма двугранных углов трехгранного угла больше π .
- 5. Луч SC_1 лежит внутри трехгранного угла $SABC$ с вершиной S . Докажите, что сумма плоских углов трехгранного угла $SABC$ больше суммы плоских углов трехгранного угла $SABC_1$.
- 6. Пусть α , β и γ — плоские углы трехгранного угла, а A , B и C — его двугранные углы. Доказать, что имеет место равенство

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos \alpha \quad —$$

это утверждение называется второй теоремой косинусов для трехгранного угла.

- 7. Пусть α , β и γ — плоские углы трехгранного угла, а противоположные им ребра образуют с плоскостями граней углы a , b и c . Доказать, что

$$\sin \alpha \sin a = \sin \beta \sin b = \sin \gamma \sin c.$$

- 8. Доказать, что если все плоские углы трехгранного угла тупые, то все его двугранные углы тоже тупые.
- 9. Доказать, что если все двугранные углы трехгранного угла острые, то и все его плоские углы тоже острые.
- 10. Проведя через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру, можно достроить тетраэдр до параллелепипеда (см. доказательство задачи 6). Доказать, что при таком достраивании тетраэдра получается прямоугольный параллелепипед, если и только если все грани тетраэдра есть равные треугольники.
- 11. Две окружности, не лежащие в одной плоскости, пересекаются в двух различных точках A и B . Доказать, что существует единственная сфера, содержащая обе эти окружности.
- 12. Шар радиуса r касается всех ребер треугольной пирамиды. Центр шара лежит внутри пирамиды на ее высоте на расстоянии $r\sqrt{3}$ от вершины. Доказать, что пирамида правильная.
- 13. Шар касается боковых граней треугольной пирамиды в точках пересечения их высот. Доказать, что пирамида правильная.

- 14. Шар касается всех боковых граней треугольной пирамиды в центрах описанных около них окружностей. Известно, кроме того, что все плоские углы при вершине пирамиды равны. Доказать, что пирамида правильная.
- 15. Шар касается всех боковых граней треугольной пирамиды в точках пересечения их медиан. Доказать, что пирамида правильная.
- 16. Шар касается всех боковых граней треугольной пирамиды в точках пересечения их биссектрис. Доказать, что пирамида правильная.
- 17. Дана треугольная пирамида $SABC$. Шар касается всех сторон треугольника ABC в их серединах и проходит через середины ребер SA , SB и SC . Доказать, что пирамида правильная.
- 18. Доказать, что если все двугранные углы тетраэдра равны, то он правильный.
- 19. Доказать, что объем тетраэдра $ABCD$ равен

$$V = \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot AD \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \sin \delta,$$

где β и γ — плоские углы при вершине A , противолежащие ребрам AB и AC , а δ — двугранный угол при ребре AD .

- 20. Площади двух граней тетраэдра равны S_1 и S_2 . Известно, что длина их общего ребра равна a , а двугранный угол между ними равен α . Доказать, что объем тетраэдра равен

$$V = \frac{2S_1 S_2 \sin \alpha}{3a}.$$

Урок 45 [2]

Тетраэдры

Этот урок посвящен задачам про тетраэдры в комбинациях с любыми другими телами. Все эти задачи довольно-таки трудны. Общих рецептов тут нет. Нам надо просто набраться опыта. Обращайте внимание, как «работают» теоремы из предыдущего урока, а также теорема Менелая. Вы увидите, что знание теоремы Менелая — это просто находка для решения стереометрических задач. Я предполагаю, что вы уже блестяще владеете материалом уроков 43 и 44, и пользуюсь доказанными там фактами без ссылок на них. Если что-то из моих рассуждений непонятно, проглядите еще разок эти уроки. Разумеется, если оказалось так, что забылась и теорема Менелая, то нужно повторить и ее вместе с доказательством. Применяя теорему Менелая, я обычно пишу к какому треугольнику и к какой секущей

она применяется. Я советую вам сначала написать ее самому, а потом уже смотреть в текст.

- **Задача 1.** В пирамиде $ABCD$ имеем $AB = 6$, $CD = 8$. Остальные ребра равны $\sqrt{74}$. Найти радиус шара, описанного около пирамиды.

Решение. Из равенства

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 = 74 + 74$$

следует, что ребра AB и CD перпендикулярны. Значит, высота, опущенная из точки D , проходит через высоту треугольника ABC , проведенную из точки C . Но треугольник ABC равнобедренный, так что эта высота есть и медиана треугольника ABC . Отсюда следует, что плоскость, проходящая через точки D , C и точку K — середину AB — перпендикулярна ребру AB (см. рис. 1).

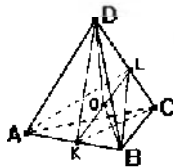


Рис. 1

Аналогичным образом, плоскость ABL перпендикулярна ребру DC (L — середина DC).

Центр O вписанной сферы равноудален от всех вершин тетраэдра. Но множество точек, равноудаленных от A и B , есть плоскость, перпендикулярная отрезку AB и проходящая через его середину, т.е. плоскость DKC . Значит, точка O лежит в плоскости DKC и (по той же причине) в плоскости ABL , т.е. точка O лежит на прямой KL .

В треугольнике ABC известны все стороны: $AB = 6$, $AC = BC = \sqrt{74}$. Поэтому легко находится высота KC :

$$KC = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{74 - 9} = \sqrt{65}.$$

В треугольнике KDC имеем $DC = 8$, $DK = KC = \sqrt{65}$. Отсюда находим, что

$$KL = \sqrt{KC^2 - LC^2} = \sqrt{65 - 16} = 7.$$

Если точка O лежит внутри отрезка KL , то $KO + OL = 7$, причем $KO = \sqrt{R^2 - BK^2} = \sqrt{R^2 - 9}$ и $OL = \sqrt{R^2 - 16}$. Итак, имеем уравнение

$$\sqrt{R^2 - 9} + \sqrt{R^2 - 16} = 7 \iff R = 5.$$

Если точка O лежит вне тетраэдра, то либо $KO + 7 = OL$, либо $OL + 7 = KO$, т.е. имеем либо уравнение

$$\sqrt{R^2 - 9} + 7 = \sqrt{R^2 - 16} \iff \emptyset,$$

либо уравнение

$$\sqrt{R^2 - 16} + 7 = \sqrt{R^2 - 9} \iff \emptyset,$$

и наша задача полностью решена.

Ответ: радиус описанного шара равен 5. ◀

- **Задача 2.** Ребро правильного тетраэдра $DABC$ равно a . Через вершину A параллельно ребру BC проведена плоскость так, что угол между прямой AB и этой плоскостью равен 30° . Найти площадь получившегося сечения.

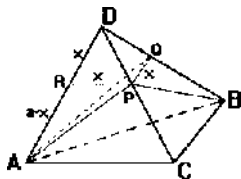


Рис. 2

Решение. В этой задаче довольно сложно изобразить угол между проведенной плоскостью и ребром AB . Но без этого вполне можно обойтись. Ясно, что данная плоскость пересекает грань BDC по отрезку PQ , параллельному прямой BC (рис. 2).

Отрезок PQ обозначим через x . Если мы найдем x , то легко будет и вычислить площадь треугольника APQ . Какова стратегия поиска x ?

Мы знаем, что ребро AB наклонено к плоскости APQ под углом 30° . Значит, по определению угла между прямой и плоскостью угол между AB и его проекцией на плоскость APQ равен 30° . Пусть B_1 — проекция точки B на плоскость APQ (ее не надо изображать). Тогда треугольник ABB_1 прямоугольный с углом A равным 30° . Следовательно, $BB_1 = AB \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$. Таким образом, что расстояние от точки B до плоскости APQ равно $\frac{a}{2}$, т.е. мы знаем высоту пирамиды $APQB$, опущенную из точки B . Разумеется, легко вычислить высоту этой же пирамиды, опущенную из точки A на плоскость BPQ — ведь она совпадает с высотой $ABCD$ и не зависит от x . Полученный двумя способами объем пирамиды $ABPQ$ даст уравнение на x .

Приступим к реализации этого плана. Возьмем точку R на отрезке AD такую, что $PR \parallel AC$. Треугольники DPQ и DPR равносторонние, так что

$$DR = DP = DQ = PR = PQ = x.$$

Следовательно, $AR = a - x$. Из треугольника ARP найдем сторону AP по теореме косинусов для угла ARP , равного 120° :

$$AP^2 = x^2 + (a - x)^2 - 2x(a - x) \cos 120^\circ = x^2 - ax + a^2.$$

Треугольник APQ равнобедренный, поэтому его высоту, опущенную из вершины A , можно найти по теореме Пифагора:

$$h^2 = AP^2 - \left(\frac{PQ}{2}\right)^2 = x^2 - ax + a^2 - \frac{1}{4}x^2 = \frac{3}{4}x^2 - ax + a^2.$$

Значит, площадь треугольника APQ равна

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{\frac{3}{4}x^2 - ax + a^2}.$$

Площадь S_2 треугольника PQB вычисляется проще:

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot QB \cdot \sin \angle PQB = \frac{1}{2} x(a - x) \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} x(a - x).$$

Высота тетраэдра $DABC$ равна $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Теперь мы имеем уравнение на x :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot S_1 \cdot \frac{a}{2} &= \frac{1}{3} \cdot S_2 \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} \iff S_1 = 2S_2\sqrt{\frac{2}{3}} \iff \\ &\iff \sqrt{\frac{3}{4}x^2 - ax + a^2} = (a-x)\sqrt{2} \iff x = \frac{2}{5}a. \end{aligned}$$

Остается подставить в выражение для S_1 найденное значение x .

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{25}a^2$. ◀

- **Задача 3.** Дан тетраэдр $ABCD$. Точки K, L и M лежат на ребрах AD, BD и BC соответственно, причем $AK : KD = 3 : 1$, $DL : LB = 2 : 1$ и $BM = MC$.

Через точки K, L и M проведена плоскость. В каком отношении она делит объем пирамиды?

Решение. Пусть плоскость KLM пересекает ребро AC в точке N (см. рис. 3). Мы знаем из предыдущего урока, что

$$\frac{AK}{KD} \cdot \frac{DL}{LB} = \frac{AN}{NC} \cdot \frac{CM}{MB} \iff \frac{AN}{NC} = 6.$$

Пусть объем пирамиды $ABCD$ равен V . Найдем объем W многогранника $AKNMLB$. Легко видеть, что W есть разность объемов пирамид $AKNP$ и $MLBP$.

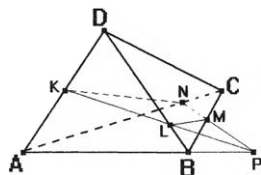


Рис. 3

Согласно результату задачи 5 урока 44 имеем

$$\frac{V_{AKNP}}{V} = \frac{AK}{AD} \cdot \frac{AP}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{5} = \frac{27}{35},$$

поскольку пирамиды $ABCD$ и $AKNP$ имеют общий трехгранный угол A .

Аналогично

$$\frac{V_{BLMP}}{V} = \frac{BP}{AB} \cdot \frac{BM}{BC} \cdot \frac{BL}{BD} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{30},$$

поскольку пирамиды $ABCD$ и $LMPB$ лежат на сторонах одного и того же трехгранного угла B .

Итак, $W = V_{AKNP} - V_{BLMP} = \frac{27}{35}V - \frac{1}{30}V = \frac{31}{42}V$. Значит, объем оставшейся части равен $\frac{11}{42}V$ и мы получаем

Ответ: плоскость делит объем пирамиды в отношении $31 : 11$. ◀

- **Задача 4.** Сфера касается ребер AS, CS, AB и BC треугольной пирамиды $SABC$ в точках P, Q, R и T соответственно. Найти длину отрезка QT , если $PQ = PR = 8$ см, $PT = \sqrt{82}$ см и QT на 7 см больше, чем RT .

Решение. Согласно задаче 9 предыдущего урока (на экзамене вы должны целиком сформулировать и доказать ее утверждение) точки P, Q, R и T

лежат в одной плоскости. Четырехугольник $PQTR$ вписан в окружность, являющуюся сечением данной сферы его плоскостью. Отсюда следует, что $\angle QTP = \angle RTP$ как углы, опирающиеся на равные хорды (ибо $PQ = PR = 8$).

Обозначим эти углы через α , а отрезок RT через x . Запишем теоремы косинусов для треугольников PTQ и PTR :

$$\begin{cases} 64 = 82 + (x+7)^2 - 2\sqrt{82}(x+7)\cos\alpha, \\ 64 = 82 + x^2 - 2x\sqrt{82}\cos\alpha. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим, что

$$14x + 49 - 14\sqrt{82}\cos\alpha = 0 \iff 2\sqrt{82}\cos\alpha = 2x + 7.$$

Найденное выражение для $2\sqrt{82}\cos\alpha$ подставим во второе уравнение:

$$64 = 82 + x^2 - x(2x+7) \iff x^2 + 7x - 18 = 0 \iff x = -9; 2.$$

Конечно же, мы должны выбрать $x = 2$, откуда $QT = x + 7 = 9$.

Ответ: $QT = 9$ см. ◀

- **Задача 5.** В пирамиде $ABCD$ проведено сечение $KMLN$ так, что точка K лежит на ребре AD , точка M — на ребре DC , точка N — на ребре AB , точка L на ребре BC , и O — точка пересечения диагоналей KL и MN четырехугольника $KMLN$. Сечение $KMLN$ делит пирамиду на две части. Найти отношение объемов этих частей, если известны следующие соотношения между длинами отрезков:

$$4 \cdot OL = 3 \cdot OK, \quad 25 \cdot ON = 24 \cdot OM, \quad DK \cdot NA - KA \cdot BN = KA \cdot NA.$$

Решение. Эта задача решается многократным применением теоремы Менелая. Для начала нужно сделать хороший чертеж (см. рис. 4). Здесь надо пояснить, почему плоскость $KMLN$ пересекает прямую AC (на рис. 4 это пересечение обозначено как точка P).

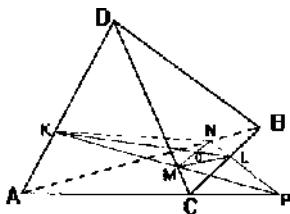


Рис. 4

В самом деле, если бы эта плоскость была параллельна AC , то было бы $KM \parallel NL$, т.е. четырехугольник $KMLN$ был бы трапецией и из подобия треугольников KOM и NOL мы бы имели $\frac{MO}{ON} = \frac{KO}{OL}$, что неверно, поскольку левая часть этого равенства равна $\frac{25}{24}$, а правая — $\frac{4}{3}$.

Запишем теорему Менелая для треугольника MNP и секущей KL :

$$(1) \quad \frac{NL}{LP} \cdot \frac{PK}{KM} \cdot \frac{MO}{ON} = 1 \iff \frac{NL}{LP} \cdot \frac{PK}{KM} \cdot \frac{25}{24} = 1$$

(мы заменили $\frac{MO}{ON}$ на $25/24$).

Запишем теорему Менелая для треугольника KLP и секущей MN :

$$(2) \quad \frac{KO}{OL} \cdot \frac{LN}{NP} \cdot \frac{PM}{MK} = 1 \iff \frac{4}{3} \cdot \frac{LN}{NP} \cdot \frac{PM}{MK} = 1.$$

Пусть $\frac{NL}{LP} = a$, $\frac{PM}{MK} = b$. Тогда

$$\frac{PK}{KM} = \frac{PM + MK}{KM} = \frac{PM}{MK} + 1 = b + 1 \text{ и } \frac{LN}{NP} = \frac{LN}{LN + LP} = \frac{a}{a + 1}.$$

Подставив найденные значения отношений в (1) и (2), получим систему

$$\begin{cases} \frac{a}{a+1} \cdot b = \frac{3}{4} \\ a(b+1) = \frac{24}{25} \end{cases},$$

которая легко решается: $a = 3/25$, $b = 7$.

Пишем теорему Менелая для треугольника AKP и прямой DC :

$$(3) \quad \frac{PM}{MK} \cdot \frac{KD}{DA} \cdot \frac{AC}{CP} = 1 \iff \frac{KD}{DA} \cdot \frac{AC}{CP} = \frac{1}{7}.$$

А теперь — теорему Менелая для треугольника ANP и прямой BC :

$$(4) \quad \frac{NL}{LP} \cdot \frac{PC}{CA} \cdot \frac{AB}{BN} = 1 \iff \frac{PC}{CA} \cdot \frac{AB}{BN} = \frac{25}{3}.$$

Перемножим равенства (3) и (4):

$$(5) \quad \frac{KD}{DA} \cdot \frac{AB}{BN} = \frac{25}{21}.$$

Соотношение $DK \cdot NA - KA \cdot BN = KA \cdot NA$, данное в условии, можно переписать в виде $\frac{DK}{KA} - \frac{BN}{NA} = 1$.

Пусть $\frac{DK}{KA} = x$, $\frac{BN}{NA} = y$. Тогда $\frac{KD}{DA} = \frac{x}{x+1}$ и $\frac{AB}{BN} = \frac{1}{y} + 1$. Подставляя в (5) найденные значения отношений, получаем систему

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ \frac{x}{x+1} \cdot \frac{y+1}{y} = \frac{25}{21} \end{cases},$$

из которой находим, что $y = \frac{3}{2}$, $x = \frac{5}{2}$.

Итак, $\frac{DK}{KA} = \frac{5}{2}$ и $\frac{BN}{NA} = \frac{3}{2}$. Тогда $\frac{AB}{BN} = \frac{AN}{NB} + 1 = \frac{5}{3}$. Подставив это значение $\frac{AB}{BN}$ в (4), найдем, что $\frac{PC}{CA} = 5$ и $\frac{CP}{PA} = \frac{5}{6}$.

Записываем теорему Менелая для треугольника ABC и секущей NP :

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1 \iff \frac{2}{3} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{5}{6} = 1 \iff \frac{BL}{LC} = \frac{9}{5}.$$

Последний (шестой!) раз применяем теорему Менелая для треугольника ADC и секущей KP .

$$\frac{AK}{KD} \cdot \frac{DM}{MC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1 \iff \frac{2}{5} \cdot \frac{DM}{MC} \cdot \frac{5}{6} = 1 \iff \frac{DM}{MC} = 3.$$

Мы пришли к ситуации, разобранный в задаче 3. Имеем

$$\frac{V_{AKNP}}{V_{ABCD}} = \frac{AK}{AD} \cdot \frac{AP}{AC} \cdot \frac{AN}{AB} = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{24}{5} = \frac{24}{35}.$$

Аналогичным образом получаем

$$\frac{V_{MLCP}}{V_{ABCD}} = \frac{CM}{CD} \cdot \frac{CL}{CB} \cdot \frac{CP}{AC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{14} \cdot 5 = \frac{25}{56}.$$

И, наконец,

$$V_{AKNCML} = V_{AKNP} - V_{MLCP} = V_{ABCD} \cdot \left(\frac{24}{35} - \frac{25}{56} \right) = \frac{67}{280} V_{ABCD}.$$

Объем оставшейся части равен, очевидно, $\frac{213}{280} V_{ABCD}$.

Ответ: 67:213 ◀

- **Задача 6.** Основанием треугольной пирамиды $ABCD$ является треугольник ABC , в котором $A = \frac{\pi}{2}$, $C = \frac{\pi}{6}$, $BC = 2\sqrt{2}$. Известно, что $AD = BD = CD$. Сфера радиуса 1 касается ребер AD, BD , продолжения ребра CD за точку D и плоскости ABC . Найти величину отрезка касательной, проведенной из точки A к сфере.

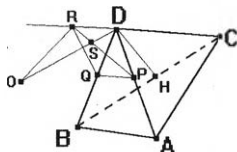


Рис. 5

Решение. Легко подсчитать, что $AB = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{6}$. Из того, что все боковые ребра пирамиды равны, следует, что ее высота DH попадает в центр описанной окружности основания, т.е. на середину отрезка BC . Пусть указанная сфера имеет центр в точке O и касается прямых AD, BD и CD соответственно в точках P, Q и R (см. рис. 5). Тогда DP ,

DQ и DR равны как касательные, проведенные к сфере из одной точки. Кроме того,

$$\angle DRQ = \frac{\pi - (\pi - \angle BDC)}{2} = \frac{\angle BDC}{2}.$$

Треугольник BDC равнобедренный, так что его высота DH является и его биссектрисой. Следовательно, $\angle DRQ = \angle CDH$, откуда получаем, что $RQ \parallel DH$. Мы доказали, что отрезок RQ есть перпендикуляр к плоскости ABC , будучи параллельным к ее перпендикуляру DH . Значит, плоскость PQR перпендикулярна плоскости ABC . Кроме того, $QR \parallel AB$ и потому RQ перпендикулярно QP , т.е. треугольник PQR прямоугольный.

Из равенства $OP = OQ = OR$ следует, что высота пирамиды $OPQR$, опущенная на плоскость PQR пройдет через точку S — середину гипотенузы RP . То же самое верно и для пирамиды $PQRD$.

Следовательно, точки O, S и D лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскости PQR и, следовательно, параллельной плоскости ABC . Отсюда следует, что точка O находится на таком же расстоянии от плоскости ABC , как и точка D . Но это расстояние равно радиусу сферы, так как она касается плоскости ABC . Итак, $DH = 1$. Заодно доказано, что центр O лежит в плоскости ADC .

Мы теперь можем найти все элементы пирамиды. Имеем

$$BD^2 = BH^2 + HD^2 = 2 + 1 = 3 \iff BD = AD = CD = \sqrt{3}.$$

Из $AD^2 + CD^2 = 3 + 3 = 6 = AC^2$ следует, что угол ADC прямой, так же как и угол BDP . Отрезок OD есть биссектриса угла BDP , так что угол RDO равен 45° . Отсюда следует, что треугольник RDO прямоугольный и равнобедренный, т.е. $RD = DP = OR = 1$.

Ясно, что искомая касательная есть просто $AP = AD - DP = \sqrt{3} - 1$, что и требовалось.

Ответ: $\sqrt{3} - 1$. ◀

- **Задача 7.** Дана треугольная пирамида $ABCD$ с вершиной D , грани которой ABD и ACD — прямоугольные треугольники, ребро AD перпендикулярно медиане основания AK и $AD = AK$. Сечением пирамиды плоскостью, не проходящей через середины ребер AD и BC , является равнобокая трапеция $EFGH$ с основаниями EF и GH , причем точка E делит ребро BD пополам, а точка G лежит на ребре AC и $AG = 3 \cdot GC$. Найти отношение площади трапеции $EFGH$ к площади грани BCD .

Решение. В условии задачи не сказано, какие углы являются прямыми у треугольников ABD и ACD . Первым делом мы должны это выяснить.

Если хотя бы один из углов DAB и DAC прямой, то ввиду того, что DA перпендикулярно еще и медиане AK , отрезок DA будет высотой пирамиды. Мы докажем, что именно этот случай имеет место.

Предположим, что оба угла DAB и DAC острые. Если оба угла ADB и ADC прямые, то AD будет перпендикулярно плоскости ADC . Из перпендикулярности AD и AK следует теперь, что AK параллельно BDC — противоречие.

Если оба угла DBA и DCA прямые, то тогда DA — гипотенуза в треугольниках ABD и ACD . Следовательно, $AD > BD$ и $AD > CD$. Один из смежных углов BKD и DKC не является острым. Пусть, например, $\angle BKD \geq 90^\circ$. Тогда $BD > DK$, так как против большего угла в треугольнике лежит большая сторона. Тем самым, $AD > BD > DK$ — противоречие, ибо в прямоугольном треугольнике DAK отрезок DA есть катет, который получился больше гипотенузы DK .

Нам осталось установить, что невозможен случай, когда один из углов ADB и ADC острый, а другой — прямой. Пусть, например, угол ADB прямой, а угол ADC острый, т.е. угол DCA прямой.

Имеем

$$AB^2 - BD^2 = AD^2, \quad AC^2 + CD^2 = AD^2.$$

Воспользуемся формулой, выражающей медиану через стороны для треугольников ABC и BCD :

$$\begin{cases} AK^2 = AD^2 = \frac{1}{4}(2 \cdot AB^2 + 2 \cdot AC^2 - BC^2), \\ DK^2 = 2 \cdot AD^2 = \frac{1}{4}(2 \cdot DB^2 + 2 \cdot DC^2 - BC^2). \end{cases}$$

В последних двух равенствах заменим AD^2 на $AC^2 + CD^2$. Получим, что

$$\begin{cases} 2 \cdot AB^2 + 2 \cdot AC^2 - BC^2 = 4(AC^2 + CD^2) \\ 2 \cdot BD^2 + 2 \cdot CD^2 - BC^2 = 8(AC^2 + CD^2) \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 2 \cdot AC^2 + 4 \cdot CD^2 + BC^2 = 2 \cdot AB^2 \\ 8 \cdot AC^2 + 6 \cdot CD^2 + BC^2 = 2 \cdot BD^2 \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое:

$$6 \cdot AC^2 + 2 \cdot CD^2 = 2(BD^2 - AB^2),$$

а это уже противоречие, поскольку слева стоит положительное число, а справа — отрицательное, так как катет BD меньше гипотенузы AB .

Итак, угол ADB не может быть прямым. Слово в слово так же разбирается случай, когда ADC прямой, а угол ADB острый.

Мы доказали, наконец, что AD перпендикулярно плоскости ABC . Займемся теперь выяснением того, как проходит указанное в условии сечение.

Поскольку точка E лежит на середине ребра BD , точка F может лежать на одном из четырех ребер: AD , AB , BC и CD .

Если F лежит на ребре AD , то EF не параллельно AB , так как по условию F не есть середина AD . Пусть прямая EF пересекла AB в некоторой точке P (нарисуйте сами картинку!). Прямая PG целиком лежит в секущей плоскости, так что точка H находится как пересечение этой прямой с прямой BC . Отсюда получаем, что прямые EF и GH пересеклись в точке P , тогда как по условию они параллельны — противоречие. Точно так же доказывается, что точка F не лежит на ребре BC .

Пусть точка F попала на сторону AB . Прямая EF должна быть параллельна AD , так как в противном случае она пересечет прямую GH в той же точке, что и прямую AD . Но тогда $AF = FB$. Отрезок EF будет в этом случае средней линией треугольника ADB и $EF = \frac{1}{2}AD$. Кроме того, $HG \parallel AD$ и ввиду того, что $GC = \frac{1}{4}AC$, будет $HG = \frac{1}{4}AD$. Но отрезок EF перпендикулярен плоскости ABC , будучи параллелен AD . Значит, $EF \perp FG$. По условию трапеция $EFGH$ равнобедренная, так что она есть просто прямоугольник и $\frac{1}{2}AD = EF = GH = \frac{1}{4}AD$ — противоречие.

Мы доказали, наконец, что точка F лежит на стороне CD и ситуация такова, как на рис. 6.

Точки E_1 и F_1 есть проекции точек E и F на прямые AB и BC . Отрезки EE_1 и FF_1 равны половине AD как средние линии в соответствующих треугольниках. Значит, $EE_1 = FF_1$. По условию $EH = FG$, так что $E_1H = F_1G$. Но $AG = \frac{3}{4}AC$ и $AF_1 = \frac{1}{2}AC$, откуда следует, что $F_1G = \frac{1}{4}AC$. Точно так же $E_1H = \frac{1}{4}AB$. Мы доказали, что $\frac{1}{4}AB = \frac{1}{4}AC \iff AB = AC$.

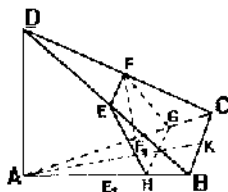


Рис. 6

Теперь уже можно приступить к вычислению искомого отношения. Именим

$$S_{EFGH} = \frac{GH + EF}{2} \cdot h_0 = \frac{\frac{3}{4}BC + \frac{1}{2}BC}{2} \cdot h_0 = \frac{5}{8} \cdot h_0 \cdot BC.$$

Мы обозначили через h_0 высоту трапеции $EFGH$.

Далее,

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot DK \Rightarrow \frac{S_{EFGH}}{S_{BCD}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{h_0}{DK}.$$

Пусть $AD = AK = d$, $BK = a$. Тогда $EE_1 = \frac{d}{2}$ и $AB = \sqrt{a^2 + d^2}$. Значит, $E_1H = \frac{1}{4}\sqrt{a^2 + d^2}$. Следовательно,

$$EH = \sqrt{EE_1^2 + E_1H^2} = \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{16} + \frac{a^2}{16}} = \sqrt{\frac{5}{16}d^2 + \frac{a^2}{16}}.$$

Легко видеть, что $HG = \frac{3}{2}a$, $EF = a$. Поэтому $\frac{1}{2}(HG - EF) = \frac{1}{4}a$. Теперь найдем высоту h_0 трапеции $EFGH$:

$$h_0 = \sqrt{EH^2 - \left(\frac{HG - EF}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{16}d^2 + \frac{a^2}{16} - \frac{a^2}{16}} = \frac{d\sqrt{5}}{4}.$$

Осталось найти искомое отношение.

$$\frac{S_{EFGH}}{S_{BCD}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{h_0}{DK} = \frac{5}{4} \cdot \frac{\frac{d\sqrt{5}}{4}}{d\sqrt{2}} = \frac{5}{32}\sqrt{10}.$$

Ответ: $\frac{5}{32}\sqrt{10}$. ◀

- **Задача 8.** В правильный тетраэдр $SABC$ с ребром a вписана сфера. На ребре SA взята точка M с $AM = MS$, а на ребре BC взята точка N такая, что $2 \cdot CN = NB$. Прямая MN пересекает сферу в двух точках P и Q . Найти длину отрезка PQ .

Решение. Найдем сначала длину p отрезка MN . Пусть K — середина ребра BC , точка H есть центр треугольника ABC , совпадающий с основанием высоты тетраэдра, опущенной из вершины S . Проекцией ребра SA на плоскость ABC будет отрезок AH . Значит, проекция L точки M на плоскость ABC делит отрезок AH пополам.

Отрезок ML есть средняя линия треугольника ASH , так что

$$ML = \frac{1}{2}SH = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Кроме того, $KN = \frac{1}{6}a$ и $KL = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Теорема Пифагора, примененная для треугольников MLN и LKN , дает

$$MN = p = \sqrt{LN^2 + ML^2} = \sqrt{KN^2 + LK^2 + ML^2} = \frac{\sqrt{19}}{6}.$$

Я утверждаю, что сфера касается всех граней тетраэдра в их центрах. Действительно, достаточно доказать, например, что центр сферы проектируется в точку H . Мы уже доказывали, что плоскости ASH и BSH биссектральные для двугранных углов при ребрах SA и SB . Значит, центр сферы лежит на каждой из этих плоскостей, т.е. на прямой SH , что и требовалось доказать.

Пусть G — центр грани ASC . Тогда MG , согласно доказанному, есть касательная к сфере. Аналогично NH также есть касательная к сфере. Пусть $MP = x$ и $PQ = y$. Тогда по теореме о секущей и касательной имеем

$$MG^2 = MP \cdot MQ \quad \text{и} \quad NH^2 = NQ \cdot NP$$

и, учитывая, что $MG^2 = KH^2 = \frac{a^2}{12}$ и $NH^2 = HK^2 + KN^2 = \frac{a^2}{9}$, получаем систему

$$\begin{cases} x(x+y) = \frac{a^2}{12} \\ (p-x)(p-x-y) = \frac{a^2}{9} \end{cases} \iff \begin{cases} x(x+y) = \frac{a^2}{12} \\ p^2 - p(2x+y) + x(x+y) = \frac{a^2}{9} \end{cases}.$$

Подставив во второе уравнение системы значение $x(x+y)$ из первого, найдем, что $2x+y = p - \frac{a^2}{36p} = \frac{3}{\sqrt{19}}a$. Теперь уже совершенно ясно, как закончить решение системы и найти $PQ = y$.

Ответ: $\frac{4a}{\sqrt{114}}$. ◀

► **Задача 9.** Ребра треугольной пирамиды, выходящие из вершины O , попарно перпендикулярны и их длины равны a, b, c . Найти объем куба, вписанного в эту пирамиду так, что одна его вершина совпадает с вершиной O .

Решение. Пусть A, B, C — остальные вершины пирамиды, причем

$$OA = a, OB = b, OC = c.$$

Пусть x — ребро вписанного куба. Заметим, что вписанность его означает просто, что вершина, противоположная вершине O (обозначим ее через P), принадлежит грани ABC . Проекция точки P на плоскость AOB лежит на биссектрисе OQ угла AOB . Действительно, плоскости AOC , AOB и BOC содержат грани куба, а диагональ куба проектируется на диагональ грани, являющуюся биссектрисой соответствующих прямых углов.

Биссектриса OQ в прямоугольном треугольнике AOB легко находится: она равна $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

Пусть $\angle POQ = \alpha$, $\angle PQO = \beta$. Треугольник COQ прямоугольный, так что $\operatorname{ctg} \beta = \frac{OQ}{OC} = \frac{ab\sqrt{2}}{(a+b)c}$. Кроме того, угол α есть угол, который в любом кубе диагональ составляет с плоскостями граней. Легко видеть, что $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Запишем теорему синусов для треугольника POQ :

$$\frac{OP}{\sin \beta} = \frac{OQ}{\sin(\pi - \alpha - \beta)} = \frac{OQ}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$OP = OQ \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b} \cdot \frac{1}{\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{ctg} \beta} = \frac{abc\sqrt{3}}{ab + ac + bc}.$$

Если ребро куба равно x , то $OP = x\sqrt{3}$, откуда $x = \frac{abc}{ab+ac+bc}$.

Ответ: $V = \left(\frac{abc}{ab+bc+ac} \right)^3$. ◀

- **Задача 10.** В пирамиде $SABC$ основание H высоты SH лежит на медиане CM основания ABC . Точка O , являющаяся серединой высоты SH , находится на одинаковом расстоянии от точки S , точки E , лежащей на ребре SA , и точки F , лежащей на ребре SB . Известно, что $SH = 8$, $AB = 16\sqrt{2}$, $EF = 8\sqrt{\frac{2}{5}}$, угол SMC составляет не более 30° , а расстояние между серединами ребер AB и SC равно $4\sqrt{13}$. Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду $SABC$.

Решение. Пусть точка K есть середина ребра SC и P — ее проекция на плоскость ABC . Тогда P лежит на медиане CM (рис. 7).

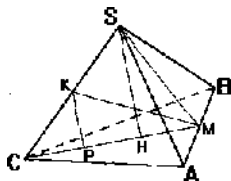


Рис. 7

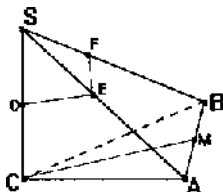


Рис. 8

Длина отрезка MK по условию равна $4\sqrt{13}$. Угол SCH не превосходит 90° ввиду того, что треугольник SCH прямоугольный. Следовательно, $MP \geq MH$.

Отрезок KP есть средняя линия в треугольнике CSH , так что $KP = \frac{1}{2}SH = 4$. По теореме Пифагора имеем

$$MP = \sqrt{KM^2 - KP^2} = 8\sqrt{3}.$$

В прямоугольном треугольнике SHM сторона SH равна 8, а угол SMH не превосходит 30° . Отсюда вытекает, что

$$MH = SH \operatorname{ctg} \angle SMH \geq SH \operatorname{ctg} 30^\circ = 8\sqrt{3}.$$

Следовательно, $MH = MP = 8\sqrt{3}$, $\angle SMH = 30^\circ$ и $H = C$.

Итак, правильная картинка ситуации есть на самом деле рис. 8.

Пусть $AC = b$, $BC = a$. Подсчитывая углы в равнобедренных треугольниках SOE и COE , увидим, что $\angle CSE + \angle SCE = 90^\circ$, откуда следует, что $CE \perp SA$. Аналогично $CF \perp SB$.

Треугольники SCE и SAC подобны, откуда

$$\frac{SC}{SA} = \frac{SE}{SC} \iff SE \cdot SA = SC^2.$$

Ясно, что и $SF \cdot SB = SC^2$. Исключая из этих двух равенств SC^2 , получим, что

$$SE \cdot SA = SF \cdot SB \iff \frac{SE}{SF} = \frac{SB}{SA}.$$

Значит, треугольники SAB и SEF подобны по второму признаку и

$$\frac{EF}{AB} = \frac{SE}{SB} = \frac{SF}{SA}.$$

Ясно, что

$$SA = \sqrt{b^2 + 64}, \quad SB = \sqrt{a^2 + 64}, \\ SE = \frac{SC^2}{SA} = \frac{64}{\sqrt{b^2 + 64}}, \quad SF = \frac{SC^2}{SB} = \frac{64}{\sqrt{a^2 + 64}}.$$

Подставляя найденные значения отрезков в пропорцию, получим

$$EF^2 = AB^2 \cdot \frac{SE \cdot SF}{SA \cdot SB} = \frac{8^4 \cdot 16^2 \cdot 2}{(a^2 + 64)(b^2 + 64)},$$

откуда $(64 + a^2)(64 + b^2) = 2^{14} \cdot 5$.

Второе уравнение на a и b получим, вычислив длину медианы CM через стороны треугольника ABC :

$$CM^2 = 64 \cdot 3 = \frac{1}{2}(CA^2 + CB^2 - \frac{1}{2}AB^2) \iff a^2 + b^2 = 640.$$

Решение системы

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 640 \\ (64 + a^2)(64 + b^2) = 2^{14} \cdot 5 \end{cases}$$

не представляет труда — находим, что $a = 8$ и $b = 24$ (или наоборот, что несущественно). Радиус вписанного в пирамиду шара нужно искать по формуле $r = \frac{3V}{S}$, где S — полная поверхность пирамиды.

Для вычисления полной поверхности пирамиды удобно заметить, что треугольник ABC прямоугольный, ибо

$$CB^2 + BA^2 = 8^2 + 16^2 \cdot 2 = 24^2 = AC^2 \iff \angle ABC = 90^\circ.$$

Отсюда получаем, что вследствие теоремы о трех перпендикулярах треугольник ABS тоже прямоугольный, т.к. угол SBA равен 90° . Дальше все совершенно ясно.

Ответ: $\frac{8}{7}(2\sqrt{2} - 1)$. ◀

Наш урок окончен. Оценка ставится стандартным образом.

Домашнее задание

- 1. В тетраэдре $SABC$ плоские углы при вершине S острые и равны

$$\angle BSC = \alpha, \angle ASC = \beta, \angle ASB = \gamma.$$

Известно, что $SA = a$, $SB = b$. Найти площадь проекции треугольника ASB на плоскость ASC .

- 2. В тетраэдре $SABC$ имеем

$$SA = SC, SB = 2 \cdot AC, AB = BC = \frac{3}{2} \cdot AC.$$

Через ребро AC и середину D ребра SB проведена плоскость. Площадь полной поверхности пирамиды $SADC$ больше площади полной поверхности пирамиды $ABCD$ на величину, равную площади треугольника ABC . Найти угол между плоскостями ASC и ABC .

- 3. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC . Известно, что высота пирамиды проходит через середину D катета BC , причем

$$SD = h, AC = b, BC = a.$$

Через середины сторон AC и BC проведено сечение плоскостью, параллельной SC . Найти площадь этого сечения и угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .

- 4. Все ребра тетраэдра $ABCD$ имеют равную длину. На ребрах AB, AC и AD выбраны соответственно точки K, L, M так, что длина отрезка KB равна 12 и $MD = 8$. Радиус шара, описанного около $ABCD$, равен $6\sqrt{6}$, а объем пирамиды $AKLM$ равен $192\sqrt{2}$. Найти сумму радиусов описанного и вписанного шаров для пирамиды $AKLM$.

- 5. Дан тетраэдр $ABCD$. Точки F и N лежат на ребрах AD и DB соответственно, причем $\frac{DN}{NB} = \frac{1}{2}$. Через точки F, N и точку пересечения медиан треугольника ABC проведена плоскость, пересекающая ребро CB в точке H . Через точку H проведена плоскость, параллельная плоскости ADB и пересекающая ребра CA и CD в точках L и K соответственно. Известно, что $CH/HB = (AF/FD)^2$ и что радиус шара, вписанного в пирамиду $CHLK$ равен R . Найти отношение площади треугольника ABC к площади полной поверхности пирамиды $ABCD$, если высота, опущенная из D на плоскость ABC , равна h .

- 6. В тетраэдре $SABC$ длины всех ребер, пересекающихся с ребром BC , равны между собой и в два раза больше длины этого ребра, равной b . Высота пирамиды $SABC$, опущенная из вершины S , лежит внутри пирамиды и квадрат ее длины в 4,5 раза больше BC^2 . Точка M делит пополам высоту грани SBC , проведенную из точки S к ребру BC . Через точки A и M проведена секущая плоскость, образующая с плоскостью основания пирамиды угол 30° . Какова площадь полной поверхности части пирамиды, отсекаемой этой плоскостью и содержащей вершину S , и сколько таких плоскостей можно построить?
- 7. В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC такой, что $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$, $AC = AB = 1 + \sqrt{2}$. Основание H высоты SH пирамиды расположено так, что $CH \perp AB$, $BH \parallel AC$. Найти радиус описанного около $SABC$ шара, если $SH = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$.
- 8. На боковом ребре SA правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S взята точка D , через которую проведено сечение пирамиды, пересекающее апофемы граней SAC и SAB в точках M и N . Известно, что DM и DN образуют углы β с плоскостью ABC , а

$$\angle DMS = \angle DNS = \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Найти угол MDN .

- 9. Отрезок DE , лежащий в двугранном угле DA с точками B и C на его гранях, параллелен плоскости ABC , причем площадь треугольника ABC равна S . В тетраэдр $BCDE$ вписан шар, k — отношение расстояния от центра шара до прямой DE к расстоянию от DE до плоскости ABC . Пусть B' — проекция точки B на плоскость CDE и известно, что

$$\operatorname{tg} \angle B'DE : \operatorname{tg} \angle BDE = l.$$

Через середину отрезка AD проведена плоскость P , параллельная плоскости ABC . Найти площадь сечения многогранника $ABCDE$, составленного из тетраэдров $ABCD$ и $BCDE$ плоскостью P , если площадь полной поверхности тетраэдра $BCDE$ равна σ .

- 10. Дана пирамида $SABC$, в которой площадь треугольника ABS равна $\frac{3\sqrt{7}}{4}$, угол BSC равен $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{231}}{37}$. Известно кроме того, что $AS = SB$, $SC \perp AC = 20$ и перпендикуляры к граням, восстановленные из центров вписанных в них окружностей, пересекаются в одной точке. Найти объем пирамиды $SABC$.
- 11. В тетраэдре длины двух непересекающихся ребер равны 12 и 4, а остальные ребра имеют длину 7. В пирамиду вписана сфера. Найти расстояние от центра сферы до ребра длины 12.
- 12. В треугольной пирамиде каждое боковое ребро равно 1, а боковые грани равновелики. Найти объем пирамиды, если известно, что один из двугранных углов при основании прямой.

- 13. Основанием пирамиды $SABC$ является равнобедренный треугольник ABC , длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC , а другая проходит через точку C и середину ребра AB .
- 14. Объем пирамиды $ABCD$ равен 5. Через середины ребер AD и BC проведена плоскость, пересекающая ребро CD в точке M . При этом $DM : MC = 2 : 3$. Вычислить площадь сечения пирамиды указанной плоскостью, если расстояние от нее до вершины A равно 1.
- 15. В пирамиде $SABC$ прямая, пересекающая ребра AC и BS и перпендикулярная им, проходит через середину ребра BS . Грань ASB равновелика грани BSC , а площадь грани ASC в два раза больше площади грани BSC . Внутри пирамиды есть точка M , сумма расстояний от которой до вершин B и S равна сумме расстояний до всех граней пирамиды. Найти расстояние от точки M до вершины B , если $AC = \sqrt{6}$, а $BS = 1$.
- 16. В пирамиде $SABC$ суммы длин ребер, выходящих из каждой вершины, равны одному и тому же числу. Величина тупого угла между ребрами SB и AC равна $\arccos(-\frac{1}{3})$, радиус вписанной в пирамиду сферы равен $\sqrt{\frac{3}{13}}$ и $SA^2 + SC^2 = 12$. Найти объем пирамиды $SABC$, если известно, что он не превосходит $5/3$.
- 17. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a ; площадь ее сечения, имеющего форму квадрата, равна m^2 . Найти отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания.
- 18. Треугольная пирамида $ABCD$, все ребра которой равны a , вложена в прямой круговой конус так, что вершина A лежит на окружности основания конуса, ребро AD лежит в плоскости основания конуса, ребро BC параллельно основанию конуса, а вершины B и C лежат на боковой поверхности конуса. Угол между высотой конуса и его образующей равен $\alpha < \frac{\pi}{6}$. Определить высоту конуса.
- 19. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S и объемом V проведена плоскость, которая параллельна медиане основания BN и пересекает боковое ребро SA в точке K , а боковое ребро SB в точке L , причем $SK = \frac{1}{2}SA$, $SL = \frac{1}{2}SB$. Найти объем части пирамиды, лежащей ниже этой плоскости.
- 20. В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной $2\sqrt{3}$, и $SA = SB = SC = \sqrt{7}$. В трехгранный угол при вершине C вписана сфера S_1 . Сфера S_2 , радиус которой втрое больше, чем у сферы S_1 , касается сферы S_1 , плоскостей SAC и ABC . При этом отрезок прямой SB , заключенный внутри сферы S_2 , имеет длину $\frac{6}{\sqrt{7}}$. Найти радиус сферы S_2 .

Урок 46 [2]

Параллелепипеды и призмы

Десять задач сегодняшнего урока посвящены кубам, параллелепипедам и призмам в комбинациях с любыми фигурами и многогранниками. Ничего нового знать не надо, просто хорошенько повторите формулы и теоремы из уроков 43 и 44.

- **Задача 1.** В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно l . В основании призмы лежит правильный треугольник со стороной b , а прямая, проходящая через вершину B_1 и центр основания ABC , перпендикулярна основанию. Найти площадь сечения, проходящего через ребро BC и середину ребра AA_1 .

Решение. Пусть K — середина ребра AA_1 . Через H обозначим центр основания (рис. 1).

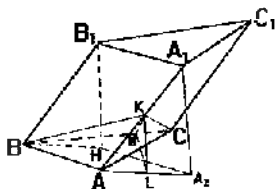


Рис. 1

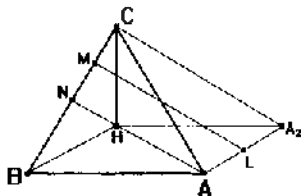


Рис. 2

По условию задачи точка H есть проекция B_1 на плоскость ABC . Обозначим через A_2 проекцию точки A_1 на плоскость ABC . Ясно, что $HA_2 \parallel AB$ и $HA_2 = AB$. Отрезок AA_2 есть проекция отрезка AA_1 на плоскость ABC . Отсюда следует, что точка K спроектируется на точку L , являющуюся серединой отрезка AA_2 . Пусть точка M есть проекция L на прямую BC . По теореме о трех перпендикулярах, KM есть высота в треугольнике BKC , площадь которого нам надо найти. Сторона BC нам известна — она равна b . Найдем высоту KM . По теореме Пифагора для треугольника KLM имеем

$$(1) \quad MK = \sqrt{KL^2 + ML^2} = \sqrt{ML^2 + \frac{1}{4}l^2 - \frac{1}{12}b^2},$$

ибо KL есть средняя линия в треугольнике AA_1A_2 , а

$$A_1A_2 = B_1H = \sqrt{BB_1^2 - BH^2} = \sqrt{t^2 - \frac{1}{3}b^2}.$$

Нам осталось найти ML . Для этого вынесем на отдельный рисунок то, что имеем на плоскости ABC (рис. 2).

Ясно, что $ABHA_2$ — параллелограмм с острым углом 30° . Простым подсчетом углов убеждаемся в том, что треугольник ACA_2 прямоугольный с прямым углом CAA_2 . По теореме Пифагора

$$CA_2 = \sqrt{CA^2 + AA_2^2} = \sqrt{b^2 + \frac{1}{3}b^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}b = 2 \cdot AA_2,$$

откуда следует, что угол CA_2A равен 60° . Угол HAA_2 равен 120° , откуда следует, что прямые AH и CA_2 параллельны. Но AH перпендикулярна BC , так что мы доказали, что отрезок ML есть средняя линия трапеции $ANCA_2$. Следовательно,

$$ML = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}b + \frac{\sqrt{3}}{2}b}{2} = \frac{7}{4\sqrt{3}}b.$$

Подставив найденное значение ML в формулу (1), найдем, что

$$MK = \frac{1}{4}\sqrt{4l^2 + 15b^2}.$$

Дальнейшее ясно.

Ответ: $\frac{1}{8}b\sqrt{4l^2 + 15b^2}$. ◀

- **Задача 2.** Дан куб $ABCD A'B'C'D'$ с ребром $AA' = a$. Точка E' — середина ребра $C'D'$, точка F' — середина ребра $B'C'$. Найти радиус сферы, проходящей через точки E', F', A, C .

Решение. Пусть O и O' есть центры граней $ABCD$ и $A'B'C'D'$ соответственно. Центр S сферы лежит на плоскости, перпендикулярной отрезку AC и проходящей через его середину, т.е. на плоскости $BDD'B'$. Точно так же точка S обязана принадлежать плоскости, перпендикулярной к отрезку $E'F'$ и проходящей через его середину, т.е. плоскости $ACC'A'$. Пересечение названных плоскостей есть прямая OO' .

Пусть $SO = x$. Чтобы не рассматривать три случая, будем считать, что если $x < 0$, то S лежит ниже точки O .

Отрезки SC и SE' равны радиусу сферы, откуда и получаем следующее уравнение.

$$SO^2 + OC^2 = SO'^2 + O'E'^2 \iff x^2 + \frac{1}{2}a^2 = |1 - x|^2 + \frac{1}{4}a^2 \iff x = \frac{3}{8}a.$$

Мы доказали, что существует лишь одна сфера, удовлетворяющая условию задачи. Центр ее лежит внутри куба, а радиус равен

$$R = \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}a^2} = \frac{\sqrt{41}}{8}a.$$

Ответ: искомый радиус равен $\frac{\sqrt{41}}{8}a$. ◀

- **Задача 3.** В наклонной треугольной призме $PQRP_1Q_1R_1$ площадь боковой грани PP_1R_1R равна 64, а косинусы двугранных углов при ребрах PP_1 и QQ_1 равны соответственно $\frac{\sqrt{10}}{4}$ и $\frac{1}{4}$. В эту призму помещена треугольная призма $DEFD_1E_1F_1$ так, что вершины D, E, F лежат на отрезках PQ, QR и RP , а вершины D_1, E_1, F_1 — на отрезках P_1Q_1, Q_1R_1 и R_1P_1 соответственно. Известно, что призма $DEFD_1E_1F_1$ имеет наименьшую площадь боковой поверхности среди так расположенных призм. Найдите площадь боковой поверхности призмы $DEFD_1E_1F_1$.

Решение. Проведем плоскость, перпендикулярную к боковым ребрам каждой из призм $PQRP_1Q_1R_1$ и $DEFD_1E_1F_1$. Получившиеся в сечении треугольники обозначим через ABC и KLM (см. рис. 3).

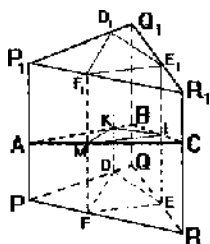


Рис. 3

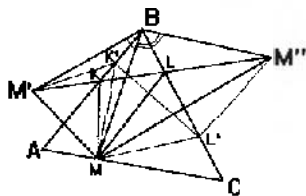


Рис. 4

Положим $\angle CAB = \alpha$, $\angle CBA = \beta$ и $\angle ACB = \gamma$. Каждый из названных углов есть линейный угол двугранного угла при ребре, содержащем его вершину. В условии задачи даны косинусы углов α и β , поэтому легко находится, что $\sin \alpha = \sqrt{6}/4$ и $\sin \beta = \sqrt{15}/4$. Следовательно,

$$\sin \gamma = \sin(\pi - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta) = 3\sqrt{6}/8.$$

Пусть S — площадь боковой поверхности призмы $DEFD_1E_1F_1$. Имеем

$$S = PP_1 \cdot P_{KLM},$$

где P_{KLM} — периметр треугольника KLM . Следовательно, условие минимальности S равносильно условию минимальности P_{KLM} среди периметров всех треугольников, вписанных в треугольник ABC ; легко видеть, что он остроугольный (ибо $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma > 0$).

Ниже мы докажем, что при выполнении условия минимальности

$$(2) \quad P_{KLM} = 2 \cdot AC \sin \alpha \sin \gamma,$$

откуда

$$S = 2 \cdot PP_1 \cdot AC \sin \alpha \sin \gamma = 2 \cdot 64 \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{3\sqrt{6}}{8} = 72$$

— мы заменили выражение $PP_1 \cdot AC$ на 64, поскольку оно есть в точности площадь параллелограмма PP_1R_1R .

Докажем формулу (2). Решим сначала вспомогательную задачу. Пусть M — произвольная точка на основании AC треугольника ABC , а M' и M'' — точки, симметричные ей относительно сторон AB и BC (см. рис. 4). Тогда $BM' = BM = BM''$, следовательно, треугольник $M'BM''$ равнобедренный. Кроме того,

$$\angle M'BA = \angle ABM \text{ и } \angle MBC = \angle CBM'' \Rightarrow \angle M'BM'' = 2\beta.$$

Обозначим через K и L точки пересечения отрезка $M'M''$ со сторонами AB и BC . Пусть K' и L' — две произвольные точки на AB и BC . Очевидно, периметр треугольника KLM , равный длине отрезка $M'M''$, меньше периметра треугольника $K'ML'$, равного длине ломаной $M'K'L'M''$. При этом

$$(3) \quad P_{KLM} = M'M'' = 2 \cdot BM \cdot \sin \beta.$$

Остается минимизировать выражение (3) выбором точки M на стороне AC . Ясно, что минимум достигается тогда, когда отрезок BM имеет минимальную возможную длину, т.е. когда BM — высота в треугольнике ABC .

В этом случае по теореме синусов имеем

$$AB = \frac{AC \sin \gamma}{\sin \beta} \Rightarrow BM = \frac{AC \sin \gamma}{\sin \beta} \cdot \sin \alpha,$$

откуда получаем

$$P_{KLM} = 2BM \sin \beta = 2 \frac{AC \sin \gamma}{\sin \beta} \cdot \sin \alpha \sin \beta = 2 \cdot AC \sin \alpha \sin \gamma,$$

что и требовалось доказать.

Ответ: 72. ◀

- **Задача 4.** Отрезок PQ параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $KLMN$, причем $KL = 1$, $PQ = 3$. Все стороны прямоугольника $KLMN$ и отрезки KP , LP , NQ , MQ , PQ касаются некоторого шара. Найдите объем этого шара.

Решение. Шар высекает на плоскости $KLMN$ окружность, вписанную в прямоугольник $KLMN$. Значит, этот прямоугольник — квадрат. Окружность, вписанная в квадрат, касается его сторон

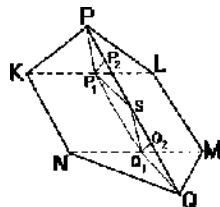


Рис. 5

в их серединах. Значит, данный шар касается сторон квадрата в их серединах. В частности, он касается стороны MN в ее середине Q_1 (см. рис. 5).

Плоскость NQM высекает из шара окружность, вписанную в треугольник NQM и касающуюся стороны NM в ее середине. Отсюда следует, что $NQ = QM$. Действительно, если O — центр окружности (на рисунке не изображен), то треугольники OQ_1M и OQ_1N равны как прямоугольные по двум катетам. Отсюда следует, что

$$\angle QNM = 2 \cdot \angle ONQ_1 = 2 \cdot \angle OMQ_1 = \angle QMN,$$

а это и требовалось.

Аналогично $KP = PL$ и

$$(4) \quad \angle PKN = \angle KNQ, \angle PLM = \angle QML.$$

Прямая NM перпендикулярна P_1Q_1 и QQ_1 , откуда следует, что плоскость P_1QQ_1 перпендикулярна прямой MN . Аналогично плоскость PP_1Q_1 перпендикулярна ребру KL . Но существует лишь одна плоскость, перпендикулярная ребрам KL и MN и проходящая через их середины P_1 и Q_1 . Это доказывает, что точки P, P_1, Q_1, Q лежат в этой плоскости. В частности, $PQ \parallel KN$, т.е. $PKNQ$ — трапеция. Из равенств (4) следует, что она равнобедренная, так же как и трапеция $PQML$. Эти трапеции являются описанными, откуда

$$KP = NQ = QM = PL = \frac{1}{2} \cdot (PQ + KN) = 2.$$

Точка S касания шара с отрезком PQ служит точкой касания окружности, вписанной в трапецию $PKNQ$, т.е. совпадает с серединой PQ . Пусть P_2 и Q_2 — проекции точек P_1 и Q_1 на отрезок PQ . Ясно, что $PP_2 = P_2Q_2 = Q_2Q = 1$ и отрезки P_1P_2 , Q_1Q_2 перпендикулярны плоскости $KLMN$. Центр сферы лежит в плоскости PP_1Q_1Q , так как эта плоскость перпендикулярна отрезкам KL и MN и проходит через их середины. Ясно, что ее радиус равен радиусу описанной вокруг треугольника P_1SQ_1 окружности.

По теореме Пифагора

$$QQ_1 = \sqrt{QN^2 - NQ_1^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}, \quad Q_1Q_2 = \sqrt{QQ_1^2 - QQ_2^2} = \frac{\sqrt{11}}{2},$$

$$Q_1S = \sqrt{Q_1Q_2^2 + SQ_2^2} = \sqrt{3}.$$

В треугольнике Q_1P_1S мы теперь знаем все стороны — они равны $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 1. Теперь радиус описанной окружности находится просто.

Ответ: $R = \frac{3}{\sqrt{11}}$. ◀

► **Задача 5.** В основании призмы лежит равносторонний треугольник ABC со стороной $\sqrt{3}$. Боковые ребра AD , BE и CF перпендикулярны основанию. Сфера радиуса $7/2$ касается плоскости ABC и продолжений отрезков

AF, BD и CE за точки A, B и C соответственно. Найти длину боковых ребер призмы.

Решение. Пусть O — центр сферы и M, K_1, K_2, K_3 — точки касания сферы с плоскостью ABC и с продолжениями диагоналей FA, DB и EC соответственно (рис. 6). Отрезки AM и AK_1 равны как касательные из одной точки к сфере. Обозначим их длину через b_1 . Аналогично пусть

$$BM = BK_2 = b_2 \text{ и } CM = CK_3 = b_3.$$

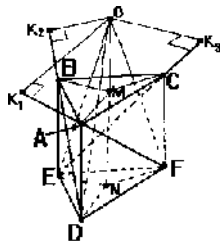


Рис. 6

Соединим центр сферы с вершинами D, E и F и обозначим отрезки OD, EO и FO соответственно через c_1, c_2 и c_3 . Пусть также диагональ боковой грани равна d , а радиус сферы — R .

Докажем, что M — центр треугольника ABC . Ясно, что для этого достаточно проверить, что

$$AM = BM = CM \iff b_1 = b_2 = b_3.$$

Из прямоугольных треугольников OK_1F, OK_2D и OK_3E получаем

$$\begin{cases} (d + b_1)^2 + R^2 = c_3^2, \\ (d + b_2)^2 + R^2 = c_1^2, \\ (d + b_3)^2 + R^2 = c_2^2. \end{cases}$$

Предположим, что $b_1 < b_2$. Тогда из первого и второго уравнений системы следует, что

$$c_3 < c_1 \iff OF < OD \iff CM < AM \iff b_3 < b_1.$$

Здесь первая и третья эквивалентности очевидны, а вторая имеет место, поскольку проекции OF и OD на плоскость ABC есть соответственно CM и AM .

Из первого и третьего уравнений системы получаем, что $c_2 < c_3$. Значит,

$$c_2 < c_3 \iff OE < OF \iff BM < MC \iff b_2 < b_3.$$

Итак, имеем $b_1 < b_2 < b_3 < b_1$, что невозможно. Следовательно, $b_1 \geq b_2$.

Но совершенно аналогично можно доказать, что невозможно и неравенство $b_1 > b_2$, так что $b_1 = b_2$. Таким образом, $b_1 = b_2 = b_3$, описанная в условии сфера единственна и $c_1 = c_2 = c_3$.

Продолжим OM до пересечения в точке N с плоскостью DEF и обозначим через x длину бокового ребра. Каждое из чисел b_1, b_2, b_3 равно радиусу описанной около треугольника ABC окружности, т.е. единице. Кроме того,

$$d = \sqrt{3 + x^2} \text{ и } OF^2 = OK_1^2 + K_1F^2 = ON^2 + NF^2.$$

Подставив в последнее равенство длины всех отрезков, выраженные через x , получим, что

$$(7/2)^2 + (1 + \sqrt{3 + x^2})^2 = (x + 7/2)^2 + 1.$$

Из полученного уравнения, которое легко решается, находим, что $x = 1$.

Ответ: длина бокового ребра равна 1. ◀

- **Задача 6.** Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) равна 1. На ребре AA_1 взята точка E так, что длина отрезка AE равна $1/3$. На ребре BC взята точка F так, что длина отрезка BF равна $1/4$. Через центр куба и точки E и F проведена плоскость α . Найти расстояние от вершины B_1 до плоскости α .

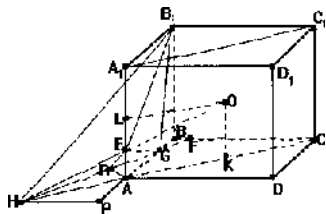


Рис. 7

Решение. Обозначим центр куба через O . Он лежит в плоскости $AA_1 C_1 C$; в этой же плоскости находится и точка E . Значит, вся прямая OE лежит в плоскости α . Она пересечет прямую AC в некоторой точке H (см. рис. 7). Если L — середина ребра AA_1 , то треугольники OLE и AHE подобны, причем $LE/EA = 1/2$. Следовательно, $AH = 2 \cdot OL = 2 \cdot AK = \sqrt{2}$.

Точки H и F лежат в плоскости α , так что и вся прямая HF лежит в этой плоскости. Пусть прямая HF пересекла сторону AB в точке G . Тогда G принадлежит плоскости α и по теореме Менелая для треугольника ABC и секущей HF имеем

$$\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CH}{HA} = 1 \iff \frac{AG}{GB} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = 1 \iff \frac{AG}{GB} = \frac{3}{2},$$

т.е. $AG = \frac{3}{5}$.

Мы доказали, что плоскость HEG совпадает с плоскостью α . Пусть расстояние от точки B_1 до α равно x . Подсчитаем двумя способами объем V пирамиды $HEGB_1$.

С одной стороны, $V = \frac{1}{3} \cdot x \cdot S_{HEG}$. С другой стороны

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{B_1 EG} \cdot y,$$

где y есть расстояние от H до плоскости $B_1 EG$, совпадающей с плоскостью $ABB_1 A_1$. Если мы опустим перпендикуляр из точки H на прямую AB , то он будет параллелен прямой AD и, следовательно, перпендикулярен к плоскости $ABB_1 A_1$. Отсюда $y = 1$.

Подсчитаем площадь треугольника $B_1 EG$:

$$S_{B_1 EG} = 1 - S_{AEG} - S_{A_1 B_1 E} - S_{B_1 GB} = \frac{11}{30}.$$

Итак, $3V = \frac{11}{30}$.

Сторона HG треугольника EGH находится по теореме Пифагора:

$$HG = \sqrt{HP^2 + PG^2} = \sqrt{1 + (1 + 3/5)^2} = \frac{\sqrt{89}}{5}.$$

Пусть AR — высота в треугольнике AHG . Тогда по теореме о трех перпендикулярах ER — высота в треугольнике EGH . Из подобия треугольников HPG и ARG легко найти, что $AR = \frac{3}{\sqrt{89}}$. Тогда

$$ER = \sqrt{AE^2 + AR^2} = \frac{\sqrt{170}}{3\sqrt{89}}.$$

Следовательно,

$$S_{HGE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{89}}{5} \cdot \frac{\sqrt{170}}{3\sqrt{89}} = \frac{\sqrt{170}}{30}.$$

Теперь x находится совсем легко:

$$3V = \frac{11}{30} = \frac{\sqrt{170}}{30} \cdot x \iff x = \frac{11}{\sqrt{170}}.$$

Ответ: $\frac{11}{\sqrt{170}}$. ◀

- **Задача 7.** Нижним основанием $ABCD$ прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (где AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 — боковые ребра) служит ромб с острым углом φ . Известно, что в эту призму можно вписать шар диаметра d , касающийся изнутри всех ее граней. Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через ребра BC и $A_1 D_1$.

Решение. Определим площадь S четырехугольника $A_1 D_1 CB$ (рис. 8).

Если в прямую призму вписан шар, то радиус этого шара равен радиусу окружности, вписанной в ромб $ABCD$. В самом деле, если через центр шара провести сечение плоскостью, параллельной плоскости $ABCD$, то все точки касания с боковыми гранями будут лежать в этой плоскости, ибо каждый из радиусов, проведенный в точку касания с боковой гранью ей перпендикулярен, а значит, параллелен плоскости $ABCD$. Ясно, что сечением призмы этой плоскостью будет ромб, равный $ABCD$.

Мы доказали, что высота DK ромба равна диаметру шара, откуда сторона ромба DC равна $d/\sin \varphi$. Ясно, что высота призмы равна диаметру шара, т.е. $DD_1 = d$.

Из прямоугольного треугольника $DD_1 K$ находим, что $D_1 K = d\sqrt{2}$. Из теоремы о трех перпендикулярах следует, что $D_1 K$ — высота параллелограмма $A_1 D_1 CB$. Теперь уже совсем ясно, как найти его площадь.

Ответ: $\frac{d^2 \sqrt{2}}{\sin \varphi}$. ◀

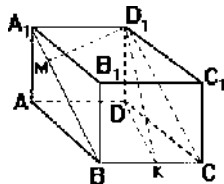


Рис. 8

- **Задача 8.** Ребро куба равно 1. Сфера с центром O пересекает три ребра, сходящиеся к вершине A в их серединах. Из точки B пересечения сферы с одним из ребер куба опущен перпендикуляр на диагональ куба, проходящую

через вершину A , причем угол между этим перпендикуляром и радиусом OB делится ребром куба пополам. Найти радиус сферы.

Решение. Пусть K и L — середины тех ребер, выходящих из A , на которых не лежит точка B . Сфера проходит через точки B, K и L , так что центр ее лежит на перпендикуляре к плоскости BKL , проходящем через центр правильного треугольника BKL . Этот перпендикуляр совпадает с диагональю AD куба. Действительно, пирамида $ABKL$ — правильная, значит, достаточно доказать, что AD перпендикулярно плоскости BKL . Но каждая из сторон треугольника BKL параллельна диагонали боковой грани, скрещивающейся с диагональю AD . В задаче 13 урока 43 мы доказали, перпендикулярность AD таким диагоналям. Значит, AD перпендикулярно плоскости KLM , будучи перпендикулярным двум непараллельным прямым KL и LB , лежащим в этой плоскости.

Итак, центр сферы лежит на прямой AD . Пусть C — перпендикуляр, опущенный из точки B на AD . В условии сказано, что BA есть биссектриса угла OBC . Отсюда следует, что O лежит на продолжении отрезка AD за точку D .

Пусть E — вторая (т.е. не совпадающая с A) вершина ребра куба, содержащая точку B . Тогда

$$\sin \angle BAC = \frac{ED}{AD} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Отсюда $BC = AB \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}}$. Угол OBC в два раза больше угла ABC , так что

$$\cos \angle OBC = 1 - 2 \sin^2 \angle ABC = 1 - 2 \cos^2 \angle BAC = \frac{1}{3}.$$

Искомый радиус равный OB , теперь легко вычислить:

$$OB = \frac{BC}{\cos \angle OBC} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{3}{2}}$. ◀

- **Задача 9.** Сфера касается всех боковых ребер правильной прямой шестиугольной призмы, основания которой лежат вне сферы. Найти отношение той части боковой поверхности призмы, которая заключена внутри сферы, к той части поверхности сферы, которая находится вне призмы.

Решение. Проведем плоскость, параллельную основаниям призмы через центр сферы. Тогда получим окружность (сечение сферы), описанную около правильного шестиугольника (сечение призмы). В самом деле, радиусы, проведенные из центра сферы в точки касания с ребрами, им перпендикулярны, так что все точки касания лежат в плоскости, проведенной через

центр сферы перпендикулярно боковым ребрам, т.е. параллельно основаниям.

Из сказанного ясно, что если R — радиус сферы, то сторона основания призмы равна стороне правильного шестиугольника, вписанного в круг радиуса R , т.е. тоже R . Теперь ясно, что часть сферы, не лежащая внутри призмы, состоит из шести сегментов с диаметром R . Высота H такого сегмента по теореме Пифагора равна $H = R - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}R^2} = (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})R$.

Следовательно, его площадь есть $2\pi RH = \pi R^2(2 - \sqrt{3})$.

Часть призмы, лежащая внутри сферы, состоит из шести кругов, лежащих в основаниях указанных сегментов. Площадь каждого из них равна $\frac{1}{4}\pi R^2$. Следовательно, искомое отношение равно

$$\frac{\frac{1}{4}\pi R^2}{\pi R^2(2 - \sqrt{3})} = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{3}).$$

Ответ: $\frac{1}{4}(2 + \sqrt{3})$. ◀

- **Задача 10.** Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1 и CC_1 . Пусть точка P делит ось OO_1 призмы в отношении 5:1. Через точку P и середины ребер AB и A_1C_1 проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

Решение. Пусть E и N — середины ребер A_1C_1 и AB (рис. 9).

Проведем через точки E и P прямую. Она будет принадлежать секущей плоскости α . Ясно также, что эта прямая лежит в плоскости OO_1B_1B . Пусть она пересекла прямую BB_1 в точке D . Из подобия треугольников EDB_1 и EPO_1 находим, что

$$\frac{DB_1}{PO_1} = \frac{B_1E}{O_1E} = 3 \Rightarrow B_1D = DB,$$

так как $BB_1 = OO_1$, а отрезок O_1P составляет одну шестую часть OO_1 .

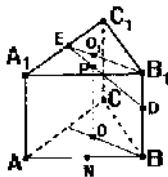


Рис. 9

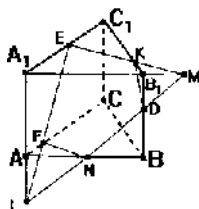


Рис. 10

Прямая, проведенная через точки N и D , лежит в плоскости α . Она пересекает прямые AA_1 и A_1B_1 соответственно в точках L и M (рис. 10). Соединяя точки M и L с точкой E , получим искомое сечение.

Из $BD = DB_1$ следует, что $B_1M = NB = \frac{1}{2}AB$. С помощью теоремы Менелая легко найти, что $B_1K = \frac{1}{4}B_1C_1$, $AF = \frac{1}{6}AC$ и $LA = \frac{1}{2}AA_1$.

Вычислим объем V многогранника A_1EKB_1DNAF , обозначив боковое ребро призмы через h , а площадь ее основания через s . Ясно, что

$$(5) \quad V = V_{EMLA_1} - V_{KMDB_1} - V_{AFNL}.$$

Имеем

$$\frac{S_{EMLA_1}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{A_1E}{A_1C_1} \cdot \frac{A_1M}{A_1B_1} = \frac{3}{4} \iff S_{EMLA_1} = \frac{3}{4}s.$$

Высота пирамиды $EMLA_1$ равна $\frac{3}{2}h$, так что $V_{EMLA_1} = \frac{3}{8}sh$. Аналогично находится, что $V_{KMDB_1} = \frac{1}{48}sh$ и $V_{AFNL} = \frac{1}{72}sh$.

Производя с объемами действия, указанные в формуле (5), получим, что $V = \frac{49}{144}hs$, и уже ясно, каким будет

Ответ: секущая плоскость делит объем призмы в отношении 49:95. ◀

Наш урок окончен. Оценку опять поставьте себе стандартным образом. При этом можно сделать себе следующие послабления.

1) Урок не обязан длиться полтора часа. Можете работать столько, сколько сможете.

2) Можете разделить урок на два или три занятия. Единственное условие при этом — он должен быть пройден за неделю.

Домашнее задание

- ▶ 1. Через одну из сторон основания правильной трехгранной призмы проведена плоскость под углом α к основанию, отсекающая от призмы пирамиду объема V . Определить площадь сечения.
- ▶ 2. Дана прямая призма, у которой основанием служит правильный треугольник. Через одну из сторон нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания проведена плоскость. Угол между этой плоскостью и основанием призмы равен α , а площадь сечения равна S . Определить объем призмы.
- ▶ 3. Через середину диагонали куба перпендикулярно к ней проведена плоскость. Определить площадь фигуры, получившейся в сечении куба этой плоскостью, если ребро куба равно a .
- ▶ 4. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, где AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра. В каком отношении делит ребро $B_1 C_1$ точка E , которая принадлежит плоскости, проходящей через вершину A и центры граней $A_1 B_1 C_1 D_1$ и $B_1 C_1 CB$?
- ▶ 5. Ребро куба равно a . Найти объем прямого кругового цилиндра, вписанного в куб так, что осью его является диагональ l куба, а окружности

оснований касаются тех диагоналей граней куба, которые не имеют общих точек с диагональю l .

- 6. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (AA_1, BB_1 и CC_1 — боковые ребра), у которой $AC = 6$, а $AA_1 = 8$. Через вершину A проведена плоскость, пересекающая ребра BB_1 и CC_1 соответственно в точках M и N . Найти, в каком отношении делит эта плоскость объем призмы, если известно, что $BM = MB_1$, а AN является биссектрисой угла CAC_1 .
- 7. Дан куб $ABCA'B'C'D'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC' и DD' . На продолжениях ребер AB и BB' взяты точки M и N соответственно так, что $AM = B'N = \frac{1}{2}AB$ ($BM = BN = \frac{3}{2}AB$). Где на ребре CC' должна находиться точка P для того, чтобы в сечении куба плоскостью, проведенной через точки M, N и P , был пятиугольник?
- 8. Найти тень куба на плоскость, перпендикулярную к его диагонали, от пучка лучей, параллельных этой диагонали.
- 9. Основанием наклонной призмы служит прямоугольник со сторонами a и b . Две смежные боковые грани составляют с плоскостью основания углы α и β . Найти объем призмы, если боковое ребро ее равно c .
- 10. В правильной треугольной призме плоскость, проведенная через центр основания и центры симметрий двух боковых граней, составляет с плоскостью основания острый угол α . Найти площадь сечения, образованного этой плоскостью, если сторона основания равна a .
- 11. Основанием прямой призмы, описанной около шара радиуса r , служит прямоугольный треугольник с острым углом α . Найти объем призмы.
- 12. В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция, диагонали которой перпендикулярны соответствующим боковым сторонам. Угол между диагоналями трапеции, противолежащий ее боковой стороне, равен α . Отрезок прямой, соединяющий вершину верхнего основания с центром окружности, описанной около нижнего основания, равен l и образует с плоскостью основания угол β . Найти объем призмы.
- 13. В правильной четырехугольной призме $ABCA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) через середины двух смежных сторон основания DC и AD и вершину B_1 верхнего основания проведена плоскость. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания, если периметр сечения в три раза больше диагонали основания.
- 14. В основании прямой призмы лежит параллелограмм с острым углом α . Диагонали призмы составляют с плоскостью основания углы β и γ ($\beta < \gamma$). Найти объем призмы, если ее высота равна H .
- 15. Через концы трех ребер, выходящих из вершин, B, D, A_1 и C_1 куба $ABCA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно a , проведены плоскости. Доказать, что полученная фигура есть правильный тетраэдр, и найти его объем.
- 16. В основании прямой призмы лежит треугольник со сторонами 6, 8 и

10 см. Некоторое плоское сечение этой призмы отсекает от боковых ребер, проходящих через вершины большего и среднего углов основания, отрезки, равные 12 см каждый, а от ребра, проходящего через вершину меньшего угла основания, — отрезок в 18 см. Найти объем и площадь полной поверхности фигуры, ограниченной плоскостью основания призмы, плоскостями боковых граней и плоскостью сечения.

- 17. Два куба с ребром, равным a имеют общий отрезок, соединяющий центры двух противоположных граней, но один куб повернут на 45° по отношению к другому. Найти объем общей части этих кубов.
- 18. Площадь того сечения куба, которое представляет собой правильный шестиугольник, равна Q . Найти полную поверхность куба.
- 19. В основании призмы лежит трапеция. Площади параллельных боковых граней равны S_1 и S_2 , а расстояние между ними — h . Найти объем призмы.
- 20. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Через его вершины A, C и D_1 проведена плоскость, образующая с плоскостью основания двугранный угол 60° . Стороны основания равны 4 и 3 см. Найти объем параллелепипеда.

Урок 47 [2]

Более сложные многогранники

Известно, что сложность стереометрических задач возрастает гораздо быстрее, чем сложность рассматриваемых многогранников. Поэтому на практике самыми сложными многогранниками, которые встречаются на вступительных экзаменах, являются четырехугольные пирамиды — простые и усеченные. Если же у пирамиды в основании более четырех углов, то она всегда предполагается правильной. Нельзя сказать, что преподаватели вузов не имеют права предлагать задачи на еще более сложные многогранники, но, по крайней мере, они раньше никогда этого не делали. Я думаю, можно считать, что такое положение сохранится и в дальнейшем.

Если дан вообще непонятно какой многогранник, не надо пугаться. Если вы должны вычислять его объем, подумайте, как разбить его на пирамиды. Точно так же, как и других стереометрических задачах, необходимо «выжимать» из условий задачи все, что возможно, разбивая ее для этого на планиметрические задачи, используя перпендикулярность, параллельность и другие свойства, которыми обладают элементы рассматриваемого многогранника.

Так же как и на предыдущем уроке, ничего нового знать не надо. Повторите формулы и теоремы из введения к главе «Стереометрия».

- **Задача 1.** Основанием пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник, угол между диагоналями которого равен $\alpha < \frac{\pi}{3}$. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна h . Дана вторая четырехугольная пирамида, имеющая ту же вершину S . Основанием ее является четырехугольник, две вершины которого лежат на диагоналях прямоугольника $ABCD$, а две другие — на одной из его больших сторон, причем проекция вершины S на плоскость основания лежит внутри этого четырехугольника. Найти объем второй пирамиды, если известно, что ее боковые грани равновелики, а боковые ребра равны.

Решение. Обозначим через O точку пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. Пусть вершины P и Q новой пирамиды лежат на диагоналях, а вершины T и R — на стороне AD .

Вершины P и Q не могут лежать на одной и той же диагонали, поскольку тогда высота SO новой пирамиды будет лежать не внутри четырехугольника $PQRT$, а на его стороне. Итак, вершины P и Q лежат на разных диагоналях. Кроме того, $OP = OQ$, ибо отрезки OP и OQ есть проекции равных по условию боковых ребер SP и SQ .

Из $OP = OQ$ следует, что $PQ \parallel TR$. Точка O лежит внутри четырехугольника $PQRT$, так что отрезок PQ расположен дальше от прямой AD , чем точка O (см. рис. 1).

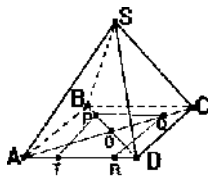


Рис. 1

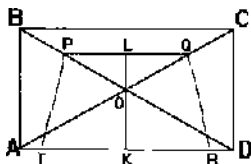


Рис. 2

Мы доказали, что $PQRT$ — трапеция с основаниями PQ и RT . Все боковые ребра пирамиды $SPQRT$ равны. Значит, точка O , через которую проходит высота обеих пирамид, попадает в центр окружности, описанной около трапеции $PQRT$. Из существования описанной окружности для трапеции следует, что она равнобокая, т.е. $PT = QR$.

Если $PQ = TR$, то $PQRT$ — параллелограмм, около которого можно описать окружность, т.е. прямоугольник. Но тогда точка O должна быть точкой пересечения его диагоналей, что может иметь место только если $PQRT$ совпадает с $ABCD$. Но боковые грани пирамиды $ABCD$ не равновелики. В самом деле, пусть $AD = a$, $AB = b$ и $SA = SB = SC = SD = l$.

Тогда

$$l^2 = SO^2 + DO^2 = h^2 + \frac{1}{4}(a^2 + b^2).$$

Высота в треугольнике ASD , опущенная из S , равна

$$\sqrt{l^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}b^2}.$$

Высота ASB , опущенная из S , равна

$$\sqrt{l^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}a^2}.$$

Если предположить, что площади треугольников ASD и ASB равны, то получим, что

$$a\sqrt{h^2 + \frac{1}{4}b^2} = b\sqrt{h^2 + \frac{1}{4}a^2} \iff a^2h^2 + \frac{a^2b^2}{4} = b^2h^2 + \frac{a^2b^2}{4} \iff a = b$$

— противоречие с тем, что диагонали $ABCD$ не перпендикулярны, как было бы, если бы $ABCD$ был квадратом.

Итак, $PQRT$ — трапеция с неравными основаниями PQ и RT . По условию $SP = SQ = SR = ST$ и площади треугольников TSR и PSQ равны. Значит,

$$TS \cdot SR \cdot \sin(\angle TSR) = PS \cdot SQ \cdot \sin(\angle PSQ) \iff$$

$$\iff \sin(\angle TSR) = \sin(\angle PSQ) \iff \angle TSR = \pi - \angle PSQ,$$

ибо $\angle TSR \neq \angle PSQ$ ввиду $TR \neq PQ$.

Пусть $\gamma = \angle TSR$. Тогда $\angle PSQ = \pi - \gamma$. Аналогично каждый из углов PST и RSQ равен либо γ , либо $\pi - \gamma$, причем эти углы равны ввиду равенства сторон PT и QR . Отсюда следует, что либо $TP = PQ = QR$, либо $PT = TR = RQ$.

Эти случаи мы разберем чуть позднее. Обозначим длину ST через m . Тогда

$$TR = 2m \sin \frac{\gamma}{2} \quad \text{и} \quad PQ = 2m \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) = 2m \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Отсюда заключаем, что

$$(1) \quad TR^2 + PQ^2 = 4m^2(\sin^2 \frac{\gamma}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2}) = 4m^2.$$

Пусть $\angle ORT = \beta$ и $OP = OQ = OR = OT = x$. Тогда $PQ = 2x \cos \frac{\alpha}{2}$ и $TR = 2x \cos \beta$. Подставляя эти значения в (1), получим уравнение

$$(2) \quad 4x^2 \cos^2 \beta + 4x^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 4m^2 = 4h^2 + 4x^2,$$

ибо $m^2 = h^2 + x^2$ по теореме Пифагора. Уравнение (2) перепишем в виде

$$(3) \quad x^2 \sin^2 \beta + h^2 = x^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Случай 1. $PT = PQ = QR = 2x \cos \frac{\alpha}{2}$.

Указанное равенство запишем с помощью x и β (см. рис. 2), пользуясь тем, что

$$PT^2 = \left(\frac{TR - PQ}{2} \right)^2 + (OK + OL)^2.$$

Итак,

$$\begin{aligned} 4x^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \left(x \cos \beta - x \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \left(x \sin \beta + x \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 \\ 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \cos^2 \beta + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \cos \beta \cos \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \beta + \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \beta \sin \frac{\alpha}{2} \\ 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= 2 - 2 \cos \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right) \\ \cos \alpha &= -\cos \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right) \iff \cos(\pi - \alpha) = \cos \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

Углы $\pi - \alpha$ и $\beta + \frac{\alpha}{2}$ лежат на отрезке $[0, \pi]$, так что из равенства их косинусов следует их равенство.

Имеем

$$\pi - \alpha = \beta + \frac{\alpha}{2} \iff \beta = \pi - \frac{3}{2}\alpha > \frac{\pi}{2},$$

так как $\alpha < \frac{\pi}{3}$. Но β — острый угол и, значит, случай 1 не имеет места.

Случай 2. $PT = TR = QR = 2x \cos \beta$. Имеем

$$4x^2 \cos^2 \beta = 2x^2 - 2x^2 \cos \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right) \iff \cos(\pi - 2\beta) = \cos \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right).$$

Значит, $\pi - 2\beta = \beta + \frac{\alpha}{2}$ и $\beta = \frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{6}$.

Подставив это значение β в равенство (3), получим

$$x^2 \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{6} \right) \right) = h^2,$$

откуда

$$(4) \quad x = \frac{h}{\sqrt{\left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{6} \right) \right)}} = \frac{h}{\sqrt{\sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{3} \right) \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\alpha \right)}}.$$

Найдем площадь трапеции $PQRT$:

$$\begin{aligned} (5) \quad S_{PQRT} &= \left(\frac{1}{2}TR + \frac{1}{2}PQ \right) (LO + OK) = \\ &= \left(x \cos \beta + x \cos \frac{\alpha}{2} \right) \left(x \sin \beta + x \sin \frac{\alpha}{2} \right) = 2x^2 \sin^3 \frac{\pi + \alpha}{3} \end{aligned}$$

— я, разумеется, опускаю выкладки, получающиеся при подстановке в (5) угла β , выраженного через α .

Осталось умножить найденное выражение на $\frac{1}{3}h$ и подставить значение x из (4).

$$\text{Ответ: } \frac{2h^3 \sin^3 \frac{\pi + \alpha}{3}}{3 \sin \frac{\pi - 2\alpha}{6} \sin \frac{\pi + 4\alpha}{6}}. \blacktriangleleft$$

► **Задача 2.** Цилиндр, радиус основания которого равен 1, и усеченная правильная четырехугольная пирамида расположены так, что верхнее основание пирамиды вписано в верхнее основание цилиндра, а нижнее основание пирамиды описано около нижнего основания цилиндра. Если продолжить

боковые грани усеченной пирамиды до пересечения, то высота полученной полной пирамиды будет равна $4 + \sqrt{2}$. Найти объем усеченной пирамиды.

Решение. Квадрат, описанный около окружности радиуса 1, имеет сторону 2. Если квадрат вписан в нее, то его сторона равна $\sqrt{2}$. Пусть h — высота нашей усеченной пирамиды. Тогда высота отсеченной части пирамиды равна $4 + \sqrt{2} - h$. Ясно, что высоты большой и маленькой пирамид относятся как стороны их граней (докажите это строго сами). Отсюда имеем

$$\frac{4 + \sqrt{2} - h}{4 + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff h = 3 - \sqrt{2}.$$

Применяем формулу для объема усеченной пирамиды

$$V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})h = \frac{1}{3}(4 + 2 + \sqrt{8})(3 - \sqrt{2}) = \frac{14}{3},$$

и наша задача решена.

Ответ: $\frac{14}{3}$. ◀

- **Задача 3.** В четырехугольную пирамиду $PABCD$ вписан шар, касающийся всех ее граней. Основанием пирамиды является равнобокая трапеция $ABCD$ с боковой стороной $AB = l$ и острым углом φ , а боковые грани APD и BPC — равнобедренные треугольники ($AP = PD$, $BP = PC$), образующие с основанием пирамиды один и тот же угол α . Найти радиус вписанного шара.

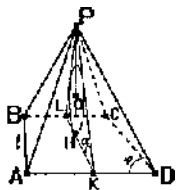


Рис. 3

Решение. Пусть $PABCD$ — пирамида, в основании которой лежит равнобокая трапеция $ABCD$; $AB = CD = l$, $\angle BAD = \angle ADC = \varphi$. Боковые грани пирамиды APD и BPC — равнобедренные треугольники: $AP = PD$, $BP = PC$; их основания являются одновременно основаниями трапеции (рис. 3).

Проведем апофему PK грани APD и высоту PH пирамиды. Тогда ребро AD , будучи перпендикулярным к двум пересекающимся прямым PH и PK , перпендикулярно плоскости HPK . Из $BC \parallel AD$ следует, что и ребро BC перпендикулярно к плоскости HPK и, в частности, к линии PL пересечения этой плоскости с гранью BPC (т.е. PL — апофема). Поэтому $\angle PLK$ и $\angle PKL$ — линейные углы двугранных углов между основанием и боковыми гранями BPC и APD соответственно; по условию оба угла PLK и PKL равны α .

В данную пирамиду вписан шар; требуется найти его радиус. Докажем, что центр шара лежит на высоте PH пирамиды. Этот центр лежит на пересечении двугранных углов при всех ребрах пирамиды. Докажем, что плоскость PKL является биссектральной для двугранного угла между плоскостями ABP и CDP .

Пусть S — произвольная точка плоскости PKL . Объемы пирамид $SABLK$ и $SLCDK$ равны, ибо площади их оснований $ABLK$ и $LCDK$ равны, а высота у них общая. Аналогичным образом

$$V_{SBPL} = V_{SPLC} \quad \text{и} \quad V_{SAPK} = V_{SPKD}.$$

Точно так же и $V_{PABLK} = V_{PLCDK}$.

Из приведенных равенств следует, что $V_{SABP} = V_{SCDP}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно (в случае, когда точка S лежит внутри $PABCD$) заметить, что объем $PABLK$ есть сумма объемов $SABP$, $SABLK$ и $SBLP$, а объем $PLCDK$ есть сумма объемов $SLCDK$, $SLCP$ и $SCDP$, и воспользоваться вышеприведенными равенствами.

В случае, когда S лежит вне пирамиды, надо записать объемы $PABLK$ и $PLCDK$ в виде некоторой разности из вышеприведенных объемов. Результат будет тот же.

Из равенства объемов пирамид $SABP$ и $SDCP$ и равенства треугольников ABP и DCP (по трем сторонам) следует равенство высот, опущенных в пирамидах $SABP$ и $SCDP$ из вершины S . Значит, расстояния от точки S до плоскостей ABP и CDP равны, так что плоскость PKL совпадает с биссектральной для этих плоскостей.

Теперь посмотрим, как проходит биссектральная плоскость двугранного угла между плоскостями ADP и BCP . Из $BC \parallel AD$ следует, что линия их пересечения параллельна каждой из прямых AD и BC . Значит, она (см. рассуждение в начале решения) перпендикулярна плоскости PLK , т.е. угол LPK есть линейный угол данного двугранного угла. Треугольник PLK равнобедренный, так что его высота PH является и его биссектрисой в линейном угле LPK нашего двугранного угла. Значит, PH целиком лежит в биссектральной плоскости.

Мы доказали, что пересечение двух биссектральных плоскостей двугранных углов пирамиды совпадает с ее высотой. Итак, центр O вписанного шара лежит на высоте PH . Сечение шара плоскостью PLK дает окружность, вписанную в равнобедренный треугольник PLK , в котором $\angle PLK = \angle PKL = \alpha$ и $LK = l \sin \varphi$. Ее радиус OH равен

$$r = HK \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} l \sin \varphi \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

и наша задача решена.

Ответ: $r = \frac{1}{2} l \sin \varphi \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. ◀

- **Задача 4.** Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром a . Сфера с центром в точке O проходит через точку A и касается ребер SB и SD в их серединах. Найти объем пирамиды $OSCD$.

Решение. В треугольнике BSD стороны BS и SD равны a , а сторона BD равна $a\sqrt{2}$. Отсюда следует, что BSD — равнобедренный прямоугольный

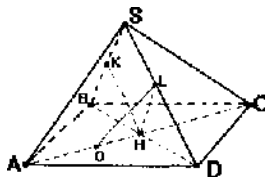


Рис. 4

треугольник с прямым углом BSD . Пусть K и L есть соответственно середины ребер SB и SD . Плоскость BSD высекает из сферы окружность, вписанную в угол BSD и касающуюся его сторон в точках K и L . Ясно, что центр этой окружности лежит на середине H гипотенузы BD . Прямая AC перпендикулярна плоскости BSD и проходит через точку H . Отсюда следует, что центр O сферы обязан лежать на прямой AC (рис. 4).

Обозначим радиус сферы через R , тогда $AO = R$ и $OH = \pm(\frac{a}{\sqrt{2}} - R)$. Я написал знак $\pm$, так как не ясно, где по отношению к H лежит точка O . Отрезок HL есть средняя линия в треугольнике BSD , так что $HL = \frac{a}{2}$. Из $OL = R$ и теоремы Пифагора для треугольника OHL следует, что

$$\left(\frac{a}{\sqrt{2}} - R\right)^2 + \frac{1}{4}a^2 = R^2 \iff R = \frac{3}{8}a\sqrt{2}.$$

Следовательно, $OC = \frac{5}{8}a\sqrt{2}$ и легко найти, что площадь треугольника COD равна $\frac{5}{16}a^2$. Высота пирамиды $CODS$, опущенная из вершины S , равна $\frac{a}{\sqrt{2}}$, и теперь уже можно получить

Ответ: объем пирамиды $CODS$ равен $\frac{5\sqrt{2}}{96}a^3$. ◀

- **Задача 5.** Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Через середины ребер AB , AD и CS проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

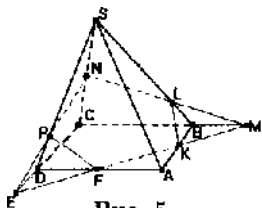


Рис. 5

Решение. Пусть точки K и F — середины ребер AD и AB (рис. 5). Соединив их прямой, получим, что она пересечет продолжение ребер CD и CB в точках E и M . Сравнивая треугольники BKM , AKF и DEF , получим, что $MB = \frac{1}{2}BC$ и $ED = \frac{1}{2}DC$.

Пусть точка N — середина ребра CS . Точки N и M лежат в плоскости грани SBC , поэтому прямая MN пересекает ребро BS в некоторой точке L . При помощи теоремы Менелая легко выяснить, что $BL = \frac{1}{4}SD$.

Аналогично показывается, что $DP = \frac{1}{4}SD$, где P — точка пересечения прямой EN с ребром SD .

Итак, плоскость сечения пересекает пирамиду по пятиугольнику $LKFNP$. Ясно, что

$$(6) \quad V_{CDFKBLNP} = V_{CEMN} - V_{PEDF} - V_{BKML}.$$

Пусть сторона основания пирамиды $SABCD$ равна a , а высота — h . Понятно, что

$$S_{ECM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{9a^2}{8}, \quad S_{EDF} = S_{KBM} = \frac{a^2}{8}.$$

Кроме того, высота пирамиды $ECMN$, опущенная из точки N , равна $\frac{h}{2}$, а высоты, опущенные на плоскость $ABCD$ в пирамидах $EDFP$ и $BKLM$, равны $\frac{h}{4}$.

Подставляя найденные значения площадей и высот в формулу (6), получим, что

$$V_{CDFKBLNP} = \frac{9}{48}a^2h - 2 \cdot \frac{1}{96}a^2h = \frac{1}{6}a^2h = \frac{1}{2}V_{SABCD}.$$

Ответ: 1 : 1. ◀

- **Задача 6.** Стороны оснований правильной усеченной шестиугольной пирамиды равны a и $3a$. Расстояние между двумя параллельными ребрами, лежащими в плоскостях различных оснований и в противоположных боковых гранях, равно b . Вычислить площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через указанные параллельные ребра.

Решение. Проведем секущую плоскость через параллельные ребра AB и D_1E_1 (рис. 6).

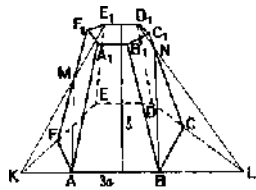


Рис. 6

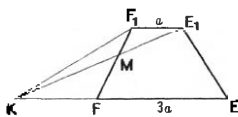


Рис. 7

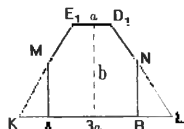


Рис. 8

Для построения сечения найдем точки K и L пересечения прямой AB с продолжениями ребер EF и DC . Так как точки K и E_1 лежат в плоскости боковой грани EEF_1E_1 , прямая KE_1 пересекает ребро FF_1 в некоторой точке M . Прямая LD_1 лежит в плоскости боковой грани CDD_1C_1 и пересекает ребро CC_1 в некоторой точке N .

Треугольники AKF и BLC равносторонние со сторонами $3a$. В частности, $KF = LC = 3a$.

Полезно построить вспомогательные планиметрические чертежи. Вынесем плоскость грани EE_1F_1F на рис. 7.

Сравнивая подобные треугольники ME_1F_1 и MKF , определяем, что точка M делит ребро FF_1 в отношении 3:1. Аналогично можно показать, что точка N делит ребро CC_1 также в отношении 3:1. Кроме того, отсюда вытекает, что $E_1M : MK = 1 : 3$ и $D_1N : NL = 1 : 3$.

Вынесем плоскость сечения на рис. 8. Наш шестиугольник $ABND_1E_1M$ получается из трапеции KLD_1E_1 отбрасыванием двух равных треугольников KAM и LBN . Поскольку $KL = 9a$, $E_1D_1 = a$, а высота трапеции равна b , площадь трапеции равна $5ab$. Точка M делит отрезок E_1K в отношении $1:3$, так что высота треугольника KMA , опущенная из точки M на AK , равна $\frac{3}{4}b$. Поэтому площадь треугольника AKM равна $\frac{9}{8}ab$.

Теперь уже совсем легко получить

Ответ: $\frac{11}{4}ab$. ◀

- **Задача 7.** В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит равнобокая трапеция $ABCD$, для которой $AD \parallel BC$, $AB = CD = a$, $AD = 3a$ и $BC = 2a$. Ребро SC перпендикулярно к плоскости основания и равно h . Через точку C проведено сечение пирамиды плоскостью, параллельной ребрам AB и SD . Найти угол между плоскостью сечения и основанием пирамиды.

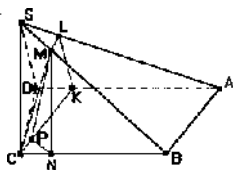


Рис. 9

Решение. Пусть K — точка пересечения плоскости с ребром AD . Тогда $CK \parallel AB$ и $CK = a$. Если L — точка пересечения плоскости с ребром SA , то $KL \parallel SD$. Наконец, эта плоскость обязана пересекать ребро SB в такой точке M , что $ML \parallel AB$ (рис. 9).

Перпендикуляр из точки M на плоскость $ABCD$ попадет в точку N на прямой BC ; опустив перпендикуляр NP точки N на отрезок CK , можем заключить, что двугранный угол между плоскостями $CKML$ и $ABCD$ равен углу MPN .

Из $DK = a$ следует, что $DK = \frac{1}{3}AD$, откуда $SL = \frac{1}{3}SA$. Значит, $ML = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}a$. Аналогично $MN = \frac{2}{3}SC = \frac{2}{3}h$, $CN = \frac{1}{3}BC = \frac{2}{3}a$. Угол PCN равен 60° , так что $PN = CN \sin 60^\circ = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$.

Следовательно, $\operatorname{tg}(\angle MPN) = \frac{MN}{NP} = \frac{2h}{a\sqrt{3}}$, и наша задача решена.

Ответ: $\arctg \frac{2h}{a\sqrt{3}}$. ◀

- **Задача 8.** Дан выпуклый многогранник, площади всех граней которого равны S , а объем — V . Доказать, что сумма расстояний от произвольной внутренней точки многогранника до его граней не зависит от выбора точки. Найти эту сумму.

Решение. Предположим, что наш многогранник имеет n граней с номерами от единицы до n . Возьмем произвольную точку P , лежащую внутри многогранника. Если мы соединим ее с вершинами грани с номером k , то получится пирамида, основание которой имеет площадь S , а высота равна h_k , т.е. расстоянию от точки P до k -й грани. Сумма объемов всех таких

пирамид равна V и, следовательно,

$$V = \frac{1}{3}Sh_1 + \frac{1}{3}Sh_2 + \dots + \frac{1}{3}Sh_n,$$

откуда $h_1 + h_2 + \dots + h_n = \frac{3V}{S}$ и задача решена.

Ответ: искомая сумма равна $\frac{3V}{S}$. ◀

- **Задача 9.** На гранях двугранного угла с ребром AD лежат точки B и C . Отрезок DE параллелен плоскости треугольника ABC . В пирамиду $BCDE$ вписан шар. Отношение расстояния от его центра до прямой DE к расстоянию от прямой DE до плоскости ABC равно k . Пусть B' есть проекция точки B на плоскость CDE . Известно, что $\operatorname{tg}(\angle B'DE) : \operatorname{tg}(\angle BDE) = l$. Через середину отрезка AD проведена плоскость P , параллельная плоскости ABC . Найти площадь сечения плоскостью P многогранника $ABCDE$, составленного из треугольных пирамид $ABCD$ и $BCDE$, если известно, что площадь грани ABC равна S , а сумма площадей всех граней пирамиды $BCDE$ равна σ .

Решение. На рисунке 10 изображен многогранник $ABCDE$.

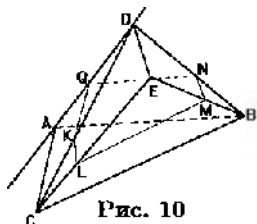


Рис. 10

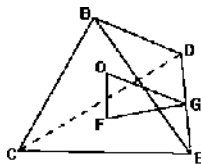


Рис. 11

Пусть Q — середина отрезка AD . Заданная в условии задачи плоскость P параллельна прямой AB и потому пересечет грань ADB по отрезку QN , параллельному прямой AB . Значит, точка N является серединой отрезка BD . Аналогично доказывается, что плоскость P пересекает ребро CD в его середине K . По условию прямая DE параллельна плоскости ABC , поэтому она параллельна также и плоскости P . Это означает, что отрезки KL и NM , по которым плоскость пересекает грани CED и BED соответственно, параллельны прямой DE . Из равенств $DK = CK$, $DN = BN$ теперь следует, что точки L и M являются серединами ребер CE и BE соответственно.

Искомая площадь сечения складывается из площади треугольника QNK и площади четырехугольника $KLMN$. Из равенств

$$QN = \frac{1}{2}AB, \quad KN = \frac{1}{2}BC, \quad QK = \frac{1}{2}AC$$

следует, что треугольники QNK и ABC подобны с коэффициентом подобия $1/2$, и потому площадь QNK равна $\frac{1}{4}S$ (ибо по условию $S_{ABC} = S$).

Осталось найти площадь S_1 четырехугольника $KLMN$. Для этого мы подсчитаем объем V пирамиды $BCDE$ двумя способами.

Пусть H — расстояние от прямой DE до плоскости ABC . Оно, очевидно, равно расстоянию от прямой DE до прямой BC . На уроке 44 (задача 6) мы доказали, что

$$V = V_{BCDE} = \frac{1}{6} \cdot DE \cdot BC \cdot H \cdot \sin \phi,$$

где ϕ есть угол между DE и BC . Но у параллелограмма угол KLM тоже равен ϕ , а стороны KL и LM равны соответственно половинам сторон DE и BC . Из равенства $S_1 = KL \cdot LM \cdot \sin \phi$ следует теперь, что

$$(7) \quad V = \frac{2}{3} S_1 H.$$

Пусть O — центр шара, вписанного в пирамиду $BCDE$, и r — его радиус. Тогда, поскольку полная поверхность $BCDE$ равна σ , имеем

$$(8) \quad V = \frac{1}{3} r \sigma.$$

Выразим r через данные задачи. Обозначим через F точку, в которой шар касается грани CDE , и через G — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую DE (рис. 11). Ясно, что прямая DE перпендикулярна плоскости OFG . Так как центр шара, касающегося граней двугранного угла, лежит на его биссектральной плоскости, имеем $\angle OGF = \frac{1}{2}\varphi$, где φ — величина двугранного угла DE . Следовательно, $r = OG \cdot \sin \frac{\varphi}{2} = kH \sin \frac{\varphi}{2}$. Последнее равенство выполняется, поскольку в условии задачи сказано, что $\frac{OG}{H} = k$.

Обозначим через B' и T основания перпендикуляров, опущенных из точки B на плоскость CDE и прямую DE (рис. 12).

Плоскость $BB'T$ перпендикулярна прямой DE , и, значит, $\angle BTB' = \varphi$.

Имеем

$$\cos \varphi = \frac{B'T}{BT} = \frac{DT \cdot \operatorname{tg}(\angle B'DE)}{DT \cdot \operatorname{tg}(\angle BDE)} = l,$$

$$\text{так что } \sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-l}{2}}.$$

Таким образом, $r = kH \sqrt{\frac{1-l}{2}}$, и подставляя это выражение в (8), находим, что

$$(9) \quad V = \frac{1}{3} \sigma k H \sqrt{\frac{1-l}{2}}.$$

Сравнивая теперь выражения (9) и (7), находим $S_1 = \frac{1}{2} \sigma k \sqrt{\frac{1-l}{2}}$. Искомая площадь сечения равна $\frac{1}{4} S + S_1$.

Ответ: $\frac{1}{4} (S + \sigma k \sqrt{2-l})$. ◀

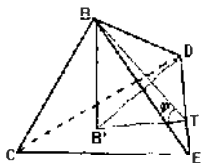


Рис. 12

► **Задача 10.** Основанием пирамиды $ABCEH$ служит выпуклый четырехугольник $ABCE$, который диагональю BE делится на два равновеликих треугольника. Длина ребра AB равна единице, длины ребер BC и CE равны. Сумма длин ребер AH и EH равна $\sqrt{2}$. Объем пирамиды равен $1/6$. Найти радиус шара, имеющего наибольший объем среди шаров, помещающихся в пирамиде $ABCEH$.

Решение. Мы должны найти шар наибольшего радиуса, помещающийся в данной пирамиде. Выясним для начала, как она устроена. Ввиду того, что треугольники ABE и BCE равновелики, объем пирамиды $ABEH$ вдвое меньше объема пирамиды $ABCEH$, т.е. $V_{ABEH} = 1/12$. С другой стороны, если h_B — расстояние от точки B до плоскости AEH , то $V_{ABEH} = \frac{1}{3} h_B S_{AEH}$. Значит, $h_B \cdot S_{AEH} = 1/4$. Ввиду того, что $h_B \leq AB = 1$ и $S_{AEH} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot EH \cdot \sin(\angle AHE) \leq \frac{1}{2} \cdot AH \cdot EH$, получаем

$$\frac{1}{4} = h_B \cdot S_{AEH} \leq AB \cdot \frac{1}{2} \cdot AH \cdot EH \leq 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{AH + EH}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Мы воспользовались неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим $ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$.

Теперь уже можно заключить, что в действительности все выписанные неравенства являются равенствами. Следовательно,

1) $h_B = AB = 1$; это означает, что ребро AB перпендикулярно плоскости AEH ;

2) $\sin(\angle AHE) = 1$, т.е. $\angle AHE = \frac{\pi}{2}$;

3) $\sqrt{AH \cdot EH} = \frac{1}{2}(AH + EH) \iff AH = EH = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Из прямоугольного треугольника AHE находим

$$AE = \sqrt{AH^2 + HE^2} = 1.$$

Получилось, что треугольник ABE равнобедренный: $AB = AE = 1$.

Пусть D — середина отрезка BE . Так как треугольники BAE и BCE равнобедренные, AD и CD — высоты в соответствующих треугольниках. Значит,

$$S_{BAE} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BE \quad \text{и} \quad S_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot BE.$$

По условию треугольники BAE и BCE равновелики, следовательно, $AD = CD$. Значит, точки A, D и C лежат на одной прямой, так что диагонали четырехугольника $ABCE$ перпендикулярны и делятся в точке пересечения пополам. Значит, $ABCE$ — ромб.

Ранее доказано, что AB перпендикулярно плоскости AHE , в частности, $AB \perp AE$. Значит, $ABCE$ — квадрат со стороной 1. Так как $AB \parallel CE$ и AB перпендикулярно плоскости AHE , треугольники ABH и ECH

прямоугольные. В них $AB = EC$ и $AN \simeq EH$, следовательно, $BH = CH$. Вот теперь вид нашей пирамиды полностью определен. (см. рис. 13).

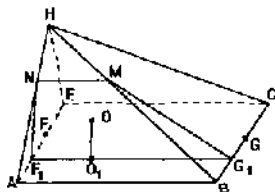


Рис. 13

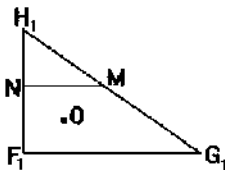


Рис. 14

Пусть F и G — середины ребер AE и BC соответственно. Из того, что FG перпендикулярно плоскости AHE (будучи параллельно AB) следует, что плоскости AHE и HFG перпендикулярны. Угол AHE есть линейный угол двугранного угла между плоскостями ABH и CHN , ибо прямая пересечения этих плоскостей параллельна AB , а плоскость AHE перпендикулярна AB (мы знаем, что плоскость, перпендикулярная к прямой пересечения двух плоскостей, высекает на этих плоскостях линейный угол их двугранного угла).

Так как HF — биссектриса угла AHE , плоскость HFG является биссектральной для двугранного угла между плоскостями ABH и CHN .

Пусть r — радиус шара, целиком лежащего внутри пирамиды $ABCEN$. Проведем через его центр O плоскость π , перпендикулярную ребру AE . Она будет параллельна плоскости HFG , также перпендикулярной этому ребру. Ясно, что сечение пирамиды плоскостью π есть трапеция F_1G_1MN (рис. 13). Конечно же, это сечение совпадет с треугольником HFG , если плоскость π совпадет с плоскостью HFG .

Плоскость π высекает из шара круг радиуса r , целиком лежащий в трапеции F_1G_1MN и, следовательно, в треугольнике $F_1G_1H_1$ (рис. 14), полученном продолжением боковых сторон F_1N и G_1M трапеции F_1G_1MN .

Прямоугольные треугольники HFG и $H_1F_1G_1$ равны, так как $F_1G_1 = FG$ и $\angle H_1G_1F_1 = \angle HFG$, ибо оба этих угла есть линейные для двугранного угла при ребре BC . Значит, $F_1H_1 = 1/2$, $F_1G_1 = 1$ и $H_1G_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пусть h_1, h_2, h_3 — расстояния от точки O до сторон F_1G_1 , F_1H_1 и G_1H_1 соответственно. Круг радиуса r целиком лежит в треугольнике $H_1F_1G_1$, так что $r \leq h_i$ ($i = 1, 2, 3$). Значит,

$$\begin{aligned} S_{F_1G_1H_1} &= S_{OF_1G_1} + S_{OF_1H_1} + S_{OG_1H_1} = \\ &= \frac{1}{2}(h_1 \cdot F_1G_1 + h_2 \cdot F_1H_1 + h_3 \cdot G_1H_1) \geq \\ &\geq \frac{1}{2}r(F_1G_1 + F_1H_1 + G_1H_1) = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} \cdot r. \end{aligned}$$

Но $S_{F_1G_1H_1} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Следовательно,

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{4} r \leq \frac{1}{4} \iff r \leq \frac{1}{3 + \sqrt{5}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}.$$

Нам осталось установить, что шар радиуса $r = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$ можно целиком поместить в нашу пирамиду. Пусть K — центр окружности, вписанной в треугольник HFG . Легко подсчитать, что ее радиус r_0 равен $\frac{3 - \sqrt{5}}{4}$. Проверим, что шар с центром в точке K и радиусом r_0 лежит внутри пирамиды $ABCEH$. Мы должны доказать, что расстояния от K до всех граней пирамиды не меньше r_0 .

Плоскость HFG перпендикулярна каждой из плоскостей AHE , $ABCE$ и BCH . Для первых двух мы это уже доказали, а для плоскости BCH это верно, так как BCH содержит перпендикуляр BC к плоскости HFG . Отсюда следует, что каждый из перпендикуляров из точки K на три упомянутые плоскости лежит в плоскости HFG , т.е. все три расстояния от K до этих плоскостей равны r_0 .

Плоскость HFG биссектральная для плоскостей ABH и CEH , значит, расстояния от K до этих плоскостей равны одному и тому же числу h . Имеем

$$\begin{aligned} V_{ABCEH} &= V_{ABCEK} + V_{ABHK} + V_{AENK} + V_{CTHK} \\ &\iff \\ \frac{1}{6} &= \frac{1}{3}(r_0 \cdot S_{AHE} + r_0 \cdot S_{ABCE} + r_0 \cdot S_{BCH} + h \cdot S_{ABH} + h \cdot S_{CEH}) \\ &\iff \\ \frac{1}{2} &= \frac{3 - \sqrt{5}}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} \right) + 2h \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &\iff \\ h &= \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{8} > r_0 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}, \end{aligned}$$

и наша задача полностью решена.

Ответ: $r = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$. ◀

Урок окончен. Оценка ставится стандартным образом.

Домашнее задание

- 1. Площадь боковой грани правильной шестиугольной пирамиды равна S . Вычислить площадь сечения, проходящего через середину высоты пирамиды параллельно боковой грани.
- 2. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром b . Первая сфера с центром в точке O_1 касается плоскостей SAD и SBC в точках A и B , а вторая сфера с центром в точке O_2 касается плоскостей SAB и SCD в точках B и C . Найти объем пирамиды ABO_1O_2 .
- 3. Найти объем общей части двух кубов, если один из них получен при повороте на 90° другого куба вокруг оси, проходящей через среднюю линию одной из его граней. Ребро куба равно a .
- 4. Основание пирамиды $SABCD$ есть трапеция с параллельными сторонами AB и CD . Доказать, что объем пирамиды равен $\frac{4}{3}$ произведения площади треугольника MSN , где MN — средняя линия трапеции, на расстояние от ребра AB до плоскости MSN .
- 5. Многогранник имеет следующее строение: две его грани (основания) представляют собой многоугольники, расположенные в параллельных плоскостях; остальные (боковые) грани — трапеции, параллелограммы или треугольники, у которых каждая вершина является одновременно вершиной одного из оснований. Доказать, что объем такого многогранника равен $\frac{1}{6}H(S_1 + S_2 + 4S_3)$, где H — расстояние между плоскостями оснований, S_1 и S_2 — площади оснований, а S_3 — площадь сечения, равноотстоящего от обоих оснований.
- 6. Фигура ограничена сверху и снизу двумя прямоугольниками со сторонами, равными a , b и a_1 , b_1 , а сбоку — трапециями. Стороны прямоугольников параллельны; расстояние между параллельными плоскостями прямоугольных оснований равно h . Найти объем фигуры.
- 7. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α . Две боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к нему под углом φ . Найти объем пирамиды.
- 8. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб; вершины его верхнего основания лежат на боковых ребрах, вершины нижнего основания — в плоскости основания пирамиды. Найти отношение объема куба к объему пирамиды, если боковое ребро пирамиды составляет с плоскостью основания угол α .
- 9. В правильную усеченную треугольную пирамиду вписаны два шара; один касается всех ее граней, другой — всех ребер. Найти синус угла

между боковым ребром и плоскостью основания.

- ▶ 10. В основании четырехугольной пирамиды лежит равнобедренная трапеция с основаниями a и b ($a > 2b$) и углом φ между неравными отрезками ее диагоналей. Вершина пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей основания. Углы, которые составляют с плоскостью основания боковые грани, проходящие через основания трапеции, относятся как 1:2. Найти объем пирамиды.
- ▶ 11. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция с острым углом α . Эта трапеция описана около окружности основания конуса. Вершина пирамиды лежит на одной из образующих конуса, и ее проекция на плоскость основания совпадает с точкой пересечения диагоналей трапеции. Найти объем пирамиды, если образующая конуса равна l и составляет с высотой угол β .
- ▶ 12. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ основание $ABCD$ имеет своей осью симметрии диагональ AC , длина которой равна 9, а точка E пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ делит отрезок AC так, что $AE < EC$. Через середину бокового ребра пирамиды $SABCD$ проведена плоскость, параллельная основанию и пересекающаяся с ребрами SA , SB , SC и SD соответственно в точках A' , B' , C' и D' . Получившийся многогранник $ABCD A'B'C'D'$, являющийся частью пирамиды $SABCD$, пересекается плоскостью α по правильному шестиугольнику, сторона которого равна 2. Найдите площадь треугольника ABD , если плоскость α пересекает отрезки BB' и DD' .
- ▶ 13. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ с вершиной S , у которой ребро основания равно 2, а боковое ребро — $\sqrt{3}$, вписана правильная четырехугольная пирамида $S'A'B'C'D'$ с вершиной S' , у которой длины всех ребер равны между собой. При этом вершина S' лежит в плоскости $ABCD$, а вершины A' , B' , C' , D' лежат на четырех апофемах пирамиды $SABCD$. Докажите, что вершина S' лежит в точке пересечения диагоналей квадрата $ABCD$ и найдите объем пирамиды $S'A'B'C'D'$.
- ▶ 14. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$ со стороной длины a . Длина диагонали ромба в 1,5 раз больше длины его стороны. Основание высоты пирамиды совпадает с центром ромба, и ее длина в 1,5 раза больше AC . Через точку A и середину ребра CS проведена секущая плоскость, образующая с плоскостью основания пирамиды угол 45° . Какова площадь сечения пирамиды этой плоскостью и сколько таких плоскостей можно построить?
- ▶ 15. Высота пирамиды равна 2, основание пирамиды есть ромб, площадь которого равна 8, а величина острого угла равна $\frac{\pi}{6}$. Некоторый шар касается плоскости каждой боковой грани в точке, лежащей на стороне основания пирамиды. Докажите, что прямая, соединяющая вершину пи-

рамы с центром шара, проходит через точку пересечения диагоналей ромба. Найдите объем шара.

- 16. В основании пирамиды $PQRST$ лежит четырехугольник RST , у которого стороны QR и ST параллельны, $QR = 6$, $QT = 4$, $PQ = 2\sqrt{14}$, а угол RQT равен 120° . Найдите объем пирамиды, если известно, что через прямые QR и ST можно провести две плоскости, не совпадающие с основанием пирамиды и пересекающие пирамиду по равным четырехугольникам.
- 17. Основанием четырехугольной пирамиды $FABCD$ является квадрат $ABCD$. На ребре AF взята точка E такая, что отрезок CE перпендикулярен ребру AF . Проекция O точки E на основание пирамиды лежит на отрезке AC и делит его в отношении $AO : OC = \gamma$. Найдите разность объемов пирамид $FABCD$ и $EABD$, если известно, что $\angle ADF = 90^\circ$, а $AB = a$.
- 18. Сфера радиуса R касается всех граней восьмигранника. Две грани — основания — расположены в плоскостях α и β , а остальные шесть (боковых) граней — или равные между собой трапеции, или равные между собой равнобедренные треугольники. Боковые грани таковы, что каждая боковая сторона треугольника является одновременно боковой стороной трапеции, а каждая боковая сторона трапеции является одновременно либо боковой стороной другой трапеции, либо боковой стороной одного из треугольников. Основания всех трапеций, имеющие длину $\sqrt{13}$, расположены в плоскости β и образуют многоугольник площади 12, а все другие основания трапеций и все основания треугольников расположены в плоскости α . Площадь поверхности сферы относится к суммарной площади боковых граней как π относится к 5. Известно, что $3 < R < 4$. Найдите R .
- 19. В основании пирамиды $TABCD$ лежит трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$ и $AD/BC = 2$). Через вершину T пирамиды проведена плоскость, параллельная прямой BC и пересекающая отрезок AB в точке M такой, что $AM/MB = 2$. Площадь получившегося сечения равна S , а расстояние от ребра BC до плоскости сечения равно d . Найдите

- 1) в каком отношении плоскость сечения делит объем пирамиды;
- 2) объем пирамиды.

- 20. Многогранник имеет шесть граней:

$$ABCK, EMPH, ABME, BCPM, CKHP, AKHE.$$

Все его вершины лежат на сфере радиуса $\sqrt{34}$. Грани $ABCK$ и $EMPH$ лежат в параллельных плоскостях, расстояние между которыми равно 2. Известно, что $AB : CK = EM : PH \neq 1$, площадь грани $EMPH$ равна 5, а объем многогранника равен $\frac{98}{15}$. Найти длину ребра BM .

Урок 48 [2]

Сферы, цилиндры, конусы

Этот урок должен помочь вам привыкнуть работать с объектами, указанными в его названии. Отличительной их особенностью является то, что их трудно изображать на чертеже. Поэтому нужно научиться изображать самое главное, отбрасывая второстепенное. Вы увидите, как я это делаю в задачах 1–10.

По-прежнему никаких новых формул и теорем знать не надо. Повторите все, что относится к круглым телам во вступлении к настоящей главе.

- **Задача 1.** В шар вписан прямой круговой цилиндр. Во сколько раз объем шара больше объема цилиндра, если известно, что отношение радиуса шара к радиусу основания цилиндра вдвое меньше, чем отношение поверхности шара к боковой поверхности цилиндра?

Решение. Пусть радиус шара равен R , а цилиндра — r . Рассмотрим какую-нибудь плоскость, проходящую через центр шара и содержащую ось цилиндра (такая существует, ибо центр шара, конечно же, лежит на оси цилиндра). Сечение цилиндра — прямоугольник с одной из сторон $2r$, вписанный в круг радиуса R . Тривиально находится, что вторая сторона прямоугольника равна $\sqrt{4R^2 - 4r^2}$. Ясно, что эта сторона будет равна высоте цилиндра. Согласно условию

$$2 \cdot \frac{R}{r} = \frac{4\pi R^2}{2\pi r \sqrt{4R^2 - 4r^2}} \iff \frac{R}{r} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Тогда $\sqrt{4R^2 - 4r^2} = R$, и теперь уже легко найти искомое отношение объемов:

$$\frac{V_{\text{шара}}}{V_{\text{цилиндра}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi r^2 \sqrt{4R^2 - 4r^2}} = \frac{16}{9}.$$

Ответ: в $\frac{16}{9}$ раза. ◀

- **Задача 2.** Три сферы радиусов r , r и R внешним образом касаются друг друга и все касаются некоторой плоскости. Найти радиус сферы, касающейся данных сфер и этой плоскости.

Решение. В задаче не требуется выяснять, когда конструкция из сфер, указанная в задаче, существует, а также когда имеется решение. В принципе, вы можете решить задачу, предполагая, что все указанное в ней существует. Однако решение не всегда будет единственно (а все возможные радиусы

вы должны найти!). Поэтому я проведу исследование, а вы можете считать свое решение верным, если вы нашли все возможные радиусы в зависимости от r и R .

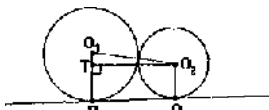


Рис. 1

Сначала простое общее замечание. если сферы радиусов R и r касаются внешним образом друг друга и некоторой плоскости, то длина отрезка, соединяющего их точки касания с плоскостью, равна $2\sqrt{Rr}$. В самом деле, посмотрим на рис. 1.

Радиус сферы с центром в точке O_1 равен R , радиус другой сферы с центром в точке O_2 есть r . На рисунке 1 изображено сечение сфер плоскостью π , проходящей через их центры перпендикулярно плоскости, которой они касаются. Радиусы O_1P и O_2Q , проведенные в точки касания, будут лежать в плоскости π . Отрезок PQ , равный O_2T (мы считаем, что $r \leq R$) найдем по теореме Пифагора:

$$PQ = \sqrt{(O_1O_2)^2 - (O_1T)^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr},$$

а это как раз и требовалось.

Заметим еще, что если дана сфера радиуса r с центром O_2 , касающаяся плоскости в точке Q , как на рис. 1, то любая точка O_1 пространства, проекция которой на плоскость есть некоторая точка P такая, что $O_1P = x$ и $PQ = 2\sqrt{xt}$, будет центром шара радиуса x , касающегося плоскости и данной сферы внешним образом. Для этого достаточно доказать, что $O_1O_2 = r + x$, а это легко делается с помощью теоремы Пифагора для треугольника O_1O_2T (для случая, когда $x \geq r$, годится рис. 1; нарисуйте сами картинку и изобразите положение точки T при $x < r$).

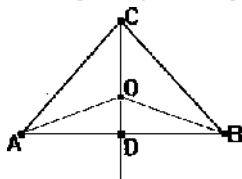


Рис. 2

Пусть теперь даны две сферы радиуса r , внешне касающиеся друг друга и плоскости α . Пусть они касаются плоскости α в точках A и B (рис. 2).

Сфера радиуса R , касающаяся каждой из данных сфер радиуса r и плоскости α , существует тогда и только тогда, когда для некоторой точки C на плоскости имеем $AC = BC = 2\sqrt{Rr}$.

Из этого равенства следует, что точка C обязана лежать на серединном перпендикуляре к прямой AB . Если D — середина отрезка AB , то $AD = r$ и $AC \geq AD$, что эквивалентно неравенству $2\sqrt{Rr} \geq r \iff R \geq \frac{r}{4}$. Легко проверяется, что для любого $R \geq \frac{r}{4}$ соответствующая точка C существует, а значит, указанная сфера радиуса R существует если и только если $R \geq \frac{r}{4}$.

Итак, пусть заданы точки касания A, B и C трех данных сфер с плоскостью α . Пусть O — точка касания искомой сферы с этой же плоскостью

(см. рис. 2) и x — радиус этой сферы. Из равенств

$$AO = OB = 2\sqrt{rx}, \quad OC = 2\sqrt{Rx}$$

следует, что O обязано лежать на прямой CD (мы изобразили точку O внутри треугольника, но она может лежать и вне его). Рассмотрим треугольник BOC . В нем $\sin(\angle BCO) = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{R}}$. По теореме синусов для этого же треугольника имеем

$$\frac{BO}{OC} = \frac{\sin(\angle BCO)}{\sin(\angle OBC)} \iff \frac{2\sqrt{rx}}{2\sqrt{Rx}} = \sqrt{\frac{r}{R}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{R}}}{\sin(\angle CBO)} \iff \sin(\angle CBO) = \frac{1}{2},$$

откуда $\cos(\angle CBO) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Запишем теорему косинусов для треугольника BOC и его стороны $OC = 2\sqrt{Rx}$.

$$4Rx = 4rx + 4Rr \pm \sqrt{3} \cdot 4\sqrt{rx} \cdot \sqrt{Rr}$$

$$(1) \quad x(r - R) \pm \sqrt{x} \cdot r \cdot \sqrt{3R} + Rr = 0.$$

Если $R = r$, то треугольник ABC равносторонний, так что точка O может быть только его центром. Полученное нами уравнение также показывает, что ему удовлетворяет лишь одно значение x , а именно $x = \frac{r}{3}$. Итак, в случае равенства всех радиусов искомая величина найдена.

Если $R \neq r$, то (1) есть квадратное уравнение относительно $\sqrt{x}$. Из него легко найти, что

$$x = \frac{Rr(\sqrt{4R - r} \pm \sqrt{3r})^2}{4(R - r)^2}.$$

Заметим, что еще один случай, когда x единственно (и равно $\frac{r}{3}$), имеет место, если $R = \frac{r}{4}$; т.е. точки C и D совпадают. При этом искомая сфера может касаться плоскости α в одной из двух точек, симметричных относительно прямой AB . В случае, когда $R > \frac{r}{4}$, $R \neq r$ таких сфер две, причем радиусы их различны.

Ответ: если $R = r$ или $R = \frac{r}{4}$, то искомый радиус равен $\frac{r}{3}$. Если $R > \frac{r}{4}$, $R \neq r$, то искомых сфер две и их радиусы равны

$$\frac{Rr(\sqrt{4R - r} \pm \sqrt{3r})^2}{4(R - r)^2}.$$

При $R < \frac{r}{4}$ указанная в задаче конфигурация не может иметь места. ◀

► **Задача 3.** Даны четыре точки A, B, C, D , не лежащие в одной плоскости. Сфера касается прямых AB и AD в точке A , а прямых BC и CD в точке C . Найдите радиус сферы, если известно, что $AB = 1$, $BD = 2$ и углы ABC и BAD прямые.

Решение. Касательные, проведенные из одной точки к сфере, равны. Значит, $DA = DC$ и $BA = BC$. Следовательно, треугольники ABD и BCD равны по трем сторонам (рис. 3).

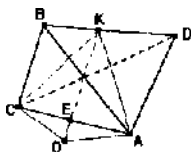


Рис. 3

Угол BAD прямой, так что высота AK треугольника BAD , опущенная из вершины A , попадает на сторону BD . Из равенства треугольников ABD и BCD следует, что $CK \perp BD$. Ясно, что плоскость ACK содержит центр O сферы.

В прямоугольном треугольнике ABD известны катет $AB = 1$ и гипотенуза $BD = 2$. Отсюда легко найти, что $AD = \sqrt{3}$, $AK = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Из теоремы Пифагора для треугольника ABC находим, что $AC = \sqrt{2}$ (ибо $AB = BC = 1$, а угол ABC по условию прямой). Кроме того, из $AE = EC$ следует, что $AE = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

В прямоугольном треугольнике OAK мы нашли катет AK и высоту AE . Осталась тривиальная планиметрическая задача нахождения катета OA , равного радиусу сферы.

Ответ: $\sqrt{\frac{3}{2}}$. ◀

- **Задача 4.** Сторона KL прямоугольника $KLMN$ служит высотой конуса с вершиной L . Радиус основания этого конуса в три раза длиннее отрезка NK . Шар касается плоскости прямоугольника $KLMN$ в точке M и имеет единственную общую точку с конусом. Длина отрезка KL равна 6. Найти радиус шара.

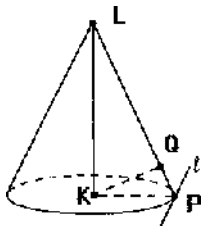


Рис. 4

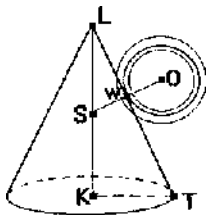


Рис. 5

Решение. Докажем для начала небольшое вспомогательное утверждение. Пусть LP — какая-нибудь образующая нашего конуса. Опустим из точки K на нее перпендикуляр KQ и проведем через LP плоскость π перпендикулярно KQ (рис. 4). Тогда плоскость π пересекает конус только по образующей LP . Докажем это.

Пусть l — прямая пересечения плоскости π с плоскостью основания конуса. Прямая KQ перпендикулярна l , будучи перпендикулярна к π . Кроме того, высота конуса KL перпендикулярна плоскости основания и, тем самым, перпендикулярна прямой l . Отсюда заключаем, что прямая l перпендикулярна плоскости KLP . Следовательно, $l \perp KP$, т.е. l — касательная к окружности основания конуса. Если бы плоскость π имела общие точки с конусом, отличные от точек образующей LP , то на ней целиком лежала бы еще одна образующая конуса, и прямая l

пересекала бы окружность основания в двух точках, что не имеет места. Мы доказали, что плоскость π пересекается с конусом только по образующей LP .

И еще одно вспомогательное утверждение. Пусть шар радиуса R с

центром O имеет лишь одну общую точку с боковой поверхностью конуса и расположен вне его (рис. 5). Проведем плоскость через ось конуса и центр шара. Тогда круг, получившийся в сечении шара, будет касаться стороны треугольника, получившейся в сечении конуса. Действительно, пусть S — точка на высоте конуса такая, что $OS \perp LT$. Обозначим через W точку пересечения прямых OS и LT .

Если $OW < R$, то шар пересекает образующую LT в двух точках в противоречие с тем, что он имеет лишь одну общую точку с конусом. Если $OW > R$, то проведем через LT плоскость π перпендикулярно OS . Из первого вспомогательного утверждения следует, что π пересекает конус лишь по образующей LT . Расстояние от точки O до плоскости π больше радиуса шара и, значит, он лежит целиком в полупространстве, не пересекающемся с конусом, — противоречие.

Вооружившись доказанными вспомогательными утверждениями, приступим к вычислению радиуса шара. Пусть O — его центр, B — точка касания с конусом. Согласно второму вспомогательному утверждению продолжение отрезка OB пересечет высоту конуса в некоторой точке A (рис. 6).

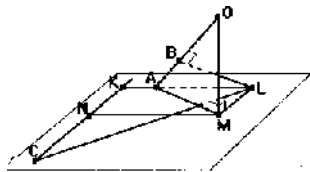


Рис. 6

Здесь LC — образующая конуса, лежащая в плоскости прямоугольника $KLMN$. Касательные, проведенные из одной точки к шару, равны, так что $LB = LM$. Обозначим угол KLC через α . Ясно, что тогда и угол BLA равен α . Далее,

$$LM = \frac{1}{3} \cdot KC = \frac{1}{3} \cdot KL \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha = LB.$$

Обозначим искомый радиус через r . Тогда $OB = OM = r$. Кроме того,

$$AL = \frac{BL}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot 2 \operatorname{tg} \alpha \quad \text{и} \quad AB = BL \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Применяя теорему Пифагора к треугольнику ALM , получаем, что

$$AM^2 = LM^2 + LA^2 = 4 \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} + 4 \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Наконец, применим теорему Пифагора к треугольнику AOM :

$$AM^2 + OM^2 = AO^2 \iff 4 \operatorname{tg}^3 \alpha \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) + r^2 = (r + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^2,$$

и после простых преобразований все члены, содержащие α , сокращаются и мы находим, что $r = 2$.

Ответ: 2 ◀

► **Задача 5.** Сфера с центром в точке O пересечена плоскостью π . Внутри сферы расположены три шара, два из которых одного радиуса, а третий —

меньшего радиуса. Каждый из шаров касается двух других шаров, плоскости π и сферы. Известно, что синус угла между плоскостью, проходящей через центры шаров, и плоскостью π равен $\frac{1}{\sqrt{5}}$, а косинус угла между радиусами меньшего и большего шаров, проведенными в точки касания со сферой, равен $4/5$. Расстояние от центра меньшего шара до точки O равно 15. Найдите расстояние от точки O до плоскости π , если известно, что оно больше 14.

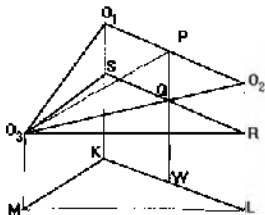


Рис. 7

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры равных шаров радиуса r_1 , а O_3 — центр меньшего шара радиуса r . Обозначим через K, L, M точки касания шаров с плоскостью π (рис. 7).

Проведем через точку O_3 плоскость, параллельную плоскости π , пересекающую отрезки O_1K и O_2L в точках S и R соответственно. Пусть W — основание перпендикуляра, опущенного из середины P отрезка O_1O_2 (совпадающей с точкой касания сфер радиуса r_1), а Q — точка пересечения этого перпендикуляра с плоскостью O_3SR .

Я утверждаю, что угол PO_3Q есть линейный угол двугранного угла между плоскостями O_3SR и $O_1O_2O_3$, который, очевидно, равен двугранному углу между плоскостями $O_1O_2O_3$ и π . В самом деле, прямые O_1O_2 и SR параллельны, так что линия пересечения плоскостей $O_1O_2O_3$ и O_3SR (на рисунке она не изображена) параллельна каждой из них. Прямая PQ перпендикулярна плоскости O_3SR , следовательно, плоскость O_3PQ перпендикулярна плоскости O_3SR . Ясно, что $PQ \perp O_1O_2$ и $O_3P \perp O_1O_2$ (как медиана в равнобедренном треугольнике $O_1O_2O_3$). Значит, O_1O_2 есть перпендикуляр к плоскости O_3PQ , и плоскости O_3PQ и $O_1O_2O_3$ перпендикулярны. Раз плоскость O_3PQ перпендикулярна к каждой из плоскостей $O_1O_2O_3$ и O_3SR , она высекает на них линейный угол двугранного угла между ними, что и требовалось.

Я утверждаю, что угол PO_3Q есть линейный угол двугранного угла между плоскостями O_3SR и $O_1O_2O_3$, который, очевидно, равен двугранному углу между плоскостями $O_1O_2O_3$ и π . В самом деле, прямые O_1O_2 и SR параллельны, так что линия пересечения плоскостей $O_1O_2O_3$ и O_3SR (на рисунке она не изображена) параллельна каждой из них. Прямая PQ перпендикулярна плоскости O_3SR , следовательно, плоскость O_3PQ перпендикулярна плоскости O_3SR . Ясно, что $PQ \perp O_1O_2$ и $O_3P \perp O_1O_2$ (как медиана в равнобедренном треугольнике $O_1O_2O_3$). Значит, O_1O_2 есть перпендикуляр к плоскости O_3PQ , и плоскости O_3PQ и $O_1O_2O_3$ перпендикулярны. Раз плоскость O_3PQ перпендикулярна к каждой из плоскостей $O_1O_2O_3$ и O_3SR , она высекает на них линейный угол двугранного угла между ними, что и требовалось.

По условию $\cos(\angle PO_3Q) = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Ввиду того, что

$$O_1P = r_1, O_3P = \sqrt{O_1O_3^2 - O_1P^2} = \sqrt{r^2 + 2rr_1} \text{ и } PQ = r_1 - r,$$

имеем

$$\frac{r_1 - r}{\sqrt{r^2 + 2rr_1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \iff r_1 = 2r.$$

Пусть R_0 — радиус сферы. Тогда $OO_1 = R_0 - 2r$, но $r = R_0 - 15$. Поэтому $OO_1 = 30 - R_0$. Ясно, что $O_1O_3 = r + r_1 = 3r = 3R_0 - 45$.

В треугольнике OO_1O_3 все стороны выражены через R_0 (напомню, что $OO_3 = 15$). Кроме того, угол O_3OO_1 равен углу между радиусами сфер с центрами в O_1 и O_3 , проведенными в точки касания со сферой радиуса R_0 (ведь радиусы вышеупомянутых сфер, проведенные в точки касания, есть

продолжения отрезков OO_1 и OO_3). Запишем теорему косинусов для треугольника OO_1O_3 , вспомнив, что по условию косинус угла O_1OO_3 равен $\frac{4}{5}$:

$$(3R_0 - 45)^2 = 15^2 + (30 - R_0)^2 - 2 \cdot 15 \cdot (30 - R_0) \cdot \frac{4}{5} \iff R_0 = 18.$$

Следовательно, $r = 3$, $r_1 = 6$.

Ясно, что точка O лежит в плоскости O_3PQ . При этом

$$O_1P = 6, OP = \sqrt{OO_1^2 - O_1P^2} = 6\sqrt{3}, O_3P = 3\sqrt{5}.$$

Значит, в треугольнике OO_3P известны все стороны. Согласно теореме косинусов,

$$\cos \gamma = \frac{O_3P^2 + O_3O^2 - OP^2}{2 \cdot O_3P \cdot OO_3} = \frac{9}{5\sqrt{5}}.$$

Здесь $\gamma = \angle OO_3P$. Угол PO_3Q обозначим через δ .

Для того, чтобы получить расстояние от точки O до плоскости π , надо то ли прибавить, то ли вычесть 3 из длины перпендикуляра OT , опущенного из точки O на прямую O_3Q (или вычесть из трех длину этого перпендикуляра) в зависимости от расположения точки O относительно прямой O_3Q (рис. 8 и 9).

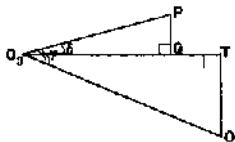


Рис. 8

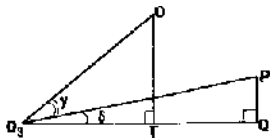


Рис. 9

Если мы имеем расположение, указанное на рисунке 8, то

$$OT = OO_3 \cdot \sin(\gamma - \delta) = \frac{12\sqrt{11} - 27}{5} < 3,$$

т.е. искомое расстояние равно $3 - OT < 14$ — противоречие.

Я опустил подробности вычисления величины $\sin(\gamma - \delta)$. Это делается просто раскрытием синуса разности. Нам известно, что $\sin \delta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, откуда $\cos \delta = \frac{2}{\sqrt{6}}$. Аналогично из равенства $\cos \gamma = \frac{9}{5\sqrt{5}}$ находим, что $\sin \gamma = \frac{2\sqrt{11}}{5\sqrt{5}}$.

Если ситуация такова, как на рис. 9, то

$$OT = OO_3 \sin(\gamma + \delta) = \frac{12\sqrt{11} + 27}{5},$$

откуда искомое расстояние равно $OT + 3 = \frac{12\sqrt{11} + 42}{5} > 14$, и наша задача решена.

Ответ: $\frac{12\sqrt{11} + 42}{5}$. ◀

- **Задача 6.** На основании прямого кругового конуса лежат три шара радиуса r . На них лежит четвертый шар того же радиуса. Каждый из этих шаров касается боковой поверхности конуса и трех других шаров. Найти высоту конуса.

Решение. Пусть A, B, C — центры шаров, лежащих на основании конуса и D — центр четвертого шара. Тогда основание конуса параллельно плоскости ABC и удалено от нее на расстояние r . Кроме того, тетраэдр $ABCD$ — правильный со стороной $2r$. Докажем, что высота конуса проходит через точку D и центр треугольника ABC . Высота тетраэдра $ABCD$, опущенная из точки D , проходит через центр ABC . Кроме того, из-за параллельности основания конуса и плоскости ABC высоты конуса и тетраэдра параллельны. Значит, достаточно доказать, что точка D лежит на высоте конуса.

Обозначим через K, L, M проекции точек A, B, C на основание конуса. Ясно, что KLM есть равносторонний треугольник со стороной $2r$. Проведем плоскость π через высоту SH конуса и точку A (рис. 10). Получившаяся окружность будет вписана в угол SPH . Пусть R — радиус основания конуса и $\angle SPH = \alpha$. Тогда $HK = R - r \cdot \operatorname{ctg}(\frac{1}{2}\alpha)$. Отсюда следует, что равносторонний треугольник KLM вписан в окружность, концентрическую с основанием конуса и имеющую радиус $R - r \cdot \operatorname{ctg}(\frac{1}{2}\alpha)$. Значит, центр KLM совпадает с центром основания. Но центр треугольника ABC проектируется в центр KLM и, следовательно, точка D проектируется в центр основания.

Пусть N и Q — точки касания с образующей SP сфер с центрами соответственно A и D . Из равенства радиусов всех сфер следует, что отрезок DK параллелен образующей SP . Значит, $\angle DAG = \alpha$ (G — центр треугольника ABC). Кроме того, DG есть высота правильного тетраэдра $ABCD$, т.е. $DG = 2r\sqrt{\frac{2}{3}}$. Отсюда $\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Теперь высота $SH = SD + DG + GH$ легко находится, поскольку угол SDQ равен α и

$$GH = r, \quad DG = 2r\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad SD = \frac{QD}{\cos \alpha} = \frac{r}{1/\sqrt{3}}.$$

Ответ: $r(\sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{\frac{2}{3}})$. ◀

- **Задача 7.** Две перпендикулярные образующие прямого кругового конуса делят окружность основания в отношении 1:2. Найти объем конуса, если его высота равна h .

Решение. Пусть S — вершина конуса, H — основание его высоты и SA, SB — перпендикулярные образующие, указанные в условии задачи. Из того, что дуга AB делит окружность в отношении 1:2, следует, что угол AHB

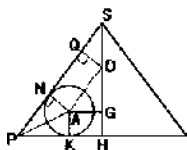


Рис. 10

делит в таком же отношении угол 360° . Значит, $\angle AHB = 120^\circ$. Пусть радиус основания конуса равен r . Тогда $SA = SB = \sqrt{r^2 + h^2}$ и, поскольку угол ASB прямой, имеем $AB = \sqrt{2r^2 + 2h^2}$.

С другой стороны, из треугольника AHB находим, что

$$AB = 2 \cdot HB \cdot \cos \angle HBA = r\sqrt{3}.$$

Приравниваем найденные значения для AB :

$$\sqrt{2h^2 + 2r^2} = r\sqrt{3} \iff r = h\sqrt{2}.$$

Дальше все совсем просто.

Ответ: $V = \frac{2}{3}\pi h^3$. ◀

- **Задача 8.** Даны три прямых круговых конуса с углом α ($\alpha < 2\pi/3$) в осевом сечении и радиусом основания, равным r . Основания этих конусов расположены в одной плоскости и попарно касаются друг друга внешним образом. Найти радиус сферы, касающейся всех трех конусов и плоскости, проходящей через их вершины.

Решение. Выберем один из конусов нашей конфигурации и проведем плоскость π через его высоту и центр искомого шара. Получившееся сечение изображено на рис. 11.

Пусть M — точка касания шара и конуса. Тогда большой круг, получившийся в сечении, касается боковой стороны треугольника в точке M . Кроме того, большой круг касается прямой пересечения плоскости π с плоскостью P , проходящей через вершины конусов. Докажем это. Пусть L — точка касания шара с плоскостью P . Радиус OL перпендикулярен плоскости P , так что он параллелен высоте SH конуса. Следовательно, прямая OL лежит в плоскости π . Значит, LS есть линия пересечения плоскостей π и P , являющаяся касательной к кругу ввиду того, что она перпендикулярна радиусу OL . Мы доказали, что сечение на рис. 11 изображено правильно.

Пусть R — радиус искомого шара. Продолжим отрезок OL до пересечения в точке K с плоскостью основания конуса. Ясно, что

$$(1) \quad KH = LS = SM = R \operatorname{ctg} \frac{\pi - \alpha}{4}$$

— мы воспользовались тем, что касательные SL и SM , проведенные из одной точки к сфере, равны и тем, что угол OSM равен $\frac{\pi - \alpha}{4}$.

Мы видим, что расстояние от точки K до центра основания конуса зависит лишь от R и α , т.е. одинаково для всех трех конусов. Значит, K есть центр описанной окружности для треугольника из центров оснований конусов. Сторона этого треугольника равна $2r$, так что

$$(2) \quad KH = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

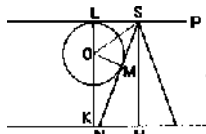


Рис. 11

На рисунке точка M изображена между точками S и N . Докажем, что она действительно расположена так:

$$SM < SN \iff \frac{2r}{\sqrt{3}} < \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}} \iff \sin \frac{\alpha}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \alpha < \frac{2}{3}\pi,$$

а последнее неравенство верно по условию.

Теперь приравняем значения KH , найденные в формулах (1) и (2):

$$\frac{2r}{\sqrt{3}} = R \operatorname{ctg} \frac{\pi - \alpha}{4} \iff R = \frac{2r}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi - \alpha}{4},$$

и задача полностью решена.

Ответ: $R = \frac{2r}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi - \alpha}{4}$. ◀

- **Задача 9.** Даны два прямых круговых конуса, имеющих общую вершину O и одинаковые длины высот. У каждого из этих конусов величина угла между высотой и образующей равна φ . Конусы расположены по одну сторону от плоскости α так, что только одна образующая каждого конуса (OA для одного конуса и OB для другого) принадлежит плоскости α . Известно, что угол между высотами конусов равен β , причем $\varphi + \beta < \pi/2$. Найти угол между образующей OA и плоскостью основания другого конуса.

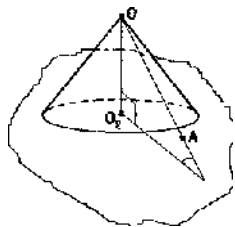


Рис. 12

Решение. Обозначим через a длины образующих каждого из конусов. Тогда $OA = OB = a$. Пусть также O_1 и O_2 — центры оснований конусов с образующими OA и OB соответственно. Поскольку любой плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов, для трехгранного угла с вершиной O и ребрами OO_1 , OO_2 и OA имеем

$$\angle AOO_2 < \angle AOO_1 + \angle O_1OO_2 = \varphi + \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда следует, что искомый угол равен $\frac{\pi}{2} - \angle AOO_2$ (рис. 12).

Плоскость основания конуса с образующей OA пересечет плоскость α по некоторой прямой l (рис. 13), имеющей единственную общую точку A с окружностью основания конуса. Поэтому отрезок O_1A — радиус основания конуса — перпендикулярен прямой l . Кроме того, прямая l перпендикулярна высоте конуса OO_1 , ибо она лежит в плоскости основания конуса. Значит, прямая l перпендикулярна плоскости OO_1A . По признаку перпендикулярности плоскостей заключаем теперь, что плоскость OO_1A перпендикулярна плоскости α . Аналогично доказывается, что плоскость OO_2B также перпендикулярна плоскости α .

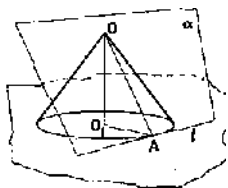


Рис. 13

Опустим из точек O_1 и O_2 перпендикуляры O_1C и O_1D соответственно на плоскость α (рис. 14). Из доказанного следует, что точка C лежит на отрезке AO , а точка D — на отрезке BO . Из прямоугольных треугольников OO_2B и OO_2D находим:

$$OO_2 = OB \cdot \cos \varphi = a \cos \varphi,$$

$$O_2D = OO_2 \cdot \sin \varphi = a \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$OD = OO_2 \cdot \cos \varphi = a \cos^2 \varphi.$$

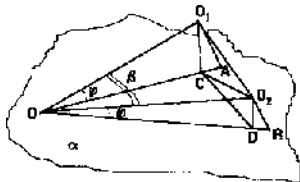


Рис. 14

Аналогично из прямоугольных треугольников OO_1A и OO_1C получаем:

$$OO_1 = a \cos \varphi, \quad O_1C = a \sin \varphi \cos \varphi, \quad OC = a \cos^2 \varphi.$$

Отрезки O_1C и O_2D параллельны как перпендикуляры к одной плоскости. Кроме того, приведенные формулы показывают, что $O_1C = O_2D = a \sin \varphi \cos \varphi$. Значит, O_1CDO_2 есть прямоугольник.

Из равнобедренного треугольника OO_1O_2 находим

$$O_1O_2 = 2 \cdot OO_2 \cdot \sin \frac{\beta}{2} = 2a \cos \varphi \sin \frac{\beta}{2}.$$

Треугольник O_1CO_2 прямоугольный, так что имеем по теореме Пифагора:

$$CO_2^2 = O_1C^2 + O_1O_2^2 = a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + 4a^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \frac{\beta}{2}.$$

И, наконец из теоремы косинусов для треугольника OO_2C находим, что

$$\cos \angle AOO_2 = \frac{OC^2 + OO_2^2 - CO_2^2}{2 \cdot OC \cdot OO_2} = \cos \varphi - \frac{2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}{\cos \varphi}.$$

Таким образом, искомый угол равен

$$\frac{\pi}{2} - \arccos \left(\cos \varphi - \frac{2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}{\cos \varphi} \right) = \arcsin \left(\cos \varphi - \frac{2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}{\cos \varphi} \right).$$

Ответ: $\arcsin \left(\cos \varphi - \frac{2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}{\cos \varphi} \right)$. ◀

- **Задача 10.** В плоскости P дан равнобедренный треугольник ABC такой, что $AB = BC = l$, $AC = 2a$. Шар радиуса r касается плоскости P в точке B . Две скрещивающиеся прямые проходят через точки A и C и касаются шара. Угол между каждой из этих прямых и плоскостью P равен α . Найти расстояние между этими прямыми.

Решение. Обозначим через A_1, C_1 точки касания шара с прямыми, проведенными через A и C соответственно. Пусть A_2 и C_2 — ортогональные проекции точек A_1 и C_1 на плоскость P (рис. 15).

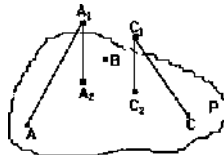


Рис. 15

Поскольку отрезки касательных к шару, проведенные из одной точки, равны, имеем

$$AA_1 = AB = l, CC_1 = CB = l.$$

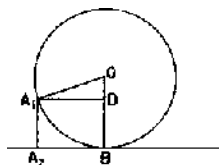


Рис. 16

Из прямоугольных треугольников CC_1C_2 и AA_1A_2 находим: $A_1A_2 = C_1C_2 = l \sin \alpha$.

Отсюда следует, что $A_1A_2 = C_1C_2$. Каждый из отрезков A_1A_2 и C_1C_2 перпендикулярен плоскости P , так что $A_1A_2C_2C_1$ — прямоугольник. Из тех же прямоугольных треугольников $AA_2 = CC_2 = l \cos \alpha$. Обозначим через O центр шара. Так как

B — точка касания шара с плоскостью P , радиус OB перпендикулярен P . Значит, $A_1A_2 \parallel OB$ и точки A_1A_2, O, B лежат в одной плоскости. На рисунке 16 изображено сечение этой плоскостью шара и плоскости P . Если D — основание перпендикуляра, опущенного из точки A_1 на прямую OB , то

$$A_2B = A_1D = \sqrt{A_1O^2 - OD^2} = \sqrt{r^2 - (r - l \sin \alpha)^2} = \sqrt{2rl \sin \alpha - l^2 \sin^2 \alpha}.$$

Аналогично устанавливается, что $C_2B = \sqrt{2rl \sin \alpha - l^2 \sin^2 \alpha}$. Значит, точки A_2 и C_2 лежат на окружности радиуса $\sqrt{2rl \sin \alpha - l^2 \sin^2 \alpha}$ с центром в точке B .

Выше мы доказали, что точка A_2 лежит на окружности радиуса $r \cos \alpha$ с центром в точке A и точка C_2 лежит на окружности того же радиуса с центром в точке C . Эти три окружности будем в дальнейшем для краткости называть: окружность B , окружность A и окружность C — в соответствии с названиями их центров.

Пусть E — середина стороны AC . Треугольник ABC равнобедренный, так что $BE \perp AC$. Окружность B симметрична относительно прямой BE , окружности A и C при этой симметрии переходят друг в друга. Отсюда следует, что точки пересечения окружностей B и A симметричны точкам пересечения окружностей B и C относительно прямой BE . Предположим, что точки A_2 и C_2 симметричны относительно прямой BE . Тогда $A_2C_2 \perp BE$ и, значит, $A_2C_2 \parallel AC$. Ввиду того, что $A_1A_2C_2C_1$ — прямоугольник, имеем $A_1C_1 \parallel A_2C_2$. Отсюда следует, что $A_1C_1 \parallel AC$. Но тогда прямые AA_1 и CC_1 лежат в одной плоскости, что противоречит условию задачи.

Итак, точки A_2 и C_2 не симметричны относительно прямой BE . На рисунках 17 и 18 изображены два возможных случая расположения точек A_2C_2 . При этом положения точек A_2 и C_2 обозначены соответственно A'_2, A''_2 и C'_2, C''_2 .

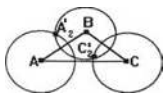


Рис. 17

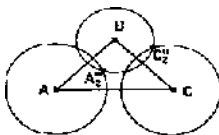


Рис. 18

Расстояния между прямыми AA_1 и CC_1 в этих двух случаях одинаковы. Действительно, плоскость OBE перпендикулярна плоскости P . Из доказанного выше следует, что точки A и C , A'_2 и C''_2 , A''_2 и C'_2 симметричны относительно плоскости OBE . Обозначим через A'_1, A''_1, C'_1, C''_1 точки, соответствующие точкам A_1 и C_1 в случаях, изображенных на рисунках 17 и 18.

Поскольку

$$A'_1A'_2 \parallel OBE, C''_1C''_2 \parallel A'_1A'_2, A'_1A'_2 = C''_1C''_2$$

и точки A'_2, C'_2 симметричны относительно плоскости OBE , точки A'_1 и C''_1 также симметричны относительно плоскости OBE . Аналогично точки A''_1 и C'_1 симметричны относительно этой же плоскости. Этим доказано, что прямые AA'_1 и CC''_1 , AA''_1 и CC'_1 симметричны относительно плоскости OBE . Но тогда, как и утверждалось выше, расстояние между AA'_1 и CC'_1 равно расстоянию между прямыми CC''_1 и AA''_1 . В дальнейшем для определенности будем считать, что точки A_2 и C_2 расположены так же, как точки A'_2 и C'_2 (рис. 17).

Проведем через точку A прямую, параллельную прямой CC_1 . Отложим на ней точку F так, чтобы отрезки AF и CC_1 были сонаправлены и равны (рис. 19). Ясно, что плоскость AA_1F параллельна прямой CC_1 . Следовательно, расстояние между прямыми AA_1 и CC_1 будет равно расстоянию между прямой CC_1 и плоскостью AA_1F или расстоянию от точки C_1 до плоскости AA_1F . Обозначим это расстояние через h_{C_1} . Если h_A — расстояние от точки A до плоскости FA_1C_1 , то

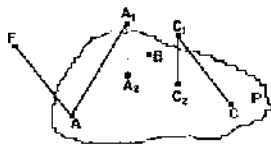


Рис. 19

$$V_{AA_1C_1F} = \frac{1}{3} \cdot h_{C_1} \cdot S_{AA_1F} = \frac{1}{3} \cdot h_A \cdot S_{FA_1C_1},$$

откуда находим, что

$$h_{C_1} = h_A \cdot \frac{S_{FA_1C_1}}{S_{AA_1F}}.$$

Остается найти h_A , $S_{FA_1C_1}$ и S_{AA_1F} . Четырехугольник ACC_1F — параллелограмм (ибо $AF = CC_1$ и $AF \parallel CC_1$). Следовательно, $CA \parallel C_1F$. Ранее было доказано, что $A_2C_2 \parallel A_1C_1$. По признаку параллельности двух плоскостей (ранее было доказано, что прямые AC и A_2C_2 не параллельны) заключаем, что плоскости ABC и FA_1C_1 параллельны. Но тогда

$$h_A = A_1A_2 = l \sin \alpha.$$

Найдем площадь треугольника FAA_1 . Он равнобедренный, так что, вычислив его высоту, опущенную из точки A , по теореме Пифагора, получим:

$$S_{FAA_1} = \frac{1}{2} \cdot FA_1 \cdot \sqrt{AA_1^2 - \frac{1}{4} \cdot FA_1^2}.$$

Обозначим через G проекцию точки F на плоскость ABC . Поскольку FGA_2A_1 — параллелограмм, имеем $FA_1 = GA_2$.

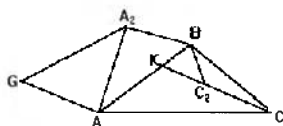


Рис. 20

Плоскости AFG и CC_1C_2 параллельны (т.к. $AF \parallel CC_1$, $FG \parallel C_1C_2$). Плоскость ABC пересекает их по прямым AG и CC_2 . Значит, $AG \parallel CC_2$ (рис. 20). В треугольниках AA_2B и CC_2B соответствующие стороны равновелики. Значит,

$$(3) \quad \angle A_2AB = \angle C_2CB, \quad \angle A_2BA = \angle C_2BC.$$

Обозначим через K точку пересечения прямых CC_2 и AB . Тогда

$$\angle GAA_2 + \angle A_2AB = \angle GAB = \angle AKC.$$

Последнее равенство верно, поскольку углы GAB и AKC есть внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых AG и CC_2 и секущей AK . Угол AKC есть внешний угол треугольника KBC , так что

$$\angle AKC = \angle ABC + \angle C_2CB.$$

Из двух последних равенств следует, что $\angle GAA_2 = \angle ABC$. Но тогда

$$GA_2 = 2 \cdot AA_2 \cdot \sin \left(\frac{1}{2} \angle GAA_2 \right) = 2 \cdot AA_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{AC}{AB} = 2a \cos \alpha$$

и

$$S_{AA_1F} = a \cos \alpha \sqrt{l^2 - a^2 \cos^2 \alpha}.$$

Для того, чтобы найти $S_{FA_1C_1}$, заметим, что в треугольниках FA_1C_1 и GA_2C_2 соответствующие стороны равновелики. Значит, $S_{FA_1C_1} = S_{GA_2C_2}$. Пользуясь вторым из равенств (3), имеем

$$\angle A_2BC_2 = \angle A_2BA + \angle ABC_2 = \angle C_2BC + \angle ABC_2 = \angle ABC.$$

Поскольку треугольники A_2BC_2 и ABC равнобедренные, из последнего равенства следует, что они подобны. Поэтому

$$\frac{A_2C_2}{AC} = \frac{A_2B}{AB} \Rightarrow A_2C_2 = \frac{AC \cdot A_2B}{AB} = \frac{2a}{l} \sqrt{2rl \sin \alpha - l^2 \sin^2 \alpha}.$$

Обозначим через h высоту треугольника GA_2C_2 , опущенную из вершины A_2 . Тогда в зависимости от того, куда попадет основание высоты h , будем иметь некий выбор знаков в следующем уравнении:

$$\begin{aligned} \pm \sqrt{GA_2^2 - h^2} \pm \sqrt{A_2C_2^2 - h^2} = GC_2 \quad \leftrightarrow \\ \pm \sqrt{\frac{8a^2r}{l} \sin \alpha - 4a^2 \sin^2 \alpha - h^2} = 2a \pm \sqrt{4a^2 \cos^2 \alpha - h^2}. \end{aligned}$$

После возведения в квадрат, приведения подобных членов, уединения радикала и повторного возведения в квадрат все плюс-минусы превратятся в плюсы, и мы получим, что вне зависимости от выбора знаков будет

$$h = \frac{2a}{l} \sqrt{2rl \sin \alpha - (r^2 + l^2) \sin^2 \alpha}.$$

Это дает

$$S_{GA_2C_2} = \frac{1}{2} \cdot GC_2 \cdot h = \frac{2a^2}{l} \sqrt{2rl \sin \alpha - (r^2 + l^2) \sin^2 \alpha}.$$

Теперь у нас есть все для нахождения h_{C_1} :

$$h_{C_1} = l \sin \alpha \cdot \frac{2a^2 \sqrt{2rl \sin \alpha - (r^2 + l^2) \sin^2 \alpha}}{la \cos \alpha \sqrt{l^2 - a^2 \cos^2 \alpha}},$$

и после тривиальных упрощений получаем

$$\text{Ответ: } \frac{2a \operatorname{tg} \alpha \sqrt{2rl \sin \alpha - (r^2 + l^2) \sin^2 \alpha}}{\sqrt{l^2 - a^2 \cos^2 \alpha}}. \quad \blacktriangleleft$$

Урок окончен. Оценка ставится стандартным образом.

Домашнее задание

- 1. Плоскость, проведенная через центр шара, вписанного в конус, параллельно плоскости основания конуса, делит объем конуса пополам. Найти угол при вершине осевого сечения конуса.
- 2. Дан прямой круговой конус. Проводят различные сечения плоскостью через его вершину. Оказалось, что площадь максимального сечения в два раза больше площади осевого. Найти угол в осевом сечении.
- 3. Две равные сферы касаются друг друга и граней двугранного угла. Третья сфера меньшего радиуса также касается граней этого двугранного угла и обеих данных сфер. Дано отношение m радиуса меньшей сферы к радиусу одной из равных сфер. Найти величину α двугранного угла. В каких пределах может изменяться m ?
- 4. Четыре равных шара радиуса r внешним образом касаются друг друга так, что каждый касается трех остальных. Найти радиус сферы, касающейся всех четырех шаров и содержащей их внутри себя.

- 5. Три шара радиуса r лежат на нижнем основании прямого кругового цилиндра, причем каждый из них касается двух других и боковой поверхности цилиндра. Четвертый шар лежит на этих трех шарах, касаясь боковой поверхности цилиндра и его верхнего основания. Определить высоту цилиндра.
- 6. Две равные сферы радиуса r касаются друг друга и граней двугранного угла, величина которого равна α . Найти радиус сферы, которая касается граней двугранного угла и обеих данных сфер.
- 7. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α , проведена плоскость. Площадь сечения относится к полной поверхности конуса как $2 : \pi$. Найти угол между образующей и высотой конуса.
- 8. Точка A лежит на окружности верхнего основания цилиндра, точка B — на окружности нижнего основания цилиндра. Прямая AB составляет с плоскостью основания угол α , а с плоскостью осевого сечения, проведенного через точку B , — угол β . Найти объем цилиндра, если $AB = l$.
- 9. Высота конуса равна H , угол между образующей и плоскостью основания равен α . В этот конус вписан шар. К окружности касания шаровой и конической поверхностей проведена касательная прямая, а через эту прямую проведена плоскость параллельно высоте конуса. Найти площадь сечения шара этой плоскостью.
- 10. В шар радиуса R вписаны два конуса с общим основанием; вершины конусов совпадают с противоположными концами диаметра шара. Шаровой сегмент, вмещающий меньший конус, имеет в осевом сечении дугу, равную α° . Найти расстояние между центрами шаров, вписанных в эти конусы.
- 11. Два конуса имеют общую высоту; их вершины лежат на противоположных концах этой высоты. Образующая одного конуса равна l и составляет с высотой угол α . Образующая другого конуса составляет с высотой угол β . Найти объем общей части обоих конусов.
- 12. В шаровой сектор радиуса R вписан шар. Найти радиус окружности касания поверхностей шара и сектора, если центральный угол в осевом сечении шарового сектора равен α .
- 13. Три прямых круговых конуса имеют общую вершину, и каждый из них касается внешним образом двух других. Вычислить углы между линиями касания боковых поверхностей этих конусов, если у первого конуса угол между осью и образующей равен α , у второго — β , а у третьего — γ .
- 14. Шар касается основания конуса в его центре. Поверхность шара пересекает боковую поверхность конуса по двум окружностям, одна из которых имеет радиус, равный радиусу шара, и лежит в плоскости, параллельной основанию конуса. Известно, что радиус основания конуса в $4/3$ раза больше радиуса шара. Найти отношение объема шара к объему

конуса.

- 15. Три одинаковых прямых круговых конуса, радиусы оснований которых равны r и составляют $3/4$ их высоты, расположены по одну сторону от плоскости P , а их основания лежат в этой плоскости. Окружности оснований каждого двух из этих конусов касаются. Найти радиус шара, лежащего между конусами и касающегося как плоскости P , так и всех трех конусов.
- 16. Дан трехгранный угол с вершиной O , у которого величина каждого из плоских углов равна φ . Плоскость α пересекает ребра этого трехгранного угла в точках A , B , C , причем $OA = OB$, а $OC < OA$. Известно, что величина двугранного угла между плоскостью α и гранью OAB равна β . Два шара расположены по разные стороны от плоскости α так, что каждый шар касается всех граней трехгранного угла и плоскости α . Найдите:
- 1) величину угла между прямой, проходящей через центры шаров, и плоскостью грани OAB ;
 - 2) отношение радиусов указанных шаров.
- 17. На плоскости α , проходящей через центр шара радиуса R , задана окружность с центром O_1 и радиусом r_1 , расположенная внутри шара. Все точки этой окружности соединены прямыми с точкой A , принадлежащей шару и удаленной от плоскости α на расстояние R . Множество отличных от A точек пересечения этих прямых с поверхностью шара есть окружность с центром O_2 и радиусом r_2 . Найдите расстояние от точки O_2 до плоскости α , если расстояние между точками A и O_1 равно a .
- 18. Конус вращается вокруг оси — прямой, перпендикулярной его высоте и проходящей через вершину. Найдите площадь сечения полученного тела вращения плоскостью, проходящей через ось вращения, если длина образующей конуса равна 5, а длина высоты равна 4.
- 19. В прямом круговом конусе расположены два шара единичного радиуса, центры которых находятся на оси симметрии конуса. Один из шаров касается боковой поверхности конуса, а другой — основания конуса и первого шара. Найти величину угла между образующей конуса и его основанием, при котором объем конуса наименьший.
- 20. На сфере радиуса 11 см расположены точки A , A_1 , B , B_1 , C и C_1 . Прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M , отстоящей от центра сферы на расстояние $\sqrt{59}$ см. Найти длину отрезка AA_1 , если известно, что длина отрезка BB_1 равна 18 см, а точка M делит отрезок CC_1 в отношении $(8 + \sqrt{2}) : (8 - \sqrt{2})$.

Урок 49

Векторы

Задачи, в которых применение векторного исчисления действительно необходимо, крайне редко встречаются на вступительных экзаменах. Но эта тематика все-таки входит в школьную программу, так что лучше ее освоить. Главная причина, по которой я прохожу векторное исчисление со своими учениками, состоит в том, что бывают (как планиметрические, так и стереометрические) задачи, которые громоздко решаются обычными методами, но при помощи векторного исчисления могут быть решены буквально в две строчки.

Хотя эта глава и посвящена стереометрии, на сегодняшнем уроке мы будем решать задачи и по стереометрии, и по планиметрии, поскольку в курсе планиметрии мы векторами не занимались. Цель урока — наработать чутье, говорящее, что для решения задачи, условие которой ничего не говорит о векторах, можно применить векторное исчисление.

Под вектором обычно понимается направленный отрезок (на плоскости или в пространстве). Слово «направленный» означает, что он отличается от обычного отрезка тем, что один его конец называется началом, а другой — концом (прошу прощения за выражение «конец называется концом», но видимо, никак иначе сказать нельзя). При этом для того, чтобы сразу видно было, где начало вектора, а где его конец, над ним рисуется стрелка. Например, запись $\overrightarrow{AB}$ означает, что начало вектора есть точка A , а его конец — точка B . Начало и конец вектора могут совпадать. В этом случае он называется нулевым вектором. Иногда стрелка будет стоять над одной буквой (например, $\vec{x}$). Это означает, что $\vec{x}$ есть некий вектор, конец и начало которого не указываются.

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, лежащие на разных прямых, называются равными, если $AB \parallel CD$ и $AC \parallel BD$. Если эти векторы лежат на одной прямой, то они равны в том и только том случае, когда $AB = CD$ и один из лучей, порожденных этими векторами, содержится в другом. При этом луч, порожденный вектором $\overrightarrow{AB}$, есть множество всех точек прямой AB , лежащих с той же стороны от A , что и точка B .

На интуитивном уровне можно понимать равенство векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ как возможность некоторым параллельным переносом перевести точку A в точку C и одновременно точку B в точку D . Кроме того мы не будем

различать равные векторы. Выгода от этого будет видна в дальнейшем.

Напомним еще, что умножение вектора $\vec{x}$ на число α дает вектор $\alpha \cdot \vec{x}$, параллельный $\vec{x}$, длина которого есть длина $\vec{x}$, умноженная на $|\alpha|$, одинаково направленный с $\vec{x}$ (в очевидном смысле), если $\alpha > 0$, и направленный противоположно, если $\alpha < 0$.

Легко проверяется, что если в пространстве (на плоскости) заданы вектор $\vec{x}$ и произвольная точка A , то существует такая точка B пространства (плоскости), что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{x}$ равны.

Векторы можно складывать друг с другом. Это можно делать, применяя любое из двух правил:

— правило треугольника: если даны векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$, то нужно выбрать точки A , B и C так, чтобы было $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, а $\overrightarrow{BC} = \vec{y}$ (убедитесь сами, что это всегда возможно). Тогда $\vec{x} + \vec{y}$ есть по определению вектор $\overrightarrow{AC}$.

— правило параллелограмма: нужно выбрать точки A, B, C и D так, чтобы было $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{y}$ и чтобы четырехугольник $ABDC$ был параллелограммом. Тогда $\overrightarrow{AD} = \vec{x} + \vec{y}$.

По определению $\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-1) \cdot \vec{y}$.

Последняя операция над векторами, которую мы должны уметь производить, это скалярное произведение. Если даны векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$, то их скалярным произведением $(\vec{x}, \vec{y})$ называется произведение длин этих векторов (обозначаемых далее $|\vec{x}|$ и $|\vec{y}|$) на косинус угла между ними. Ясно, что, в частности, $(\vec{x}, \vec{x}) = |\vec{x}|^2$.

Векторы в пространстве (на плоскости) можно задавать координатами. Делается это так. Пусть $\vec{x}$ — произвольный вектор пространства (плоскости), в котором (на которой) задана координатная система $Oxyz$ (соответственно Oxy). Выберем такую точку A пространства (плоскости), что $\overrightarrow{OA} = \vec{x}$. Тогда координаты точки A есть по определению координаты вектора $\vec{x}$. При этом будет употребляться запись $\vec{x} = \{a, b, c\}$, где a, b, c — координаты точки A .

Если $\vec{x} = \{a_1, b_1, c_1\}$, $\vec{y} = \{a_2, b_2, c_2\}$ и α — произвольное число, то

$$\vec{x} + \vec{y} = \{a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2\}, \quad \vec{x} - \vec{y} = \{a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2\} \quad \text{и}$$

$$\alpha \cdot \vec{x} = \{\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot b_1, \alpha \cdot c_1\}.$$

Если даны точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их координаты.

Если даны векторы $\vec{x} = \{a_1, b_1, c_1\}$ и $\vec{y} = \{a_2, b_2, c_2\}$, то их скалярное произведение вычисляется по формуле

$$(\vec{x}, \vec{y}) = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2.$$

В частности, $|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$. Кроме того, из определения скалярного произведения следует, что угол φ между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ определяется из соотношения

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

В частности, векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$.

Единичный (т.е. единичной длины) вектор $\vec{x}_0$, сонаправленный с вектором $\vec{x}$ находится по формуле

$$\vec{x}_0 = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}.$$

Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они параллельны. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору. Ненулевые векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны, если и только если найдется такое число α , что $\alpha \cdot \vec{x} = \vec{y}$.

- **Задача 1.** На координатной плоскости Oxy даны три последовательные вершины параллелограмма $ABCD$: $A(0, 1), B(1, 2), C(2, 7)$. Найти длины диагоналей AC и BD .

Решение. В принципе, можно нарисовать три данные вершины, сообразить, где находится четвертая и найти диагонали по формуле расстояния между точками. Я покажу, как можно решить задачу чисто аналитически.

Пусть $D(x, y)$ — последняя вершина параллелограмма. Векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ равны, так что можно приравнять их координаты:

$$x - 0 = 2 - 1, \quad y - 1 = 7 - 2 \iff x = 1, \quad y = 6.$$

Теперь можно применять формулу расстояния между точками, или формулу для длины вектора:

$$AC = \sqrt{(2 - 0)^2 + (7 - 1)^2} = 2\sqrt{10}, \quad BD = \sqrt{(1 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = 4.$$

Ответ: $AC = 2\sqrt{10}$, $BD = 4$. ◀

- **Задача 2.** Доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Решение. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, и $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Тогда $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 &= (\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{b} - \vec{a}, \vec{b} - \vec{a})^2 = \\ &= |\vec{a}|^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = \\ &= 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) = 2(AB^2 + AD^2) = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

- **Задача 3.** При каких значениях x и y векторы с пространственными координатами $\{x, -2, 5\}$ и $\{1, y, -4\}$ коллинеарны?

Решение. Ни один из векторов в условии не может быть нулевым ни при каких x и y . Поэтому задача эквивалентна следующей: при каких x и y найдется такое число α , что

$$\alpha \cdot \{x, -2, 5\} = \{1, y, -4\} \iff \{\alpha x, -2\alpha, 5\alpha\} = \{1, y, -4\} ?$$

Векторы равны тогда и только тогда, когда равны их координаты. Приравнивая их, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \alpha x = 1, \\ -2\alpha = y, \\ 5\alpha = -4, \end{cases}$$

из которой находим, что $\alpha = -\frac{4}{5}, x = -\frac{5}{4}, y = \frac{8}{5}$.

Ответ: при $x = -\frac{5}{4}, y = \frac{8}{5}$. ◀

► **Задача 4.** Пусть $ABCD$ — тетраэдр, причем даны длины его ребер:

$$AB = c, AC = b, BC = a, AD = a_1, BD = b_1, CD = c_1.$$

Найти угол между прямыми AB и CD .

Решение. Пусть $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{z} = \overrightarrow{AD}$. Тогда, очевидно, $\overrightarrow{CD} = \vec{z} - \vec{y}$.

Пусть φ — угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Тогда

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})}{AB \cdot CD} = \frac{(\vec{x}, \vec{z} - \vec{y})}{cc_1} = \frac{1}{cc_1} ((\vec{x}, \vec{z}) - (\vec{x}, \vec{y})) = \\ &= \frac{1}{cc_1} (ca_1 \cos \angle DAB - cb \cos \angle BAC). \end{aligned}$$

Из теоремы косинусов следует, что

$$ca_1 \cos \angle DAB = \frac{1}{2}(c^2 + a_1^2 - b_1^2) \quad \text{и} \quad cb \cos \angle BAC = \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2).$$

Теперь лишь осталось подставить найденные значения в выражение для $\cos \varphi$.

$$\text{Ответ: } \varphi = \arccos \left(\frac{a^2 + a_1^2 - b^2 - b_1^2}{2cc_1} \right). \quad \blacktriangleleft$$

► **Задача 5.** Даны вершины тетраэдра $A(3, -2, 1)$, $B(3, 1, 5)$, $C(3, 2, 4)$ и $D(0, 0, 0)$. Медианы грани BDC пересекаются в точке M . Найти длину отрезка AM .

Решение. Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Тогда $\overrightarrow{CD} = \vec{d} - \vec{c}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{d} - \vec{b}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{b} - \vec{c}$. Пусть N — середина стороны BD . Тогда

$$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\vec{d} - \vec{b}).$$

Значит,

$$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN} = \vec{b} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{d} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}.$$

Мы знаем, что точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины. Отсюда следует, что

$$\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CN} = -\frac{2}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{d}.$$

Наконец,

$$(1) \quad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}(\vec{c} + \vec{b} + \vec{d}).$$

Легко видеть, что

$$\vec{b} = \{0, 3, 4\}, \vec{c} = \{0, 4, 3\}, \vec{d} = \{-3, 2, -1\}.$$

Подставив найденные значения векторов в формулу (1), найдем, что $\overrightarrow{AM} = \{-1, 3, 2\}$; нам осталось найти только длину вектора $\overrightarrow{AM}$ (см. формулы, приведенные во вступительной части этого урока).

Ответ: $AM = \sqrt{14}$. ◀

- **Задача 6.** Прямая l в пространстве проходит через точки $A(0, 2, 1)$ и $B(1, 0, 0)$. Найти расстояние от точки $C(0, 0, 0)$ до этой прямой.

Решение. Достаточно найти точку $D(x, y, z)$, лежащую на прямой l , такую, что $CD \perp l$. Тогда расстояние от точки C до прямой l найдется как длина отрезка CD . Ясно, что вектор $\overrightarrow{BA} = \{-1, 2, 1\}$ параллелен прямой l . Но и вектор $\overrightarrow{DB} = \{x - 1, y, z\}$ параллелен этой прямой. Следовательно, векторы $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{BA}$ параллельны. Значит, найдется некоторое число t (модуль которого равен $\frac{BD}{AB}$; а знак плюс выбирается, если $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{BA}$ сонаправлены — в противном случае выбирается знак минус), для которого

$$\overrightarrow{DB} = t \cdot \overrightarrow{BA} \iff \{x - 1, y, z\} = \{-t, 2t, t\},$$

откуда

$$\begin{cases} x - 1 = -t, \\ y = 2t, \\ z = t. \end{cases}$$

Исключая из этой системы t , получим, что $\begin{cases} y=2z \\ 1-x=z \end{cases}$. Третье уравнение получим из условия перпендикулярности векторов $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB}$:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0 \iff 1 \cdot x + (-2) \cdot y + (-1) \cdot z = 0.$$

Имеем систему $\begin{cases} y=2z \\ 1-x=z \\ x=2y+z \end{cases}$, решая которую, находим, что $x = \frac{5}{6}, y = \frac{1}{3}$ и $z = \frac{1}{6}$. Значит, искомое расстояние равно $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\sqrt{30}}{6}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{30}}{6}$. ◀

► **Задача 7.** Плоскость π проходит через точки $A(0, 0, 1)$, $B(0, 1, -1)$ и $C(1, 0, -1)$. Найти расстояние от точки $D(1, 1, 1)$ до плоскости π .

Решение. Убедимся сначала, что плоскость π корректно определена, т.е. что точки A , B и C не лежат на одной прямой. Достаточно доказать, что угол φ между векторами $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{q} = \overrightarrow{AC}$ не равен нулю, т.е. что

$$\cos \varphi \neq 1 \iff \frac{(\vec{p}, \vec{q})}{|\vec{p}||\vec{q}|} \neq 1.$$

Но $\vec{p} = \{0, 1, -2\}$ и $\vec{q} = \{1, 0, -2\}$, так что

$$(\vec{p}, \vec{q}) = 4 \neq |\vec{p}||\vec{q}| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5,$$

что и требовалось доказать.

Найдем проекцию точки D на плоскость π . Пусть это будет точка M с координатами (x, y, z) . Для того, чтобы M была проекцией точки D , необходимо и достаточно, чтобы было $DM \perp AB$ и $DM \perp AC$. Запишем это в виде векторных равенств:

$$(2) \quad \begin{cases} (\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{AB}) = 0, \\ (\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{AC}) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1) + (-2) \cdot (z-1) = 0, \\ 1 \cdot (x-1) + 0 \cdot (y-1) + (-2) \cdot (z-1) = 0. \end{cases}$$

Точка M лежит в плоскости ABC , поэтому вектор AM линейно выражается через векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, т.е. найдутся такие числа α и β , что $\alpha \cdot \vec{p} + \beta \cdot \vec{q} = \overrightarrow{AM}$. Запишем последнее равенство в координатах:

$$\begin{aligned} \alpha\{0, 1, -2\} + \beta\{1, 0, -2\} &= \{x, y, z-1\} \iff \\ \iff \{0, \alpha, -2\alpha\} + \{\beta, 0, -2\beta\} &= \{x, y, z-1\} \iff \\ \iff \{\beta, \alpha, -2\alpha-2\beta\} &= \{x, y, z-1\} \iff \begin{cases} \beta = x, \\ \alpha = y, \\ -2\alpha-2\beta = z-1. \end{cases} \end{aligned}$$

В последней системе, подставив значения α и β из первых двух уравнений в третье, получим $-2x - 2y = z - 1$.

Объединяя это уравнение с системой (2), получим систему

$$\begin{cases} y - 2z = -1, \\ x - 2z = -1, \\ -2x - 2y = z - 1, \end{cases}$$

из которой находим, что $x = y = \frac{1}{9}$, $z = \frac{5}{9}$. Теперь уже легко найти расстояние между точками D и M .

Ответ: $\frac{4}{3}$. ◀

► **Задача 8.** Для точек A, B, C и D из предыдущей задачи найти точку, симметричную точке D относительно плоскости ABC .

Решение. Пусть $E(x, y, z)$ — искомая точка. Воспользуемся найденной в предыдущей задаче точкой $M(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{5}{9})$, которая является проекцией D на плоскость ABC . По определению симметрии относительно плоскости точка M есть середина отрезка DE . Пусть O — начало координат. Тогда

$$\vec{OE} = \vec{OD} + \vec{DE} \quad \text{и} \quad \vec{DE} = 2 \cdot \vec{DM},$$

откуда $\vec{OE} = \vec{OD} + 2 \cdot \vec{DM} = \{-\frac{7}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{1}{9}\}$. Поскольку координаты вектора с началом в точке O совпадают с координатами конца этого вектора, имеем $E = (-\frac{7}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{1}{9})$.

Ответ: $(-\frac{7}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{1}{9})$. ◀

► **Задача 9.** Дан куб с вершинами

$$A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(0, 1, 0), D(1, 1, 0),$$

$$A_1(0, 0, 1), B_1(1, 0, 1), C_1(0, 1, 1), D_1(1, 1, 1).$$

Доказать, что сумма квадратов проекций всех его ребер на произвольную прямую не зависит от этой прямой, и найти указанную сумму.

Решение. Ясно, что длина проекции любого отрезка на прямую есть его длина, умноженная на косинус угла между отрезком и этой прямой. Отсюда следует, что заданная сумма не меняется при параллельном переносе прямой. Значит, нашу сумму квадратов можно искать для прямой l , проходящей через начало координат.

Ребра AB, A_1B_1, CD, C_1D_1 все равны и параллельны. Значит, их проекции на прямую l равны. То же самое можно сказать о ребрах AC, A_1C_1, BD, B_1D_1 и о ребрах AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 . Следовательно, искомая сумма квадратов равна

$$4 \cdot ((\text{проекция } AB)^2 + (\text{проекция } AC)^2 + (\text{проекция } AA_1)^2).$$

Возьмем какую-нибудь точку L на прямой l такую, что $AL = 1$ (напомним, что прямая l проходит через начало координат, совпадающее с точкой A).

Рассмотрим векторы

$$\vec{e}_1 = \vec{AB}, \quad \vec{e}_2 = \vec{AC}, \quad \vec{e}_3 = \vec{AA_1}, \quad \vec{p} = \vec{AL}.$$

Их длины равны единице. Если $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ есть соответственно углы между векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и вектором $\vec{p}$, то

$$(\vec{e}_1, \vec{p}) = \cos \varphi_1, \quad (\vec{e}_2, \vec{p}) = \cos \varphi_2, \quad (\vec{e}_3, \vec{p}) = \cos \varphi_3,$$

т.е. выписанные скалярные произведения равны соответствующим проекциям отрезков. Пусть $\vec{p} = \{x, y, z\}$. Тогда

$$(\vec{e}_1, \vec{p}) = 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = x.$$

Аналогично $(\vec{e}_2, \vec{p}) = y$ и $(\vec{e}_3, \vec{p}) = z$. Мы уже отметили, что искомая сумма равна

$$4((\vec{e}_1, \vec{p})^2 + (\vec{e}_2, \vec{p})^2 + (\vec{e}_3, \vec{p})^2) = 4(x^2 + y^2 + z^2) = 4,$$

так как $x^2 + y^2 + z^2 = |\vec{p}|^2 = 1$ согласно нашему выбору $\vec{p}$. Задача полностью решена.

Ответ: 4. ◀

► **Задача 10.** Острый угол между скрещивающимися прямыми AB и CD равен $\arccos \frac{\sqrt{35}}{10}$. Точки E и F являются серединами отрезков AB и CD соответственно, а прямая EF перпендикулярна прямым AB и CD . Найдите угол ACB , если известно, что $AB = 2\sqrt{5}$, $CD = 2\sqrt{7}$, $EF = \sqrt{13}$.

Решение. Пусть $\vec{CF} = \vec{FD} = \vec{x}$, $\vec{FE} = \vec{y}$ и $\vec{BE} = \vec{EA} = \vec{z}$. Тогда

$$(\vec{x}, \vec{x}) = CF^2 = 7, \quad (\vec{y}, \vec{y}) = EF^2 = 13 \quad \text{и} \quad (\vec{z}, \vec{z}) = BE^2 = 5.$$

Кроме того, $\vec{x} \perp \vec{y} \perp \vec{z}$, так что $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{z}) = 0$. Угол φ между векторами $\vec{x}$ и $\vec{z}$ может равняться либо $\arccos \frac{\sqrt{35}}{10}$, либо $\pi - \arccos \frac{\sqrt{35}}{10}$. В зависимости от этого $\cos \varphi = \frac{\sqrt{35}}{10}$ или $\cos \varphi = -\frac{\sqrt{35}}{10}$ и $(\vec{x}, \vec{z}) = \pm 3,5$.

Далее,

$$\vec{CA} = \vec{CF} + \vec{FE} + \vec{EA} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} \quad \text{и}$$

$$\vec{CB} = \vec{CF} + \vec{FE} + \vec{EB} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{z}.$$

Искомый угол $\alpha = \angle ACB$ найдем из равенства

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{CA}, \vec{CB})}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}|} = \frac{(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}, \vec{x} + \vec{y} - \vec{z})}{|\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}| |\vec{x} + \vec{y} - \vec{z}|}.$$

Числитель и знаменатель получившейся дроби вычислим по отдельности:

$$(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}, \vec{x} + \vec{y} - \vec{z}) = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 + 2(\vec{x}, \vec{y}) - |\vec{z}|^2 = 7 + 13 + 0 - 5 = 15.$$

Найдем теперь длину s вектора $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$:

$$\begin{aligned} s^2 &= |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 + |\vec{z}|^2 + 2(\vec{x}, \vec{y}) + 2(\vec{x}, \vec{z}) + 2(\vec{y}, \vec{z}) = \\ &= |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 + |\vec{z}|^2 + 2(\vec{x}, \vec{z}) = 7 + 13 + 5 \pm 7 = 25 \pm 7. \end{aligned}$$

Аналогичным образом для длины t вектора $\vec{x} + \vec{y} - \vec{z}$ имеем $t^2 = 25 \mp 7$. Следовательно,

$$s \cdot t = \sqrt{25 \pm 7} \cdot \sqrt{25 \mp 7} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24.$$

Значит, $\cos \alpha = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$, что и требовалось.

Ответ: $\angle ACB = \arccos \frac{5}{8}$. ◀

Как обычно, после десятой задачи я заканчиваю урок. Оцените вашу работу на нем по стандарту.

Домашнее задание

- 1. Даны координаты вершин четырехугольника на плоскости Oxy :

$$A(2, -2), B(-3, 1), C(7, 7), D(7, 1).$$

Доказать, что $ABCD$ — трапеция и найти длину ее средней линии.

- 2. Даны координаты двух вершин треугольника $A(2, -1)$, $B(-3, 5)$ и координаты точки пересечения медиан этого треугольника $M(1, 1)$. Найти координаты вершины C .
- 3. В пространстве даны четыре произвольные точки A , B , C , D . Доказать, что

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) = 0.$$

- 4. Диагональ AC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перпендикулярна плоскости $AB_1 D$. Доказать, что этот параллелепипед является кубом.

- 5. Пусть для пространственных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет место равенство $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$. Доказать, что тогда $\vec{a} \perp \vec{b}$.

- 6. Доказать, что для любых пространственных векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ имеет место неравенство

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \geq |\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} + \vec{c}| + |\vec{b} + \vec{c}|.$$

- 7. Дан куб с вершинами

$$A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(0, 1, 0), D(1, 1, 0),$$

$$A_1(0, 0, 1), B_1(1, 0, 1), C_1(0, 1, 1), D_1(1, 1, 1).$$

Доказать, что сумма квадратов длин проекций всех его ребер на произвольную плоскость не зависит от этой плоскости, и найти указанную сумму.

- 8. Лежит ли точка $M(1, 1, 1)$ на плоскости, проходящей через точки

$$A(2, 0, 4), B(-3, -27, 5) \quad \text{и} \quad C(4, -2, 10)?$$

- 9. Даны векторы $\vec{a} = \{2, -3, 5\}$, $\vec{b} = \{-1, 1, -3\}$ и $\vec{c} = \{3, 7, 1\}$. Найти вектор $\vec{p}$ такой, что

$$(\vec{p}, \vec{a}) = 12, \quad (\vec{p}, \vec{b}) = -6 \quad \text{и} \quad \vec{p} \perp \vec{c}.$$

- 10. Доказать, что в треугольнике ABC медианы m_b и m_a перпендикулярны тогда и только тогда, когда $a^2 + b^2 = 5c^2$.

- 11. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{DA_1}$ и $\overrightarrow{DM}$, где M — середина ребра CC_1 .

- 12. Найти угол между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ и

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 + |2\vec{a} - \vec{b}|^2 = 56.$$

- 13. В пространстве дана точка $A(1, 2, 1)$ и прямая l , проходящая через точки $B(0, 0, 1)$ и $C(1, 1, 0)$. Найти координаты точки A' , симметричной точке A относительно прямой l .
- 14. Назовем медианой тетраэдра отрезок, соединяющий его вершину с точкой пересечения медиан противоположной ей грани. Доказать, что все четыре медианы произвольного тетраэдра пересекаются в одной точке. В каком отношении эта точка делит каждую из медиан?
- 15. Дан тетраэдр $ABCD$ и точка M в плоскости его грани ABC . Числа α, β и γ выбраны так, что

$$\overrightarrow{DM} = \alpha \cdot \overrightarrow{DA} + \beta \cdot \overrightarrow{DB} + \gamma \cdot \overrightarrow{DC}.$$

Доказать, что $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

- 16. Плоскость π проходит через точки $A(-1, 0, 0)$, $B(0, -1, 0)$ и $C(0, 0, -1)$; а плоскость α — через точки $P(2, 1, 2)$, $Q(0, 1, 4)$ и $R(4, 1, 0)$. Найти острый угол между плоскостями π и α .
- 17. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (вершины основания $ABCD$ расположены по ходу часовой стрелки). Точки K и H есть середины соответственно ребер AA_1 и AD . Точка M — центр грани $CC_1 D_1 D$. Доказать, что прямые KM и $B_1 H$ перпендикулярны.
- 18. Для плоскостей π и α из задачи 16 найти угол, который прямая их пересечения образует с осью Ox .
- 19. В пространстве даны точки $A(11, -4, 8)$, $B(6, -3, 4)$, $C(0, -1, 0)$ и $D(-1, 0, 4)$. Пересекаются ли прямые AB и CD ? Если да, то найти точку их пересечения.
- 20. Пересекаются ли плоскость π из задачи 16 и прямая AB из задачи 19? Если да, то найти точку их пересечения.

Урок 50

Геометрические места точек

Геометрическим местом точек с данным свойством называется множество всех точек пространства, обладающих этим свойством.

В решении задачи на ГМТ должны присутствовать три момента:

- 1) предъявлено множество P , про которое мы утверждаем, что оно — искомое;
- 2) доказано, что каждая точка множества P обладает заданным свойством;
- 3) доказано, что нет других точек, обладающих данным свойством.

Важнейшими ГМТ в пространстве являются следующие:

- а) ГМТ, удаленных на расстояние $R > 0$ от данной точки O , есть (по определению) сфера радиуса R с центром в точке O .
- б) ГМТ, равноудаленных от двух различных точек A и B , есть плоскость P , перпендикулярная отрезку AB и проходящая через его середину.
- в) ГМТ, равноудаленных от трех не лежащих на одной прямой точек A, B и C , есть прямая, перпендикулярная плоскости ABC и проходящая через центр окружности, описанной около треугольника ABC .
- г) ГМТ, равноудаленных от сторон двугранного угла, есть его биссектральная плоскость.
- д) Геометрическим местом точек $M(x, y, z)$ пространства с системой координат $Oxyz$ таких, что $Ax + By + Cz + D = 0$ (A, B, C, D — числа такие, что $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$), является плоскость, перпендикулярная вектору $n\{A, B, C\}$.
- е) Уравнение $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$, где $R > 0$, задает сферу радиуса R с центром в точке $O(a, b, c)$.

Если мы знаем ГМТ M_1 , определяемое свойством P_1 , и ГМТ M_2 , определяемое свойством P_2 , то ГМТ, для которых одновременно выполняются свойства P_1 и P_2 , есть пересечение множеств M_1 и M_2 .

Как правило, можно понять, как устроено искомое ГМТ, если разбить данное свойство на более простые, найти соответствующие более простые ГМТ и из них построить искомое. Иногда удается ввести систему координат и записать данное свойство в виде формулы $f(x, y, z) = 0$. Иногда нужно угадать хорошую геометрическую закономерность, присутствующую в данном свойстве.

- **Задача 1.** Найти геометрическое место середин отрезков, соединяющих точку вне сферы с точками этой сферы.

Решение. Пусть A — данная точка, O — центр сферы, R — ее радиус и $AO = d > R$. Рассмотрим преобразование φ гомотетии пространства с центром в точке A и коэффициентом $\frac{1}{2}$. Это преобразование действует так: для произвольной точки $M \neq A$ точка $\varphi(M)$ есть середина отрезка AM . Ну и, конечно, $\varphi(A) = A$. Образ точки O при этом преобразовании есть точка O_1 — середина отрезка AO . Докажем, что сфера радиуса $\frac{R}{2}$ с центром в точке O_1 есть искомое ГМТ.

Пусть M — произвольная точка сферы с центром в точке O и $M_1 = \varphi(M)$ — середина отрезка AM . Тогда в треугольнике AOM отрезок O_1M_1 есть средняя линия, так что $O_1M_1 = \frac{1}{2}OM = \frac{1}{2}R$, и мы доказали, что каждая точка нашего ГМТ лежит на сфере радиуса $\frac{R}{2}$ с центром в точке O_1 .

Обратно, пусть M_1 — произвольная точка с $O_1M_1 = \frac{R}{2}$. В плоскости AOM_1 , содержащей точку M_1 , проведем через точку O прямую, параллельную O_1M_1 . Она пересечет прямую AM_1 в точке M . По теореме о средней

линии треугольника снова имеем $OM = 2 \cdot O_1M_1 = R$, и точка M_1 есть середина отрезка AM , т.е. принадлежит указанному ГМТ.

Ответ: сфера радиуса $\frac{R}{2}$ с центром в середине отрезка AO , где R — радиус исходной сферы, O — ее центр, а A — заданная точка вне сферы. ◀

► **Задача 2.** Дана сфера. Найти геометрическое место пересечения медиан тетраэдров, вписанных в эту сферу.

Решение. Напомню, что медианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий его вершину с точкой пересечения медиан противоположной грани. Все четыре медианы любого тетраэдра пересекаются в одной точке — это домашняя задача 14 предыдущего урока. Докажем, что эти точки пересечения медиан заполняют всю внутренность шара, т.е. наше ГМТ состоит из точек шара, не лежащих на сфере.

Совершенно очевидно, что все наше ГМТ лежит во внутренности S шара. Пусть M — произвольная точка из S . Докажем, что найдется такой тетраэдр, вписанный в сферу, что M будет точкой пересечения его медиан. Пусть O — центр сферы и R — ее радиус. Пусть $OM = d < R$. Прямая OM пересекает сферу в двух точках. Обозначим через D ту из них, для которой $DM \leq R$ (если $M = O$, то таких точек две и можно выбрать любую из них). Продолжим отрезок DM за точку M и отложим на этом продолжении точку P такую, что $MP = \frac{DM}{3}$. Ясно, что точка P будет лежать внутри сферы. Проведем через нее плоскость перпендикулярно прямой OM . На получившейся в сечении окружности возьмем произвольно три точки A , B и C так, чтобы треугольник ABC был равносторонним.

Тетраэдр $ABCD$ вписан в сферу. Я утверждаю, что точка пересечения его медиан совпадает с точкой M .

Действительно, P — точка пересечения медиан равностороннего треугольника ABC , так что DP — медиана тетраэдра $ABCD$. По построению точки P имеем $DM : MP = 3 : 1$. Но именно в таком отношении точка пересечения медиан делит каждую из медиан, считая от вершины. (Это вы должны знать, если вы решили домашнюю задачу 14 урока 49, поэтому я не буду доказывать высказанное здесь утверждение). Значит, M есть точка пересечения медиан тетраэдра $ABCD$, и все доказано.

Ответ: искомое ГМТ есть внутренность данного шара. ◀

► **Задача 3.** Найти геометрическое место середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых.

Решение. Пусть даны две скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 . Выберем на них точки A и B соответственно так, чтобы отрезок AB был их общим перпендикуляром. Пусть K — середина AB . Проведем через точку K плоскость, перпендикулярную отрезку AB (далее будем для краткости называть ее серединной плоскостью).

Я утверждаю, что срединная плоскость и есть искомое ГМТ.

Докажем сначала, что каждая точка M искомого ГМТ принадлежит срединной плоскости. Найдутся точки P и Q на прямых l_1 и l_2 соответственно такие, что M есть середина отрезка PQ . Пусть α и π — плоскости, параллельные срединной и проходящие соответственно через прямые l_1 и l_2 . Опустим из точки M перпендикуляры MT и MS на плоскости α и π соответственно. Плоскости α и π параллельны, так что точки M, T и S лежат на одной прямой. Проведем плоскость δ через прямые TS и PQ . В ней лежат прямоугольные треугольники MTP и MSQ . Ясно, что эти треугольники равны по острому углу и гипотенузе. Значит, $MT = MS$. Итак, точка M находится на равных расстояниях от плоскостей α и π . Это доказывает, что M принадлежит срединной плоскости. Мы доказали, что искомое ГМТ есть подмножество срединной плоскости

Докажем, что каждая точка M срединной плоскости принадлежит искомому ГМТ. Мы продолжим рассмотрение плоскостей α и π , описанных выше.

Если проекция T точки M на плоскость α совпадает с точкой A , то $M = K$ есть середина отрезка AB . Если точка T не совпадает с A , то на прямой l_1 найдется точка P , а на проекции прямой l_2 на плоскость α найдется такая точка Q' (это доказано при решении задачи 1 урока 33), что T есть середина отрезка PQ' . Нам осталось доказать, что точка M есть середина отрезка PQ , где Q — точка на прямой l_2 , которая проектируется на Q' .

Для этого проведем через точки P и Q' плоскость, перпендикулярную плоскости α . Тогда точки Q и M будут лежать в этой плоскости. Пусть, как и выше, S — проекция M на плоскость π . Прямоугольные треугольники MPT и MQS равны по двум катетам ($PT = TQ' = SQ$ и $MT = MS$). Отсюда следует равенство углов TMP и SMQ . Значит, точки P, M, Q лежат на одной прямой и $PM = MQ$ как гипотенузы равных треугольников.

Мы доказали, что точка M есть середина отрезка PQ и наша задача решена.

Ответ: искомое ГМТ есть плоскость, параллельная каждой из прямых и удаленная от них на одинаковое расстояние. ◀

- **Задача 4.** Точки A и B лежат по одну сторону от плоскости π , причем отрезок AB не параллелен плоскости π . Найти геометрическое место центров сфер, проходящих через эти две точки и касающихся плоскости π .

Решение. Раз отрезок AB не параллелен плоскости π , прямая AB пересекает эту плоскость в некоторой точке C . Пусть M — точка касания одной из искомых сфер с плоскостью π . Тогда $CM^2 = CA \cdot CB$ и, следовательно, точка M лежит на окружности радиуса $\sqrt{CA \cdot CB}$ с центром в точке C . Тем самым, множество центров искомых сфер проектируется на окружность на

плоскости π и, следовательно, лежит на цилиндрической поверхности S , ось которой перпендикулярна плоскости π и радиус равен $\sqrt{CA \cdot CB}$.

Но сфера проходит также и через концы отрезка AB . Отсюда следует, что ее центр лежит на плоскости α , перпендикулярной AB и проходящей через его середину. Значит, наше ГМТ целиком лежит в пересечении плоскости α и цилиндрической поверхности S .

Докажем, наконец, что **каждая** точка этого пересечения лежит в искомым ГМТ.

Пусть точка O такова, что $OA = OB$ и проекция M точки O удовлетворяет условию $CM^2 = CA \cdot CB$. Если мы докажем, что $OM = OA$, то это и будет означать, что сфера радиуса OA проходит через точки A и B (ибо $OA = OB$!) и касается плоскости π . Итак,

$$OM^2 = OC^2 - CM^2 = OC^2 - CA \cdot CB,$$

и, кроме того, если мы обозначим середину отрезка AB через K , то

$$\begin{aligned} OA^2 &= OK^2 + KA^2 = CO^2 - CK^2 + KA^2 = \\ &= CO^2 - \left(\frac{CA + CB}{2} \right)^2 + \left(\frac{CA - CB}{2} \right)^2 = CO^2 - CA \cdot CB. \end{aligned}$$

Мы видим, что $OM = OA$, что и требовалось.

Ответ: если C есть точка пересечения прямой AB с плоскостью π , то искомое ГМТ есть пересечение цилиндрической поверхности радиуса $\sqrt{CA \cdot CB}$, ось которой проходит через точку C и перпендикулярна π , с серединной плоскостью отрезка AB . ◀

- **Задача 5.** Найти геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до плоскостей граней данного трехгранного угла постоянна и равна $a > 0$.

Решение. На ребрах данного трехгранного угла с вершиной O выберем точки A , B и C , расстояния от которых до плоскостей граней, противолежащих их ребру, равны a . Площадь S каждого из треугольников OAB , OBC и OCA равна $3V/a$, где V — объем тетраэдра $OABC$. Пусть точка M лежит внутри трехгранного угла $OABC$, причем расстояния от нее до плоскостей граней $OABC$ равны a_1 , a_2 и a_3 . Сумма объемов пирамид с основаниями OAB , OBC и OCA и вершиной M равна $\frac{1}{3}S(a_1 + a_2 + a_3)$. Отсюда следует, что $V = \frac{1}{3}S(a_1 + a_2 + a_3) \pm v$, где v — объем тетраэдра $MABC$. Так как $V = \frac{Sa}{3}$, $a_1 + a_2 + a_3 = a$ в том и только том случае, если $v = 0$, т.е. M лежит в плоскости ABC .

Пусть точки A' , B' и C' симметричны A , B и C относительно точки O . Все пространство разбивается на 8 трехгранных углов, образованных плоскостями граней данного трехгранного угла. Каждый из этих восьми углов получается выбором луча, содержащего точку A или A' , точку B или

B' и точку C или C' . Предыдущее рассуждение показывает, что в каждом из восьми случаев частью искомого ГМТ будет треугольник ABC , где у некоторых из точек A, B, C могут быть поставлены штрихи. Теперь уже ясно, что искомое ГМТ есть поверхность многогранника $ABCA'B'C'$.

Ответ: если на ребрах данного трехгранного угла с вершиной O выберем точки A, B и C , расстояния от которых до плоскостей граней, противоположных их ребру, равны a , и если A', B', C' — точки, симметричные A, B, C относительно точки O , то искомое ГМТ есть поверхность многогранника $ABCA'B'C'$. ◀

- **Задача 6.** Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из точки A на всевозможные прямые, проходящие через фиксированную точку B .

Решение. Искомое ГМТ есть сфера, построенная на отрезке AB как на диаметре. В самом деле, если мы проведем произвольную плоскость через прямую AB , то из всех точек искомого ГМТ в этой плоскости отрезок AB будет виден под прямым углом, так что пересечение искомого ГМТ с плоскостью, проходящей через прямую AB , есть окружность, построенная на AB как на диаметре. Теперь уже ясно, что ГМТ обязано быть сферой радиуса $\frac{AB}{2}$ с центром в середине AB .

Ответ: сфера, построенная на отрезке AB как на диаметре. ◀

- **Задача 7.** Даны две скрещивающиеся прямые. Найти геометрическое место точек, через которые нельзя провести прямую, пересекающую обе данные прямые.

Решение. Если точка принадлежит одной из прямых, то ясно, что она не принадлежит искомому ГМТ. Пусть точка M есть одна из точек нашего ГМТ. Обозначим данные прямые через l и k . Существует единственная плоскость π , проходящая через прямую k и точку M . Если плоскость π параллельна прямой l (обозначим ее в этом случае через α), то, очевидно, все прямые, проходящие через M и одну из точек прямой k не могут пересекать прямую l , так как они лежат в плоскости α . Значит, плоскость α с выброшенной прямой k целиком лежит в искомом ГМТ. Аналогично все точки плоскости β , проходящей через прямую l параллельно прямой k , кроме точек прямой l , принадлежат искомому ГМТ.

Предположим, что плоскость π не параллельна прямой l и пересекает ее в некоторой точке N . Прямая MN не может пересечь прямую k и лежит с ней в одной плоскости. Значит, $MN \parallel k$. Но это означает уже, что точка M лежит в плоскости β , и наша задача полностью решена.

Ответ: все точки плоскости α , проходящей через прямую k параллельно прямой l , за исключением точек прямой k , и все точки плоскости β , прохо-

дущей через прямую l параллельно прямой k , за исключением точек прямой l . ◀

- **Задача 8.** В пространстве даны две точки — A и B . Найти геометрическое место таких точек M , что $\frac{AM}{MB} = k$, где $k > 0$, $k \neq 1$.

Решение. Эту задачу проще всего решить методом координат. Выберем систему координат в пространстве так, чтобы начало ее находилось в середине отрезка AB , длину которого обозначим через $2a$. Ось Ox пустим по прямой AB , а остальные две оси будут произвольными, дополняющими ось Ox до прямоугольной системы координат $Oxyz$. Тогда точка A будет иметь координаты $(-a, 0, 0)$, а точка B — $(a, 0, 0)$. Точка $M(x, y, z)$ принадлежит искомому ГМТ если и только если

$$\begin{aligned} \frac{MA}{MB} = k &\iff \frac{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} = k \\ &\iff (x+a)^2 + y^2 + z^2 = k^2((x-a)^2 + y^2 + z^2) \\ &\iff (k^2 - 1)(x^2 + y^2 + z^2) - 2ax(k^2 + 1) + k^2a^2 = 0 \\ &\iff x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2a(k^2 + 1)}{k^2 - 1} \cdot x + \frac{k^2a^2}{k^2 - 1} = 0 \\ &\iff \left(x - a \cdot \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 + z^2 = R^2, \end{aligned}$$

где $R = \frac{a}{|k^2 - 1|} \cdot \sqrt{3k^2 + 1}$. Теперь уже ясно, что это сфера с центром на прямой AB . Можно в зависимости от различных k выяснить положение ее центра. Я этого подробно делать не буду. Отмечу лишь, что при конкретном k центр находится как середина отрезка прямой AB с концами M_1 и M_2 такими, что $\frac{AM_1}{M_1B} = k$ и $\frac{AM_2}{M_2B} = k$.

Ответ: сфера, построенная как на диаметре на отрезке M_1M_2 , где M_1 и M_2 — точки на прямой AB (их при $k \neq 1$ ровно две, причем одна лежит на отрезке AB , а другая — вне его), для которых $\frac{AM_1}{M_1B} = k$ и $\frac{AM_2}{M_2B} = k$. ◀

- **Задача 9.** В пространстве даны две точки A и B . Найти геометрическое место таких точек M , что $AM^2 - BM^2 = b^2$, где $b > 0$.

Решение. Возьмем такую же систему координат, как в предыдущей задаче. Точка $M(x, y, z)$ принадлежит искомому ГМТ, если и только если

$$MA^2 - MB^2 = b^2 \iff ((x+a)^2 + y^2 + z^2) - ((x-a)^2 + y^2 + z^2) = b^2 \iff x = \frac{b^2}{4a}.$$

Очевидно, это уравнение плоскости, перпендикулярной оси Ox , т.е. прямой AB . Точка пересечения этой плоскости с прямой AB зависит от числа $\frac{b^2}{4a}$.

Ответ: плоскость, перпендикулярная прямой AB и пересекающая ее правее середины отрезка AB на расстоянии $\frac{b^2}{2AB}$ от нее. ◀

- **Задача 10.** Дан трехгранный угол с прямыми плоскими углами. Найти геометрическое место точек пересечения медиан треугольников, все вершины которых лежат на различных ребрах данного трехгранного угла и не совпадают с его вершиной.

Решение. Ясно, что каждая точка, принадлежащая нашему ГМТ, лежит внутри данного трехгранного угла. Докажем, что и обратное верно, т.е. каждая точка, лежащая внутри трехгранного угла, принадлежит искомому ГМТ.

Будем считать наш трехгранный угол положительным октантом декартовой системы координат (т.е. что его вершина совпадает с началом координат, а лучи его есть положительные координатные полуоси). Пусть дана произвольная точка $M(x, y, z)$, лежащая внутри угла. Это означает, что $x > 0, y > 0, z > 0$. Пусть

$$A = (3x, 0, 0), B = (0, 3y, 0) \text{ и } C = (0, 0, 3z).$$

Тогда все точки A, B, C лежат на ребрах данного трехгранного угла и не совпадают с его вершиной. Кроме того, медиана ON тетраэдра $OABC$, выходящая из вершины O , равна

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \{x, y, z\}$$

— см. задачу 5 предыдущего урока (формула (1)).

Из $\overrightarrow{OM} = \{x, y, z\} = \overrightarrow{ON}$ следует, что $M = N$, т.е. точка M действительно есть точка пересечения медиан треугольника ABC , и решение закончено.

Ответ: искомое ГМТ есть внутренность данного трехгранного угла. ◀

Наш урок, а вместе с ним и весь курс подготовки к письменному экзамену, закончен. Оценку поставьте себе по шаблону. Сделайте домашнее задание и приступайте к работе над вариантами, подходящими для выбранного вами вуза.

В §3 введения подробно разъясняется, как продолжить работу.

Домашнее задание

- 1. Дана сфера. Найти геометрическое место центров сфер, вписанных в тетраэдры, вписанные в данную сферу.
- 2. В пространстве дана точка A . Найти геометрическое место проекций A на всевозможные плоскости, проходящие через прямую l , не содержащую точку A .
- 3. В пространстве дана точка O и две прямые. Найти геометрическое место точек M , для которых сумма длин проекций отрезка OM на данные прямые есть величина постоянная.
- 4. Найти геометрическое место середин общих касательных к двум заданным сферам.
- 5. Прямые l_1 и l_2 касаются сферы. Пусть M и N — точки на l_1 и l_2 соответственно такие, что отрезок MN тоже касается сферы. Найти геометрическое место точек касания всевозможных отрезков MN со сферой.
- 6. В пространстве дан треугольник ABC . На прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку A , берется произвольная точка D . Найти геометрическое место пересечений высот треугольников DBC .
- 7. В пространстве дан треугольник ABC . Найти геометрическое место таких точек M пространства, что $MA^2 + MB^2 = MC^2$.
- 8. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от трех попарно пересекающихся плоскостей, не проходящих через одну прямую и перпендикулярных некоторой данной плоскости π .
- 9. Даны две скрещивающиеся прямые и точка A на одной из них. Через прямые проведены две перпендикулярные плоскости. Найти геометрическое место проекций точки A на прямые пересечения таких плоскостей.
- 10. Дана прямая l и точка A , ей не принадлежащая. Через точку A проведена прямая l' , скрещивающаяся с l . Пусть $M \in l'$ и $N \in l$ таковы, что MN — общий перпендикуляр к прямым l и l' . Найти геометрическое место всевозможных точек M .
- 11. На плоскости α дан остроугольный треугольник ABC . Найти геометрическое место проекций на плоскость α таких точек M , что все треугольники ABM , BCM и CAM остроугольные.
- 12. Найти геометрическое место центров сфер, касающихся двух данных пересекающихся прямых.
- 13. Дан трехгранный угол, все плоские углы которого прямые. Найти геометрическое место центров окружностей данного радиуса R , касающихся

щихся всех граней этого угла.

- 14. Дан плоский выпуклый четырехугольник $ABCD$, не являющийся трапецией. Найти геометрическое место таких точек M , что боковую поверхность пирамиды $MABCD$ можно так пересечь плоскостью, что в сечении получится прямоугольник.
- 15. Дан плоский выпуклый четырехугольник $ABCD$, не являющийся трапецией. Пусть P и Q — точки пересечения продолжений противоположных сторон. Известно, что ни одна из диагоналей $ABCD$ не параллельна PQ . Найти геометрическое место таких точек M , что боковую поверхность пирамиды $MABCD$ можно так пересечь плоскостью, что в сечении получится ромб.
- 16. Дан прямой круговой конус. Сфера с центром в точке O лежит внутри конуса, касаясь его основания и боковой поверхности. Найти геометрическое место таких точек O .
- 17. Для данной сферы найти геометрическое место центров сфер, вписанных в конусы, вписанные в эту сферу.
- 18. Для данной сферы найти геометрическое место центров сфер, описанных возле конусов, описанных вокруг этой сферы.
- 19. Дан трехгранный угол с прямыми плоскими углами и вершиной O . Точки A , B и C лежат на различных ребрах этого угла, причем ни одна из них не совпадает с O . Найти геометрическое место пересечений высот всевозможных треугольников ABC .
- 20. Дан трехгранный угол с прямыми плоскими углами и вершиной O . Точки A , B и C лежат на различных ребрах этого угла, причем ни одна из них не совпадает с O . Найти геометрическое место пересечений биссектрис всевозможных треугольников ABC .

Часть III

ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ В МГУ ЗА 1970–2016 ГГ.

Я привожу в этой книге варианты письменных экзаменов по математике на все факультеты МГУ за последние 23 года*. Более старые варианты давать нет смысла ввиду большой разницы в теперешней и тогдашней программах по математике. Например, если половину задач варианта составляют задачи на комбинаторику и комплексные числа, то никак не может идти речь о том, чтобы современный абитуриент взялся решить этот вариант на оценку по критериям соответствующего года. Тем не менее, отдельные задачи тех лет весьма поучительны и потому присутствуют как в материале уроков 1–50, так и в домашних заданиях к этим урокам.

Вы, наверное, уже заметили, что на уроках 1–50 нигде нет ссылок на источник задач. При работе над этой главой вы обнаружите, что многие задачи из нижеприведенных вариантов уже разобраны на этих уроках или даны в домашних заданиях к ним. Однако мой опыт показывает, что даже очень сильные абитуриенты, пройдя курс уроков, не узнают уже разобранные задачи в вариантах и решают их как новые. Если у вас будет то же самое, не огорчайтесь. Математическая культура и способность хорошо решать задачи откладываются не в памяти, а где-то в подсознании. Главное — это уметь сделать задачу, а не запоминать ее и ее решение.

Варианты приведены по годам, а не по факультетам. Это, видимо, самый удобный способ ввиду того, что за такой длительный период состав факультетов заметно изменился. Порядок, в котором следуют факультеты, один и тот же для всех лет, так что вам легко будет выбрать нужный факультет.

И последнее. Выше я отмечал, что эта книга может служить пособием для подготовки в любой ВУЗ бывшего СССР. Как быть, если вы хотите поступать не в МГУ? Нижеприведенные варианты помогут вам ничуть не хуже, чем сборник вариантов вашего ВУЗа, так как они охватывают **все возможные способы составления задач для письменного экзамена**. Вам не верится? Тогда прочитайте следующий абзац.

В бывшем СССР существует практически только два источника обучения математике и формирования математических школ: это мех-мат МГУ и факультет ВМиК МГУ. Нематематик возразил бы: «Ведь существуют мех-маты других университетов и педагогических вузов, а также математические факультеты технических вузов». Но любой профессиональный математик знает, что все преподаватели математических вузов есть либо выпускники мех-мата или ВМК (всюду далее опускается МГУ), либо их ученики. Поэтому идеология математического мышления идет из МГУ, и варианты вступительных экзаменов в любой вуз составляют люди, так или

* В этом издании добавлены варианты за 1993–2016 гг. (Прим. ред.)

иначе воспитанные в школе мех-мата или ВМК. Излишне говорить, что на все факультеты МГУ варианты по математике составляются либо на мех-мате, либо на ВМК. Есть, впрочем, одно исключение — физический факультет, составляющий варианты только для себя. Но это исключение, как водится, только подтверждает правило: ведь мех-мат и физфак ранее были одним факультетом, который именовался физико-математическим.

Итак, если вы хотите поступать не в МГУ, определите трудность задач вашего вуза по списку из §2 Введения, выберите факультет(ы) с соответствующим уровнем сложности и используйте их задачи для подготовки согласно инструкциям, данным в §3 Введения.

1970 год

Механико-математический факультет

- 1. Решить неравенство

$$\log_2(1 + \cos 4x) \leq 1 + \log_{\sqrt{2}} \sin x.$$

- 2. Найти все действительные решения системы

$$\begin{cases} |xy - 2| = 6 - x^2, \\ 2 + 3y^2 = 2xy. \end{cases}$$

- 3. Три гонщика (A , потом B и затем C) стартуют с интервалом в 1 мин из одной точки кольцевого шоссе и двигаются в одном направлении с постоянными скоростями. Каждый гонщик затрачивает на круг более двух минут. Сделав три круга, гонщик A в первый раз догоняет B у точки старта, а еще через три минуты он вторично обгоняет C . Гонщик B впервые догнал C также у точки старта, закончив 4 круга. Сколько минут тратит на круг гонщик A ?

- 4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ заключены две окружности одинакового радиуса r , касающиеся друг друга внешним образом. Центр первой окружности находится на отрезке, соединяющем вершину A с серединой F стороны CD , а центр второй окружности находится на отрезке, соединяющем вершину C с серединой E стороны AB . Первая окружность касается сторон AB , AD и CD ; вторая окружность касается сторон AB , BC и CD . Найти AC .

- 5. Длина каждого ребра треугольной пирамиды $SABC$ равна 1. Отрезок BD есть высота треугольника ABC . Равносторонний треугольник BDE лежит в плоскости, образующей угол φ с ребром AC , причем точки S и E лежат по одну сторону от плоскости ABC . Найти расстояние между точками S и E .

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Определить все действительные значения a , при каждом из которых уравнение

$$\cos^4 x - (a + 2) \cos^2 x - (a + 3) = 0$$
 имеет решения и найти все эти решения.
- 2. Решить уравнение

$$|1 - \log_{(1/6)} x| + 2 = |3 - \log_{(1/6)} x|.$$
- 3. Из города A в город B , находящийся на расстоянии 105 км от A , с постоянной скоростью v км/ч выходит автобус. Через 30 мин вслед за ним из A со скоростью 40 км/ч выезжает автомобиль, который, догнав в пути автобус, поворачивает обратно и движется с прежней скоростью. Определить все те значения v , при которых автомобиль возвращается в A позже, чем автобус приходит в B .
- 4. В треугольнике ABC сторона BC служит основанием полукруга, площадь которого равна площади треугольника ABC . Угол A равен α . Найти углы B и C , считая, что $B \geq C$. Исследовать, при каких значениях α задача имеет решение.
- 5. В прямом круговом конусе с вершиной S угол между образующими SA и SB равен α , а угол между их проекциями на плоскость основания равен β . Вычислить угол между биссектрисами углов OSA и OSB , где точка O является центром круга, служащего основанием конуса.

Физический факультет

- 1. Решить уравнение

$$\frac{1}{2}(\cos^2 x + \cos^2 2x) - 1 = 2 \sin 2x - 2 \sin x - \sin x \sin 2x.$$

- 2. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{(1/4)}(x^2 - 3x + 1)} < 9.$$

- 3. В равнобедренном треугольнике ABC угол между равными сторонами AB и AC равен $\frac{\pi}{4}$. Из вершин треугольника ABC на его стороны опущены высоты AA' , BB' , CC' . Через точки A, B' и C' проведена окружность O , а через точки B, A' и C' — окружность O' . Найти отношение площади круга O к площади общей части кругов O и O' .
- 4. В треугольной пирамиде $SABC$ все ребра равны друг другу. На ребре SA взята точка M такая, что $SM = MA$, на ребре SB — точка N такая, что $SN = \frac{1}{3}SB$. Через точки M и N проведена плоскость, параллельная медиане AD основания ABC . Найти отношение объема треугольной

пирамиды, отсекаемой от исходной проведенной плоскостью, к объему пирамиды $SABC$.

- 5. Два автомобиля едут по шоссе друг за другом на расстоянии 20 м с одинаковой скоростью 24 м/сек. Шоферы, заметив впереди препятствие, начинают тормозить. В результате автомобили переходят на равнозамедленное движение с ускорениями a_1 и a_2 ($a_1 < 0$ и $a_2 < 0$) и движутся так до полной остановки. Шофер переднего автомобиля начал торможение на 2 сек раньше шофера заднего автомобиля. Ускорение переднего автомобиля $a_1 = -4 \text{ м/сек}^2$. Наименьшее расстояние, на которое сближались автомобили, равнялось 4 м. Определить, какой автомобиль остановился раньше, и найти ускорение a_2 заднего автомобиля.

Химический факультет

- 1. Из пункта A в пункт B выехал автомобиль и одновременно из пункта B в пункт A выехал велосипедист. После встречи они продолжили свой путь. Автомобиль, доехав до пункта B , тотчас повернул назад и догнал велосипедиста через два часа после момента первой встречи. Сколько времени после первой встречи ехал велосипедист до пункта A , если известно, что к моменту второй встречи он проехал $2/5$ всего пути от B до A ? (Скорости автомобиля и велосипедиста постоянны).

- 2. Решить уравнение

$$4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}.$$

- 3. Найти все значения x , лежащие в промежутке $-1 < x < 4$ и удовлетворяющие неравенству

$$\log_{0,75} \sin x \geq \log_{9/16} 0,75.$$

- 4. Хорда AB стягивает дугу окружности, равную 120° . Точка C лежит на этой дуге, а точка D лежит на хорде AB . При этом $AD = 2$, $BD = 1$, $DC = \sqrt{2}$. Найти площадь треугольника ABC .
- 5. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (AA_1, BB_1, CC_1 — боковые ребра), у которой $AC = 6$, $AA_1 = 8$. Через вершину A проведена плоскость, пересекающая ребра BB_1 и CC_1 соответственно в точках M и N . Найти, в каком отношении эта плоскость делит объем призмы, если известно, что $BM = MB_1$, а AN является биссектрисой угла CAC_1 .

Геологический факультет
(отделение общей геологии)

- 1. Упростить выражение

$$\frac{\left(b^{\frac{5}{6}}a^{-\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(b^{\frac{5}{6}}a^{-\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}\right)^2}{(\sqrt[3]{a^{-1}} - \sqrt[3]{b^{-1}})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{ab})} - 2a + \frac{4a^2}{a-b}.$$

- 2. Решить уравнение

$$6 \cdot (0,75)^{2-2x-x^2} - (0,75)^{x^2+2x-2} = 25^{\log_{125} 8} - 3.$$

- 3. Найти все значения x , удовлетворяющие неравенствам

$$\sin 5x + \sin x > 0, \quad 0 < x < 2\pi.$$

- 4. В колхозе два поля засеяли пшеницей. С первого поля собрали 1080 ц зерна, а со второго поля — 750 ц. Площадь первого поля на 10 гектаров больше площади второго. Если бы с каждого гектара первого поля собрали столько же пшеницы, сколько собрали с каждого гектара второго поля, а с каждого гектара второго поля собрали бы столько же, сколько собрали с каждого гектара первого поля, то с обоих полей собрали бы одинаковое количество зерна. Определить, сколько центнеров зерна собрано с каждого гектара на первом и на втором поле.
- 5. В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 39$ см, $BC = 26$ см и боковые стороны $AB = 5$ см и $CD = 12$ см. Найти радиус окружности, которая проходит через точки A и B и касается стороны CD или ее продолжения.

Геологический факультет
(отделение геофизики)

Вариант был такой же, как на химическом факультете этого года.

Биолого-почвенный факультет
(отделение биологии)

- 1. Решить уравнение

$$2 \sin 3x \sin x + (3\sqrt{2} - 1) \cos 2x = 3.$$

- 2. Решить неравенство

$$\log_{1/3}(x^2 - 6) + \log_9 x^2 \geq 0.$$

- 3. Даны две арифметические прогрессии a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 . Известно, что $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$, а числа $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, $a_3 + b_3$ образуют

геометрическую прогрессию. Доказать, что $a_1 = b_3$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_1$.

- 4. Дана трапеция $ABCD$, причем $BC = a$ и $AD = b$. Параллельно ее основаниям BC и AD проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке P , диагональ AC в точке L , диагональ BD в точке R и сторону CD в точке Q . Известно, что $PL = LR$. Найти PQ .

- 5. Числа a и b таковы, что система

$$\begin{cases} a^2x - ay = 1 - a, \\ bx + (3 - 2b)y = 3 + a \end{cases}$$

имеет единственное решение $x = y = 1$. Найти числа a и b .

Биолого-почвенный факультет (отделение почвоведения)

- 1. В железнодорожной будке на расстоянии один метр от окна, ширина которого 1 метр, сидит обходчик. На расстоянии 299 метров от окна и параллельно плоскости окна проходит горизонтальный железнодорожный путь. Обходчик видит целиком поезд длиной сто метров, идущий по этому пути с постоянной скоростью в течение 10 сек. Определить скорость поезда. (Шириной поезда и расстоянием между глазами обходчика пренебречь).

- 2. Решить уравнение

$$\log_8(4^{x^2-1} - 1) + \frac{2}{3} = \log_8(2^{x^2+2} - 7).$$

- 3. Около круга описана трапеция с углами при основании α и β . Найти отношение площади трапеции к площади круга.

- 4. При каких значениях параметра α система уравнений

$$\begin{cases} \alpha x - 4y = \alpha + 1, \\ 2x + (\alpha + 6)y = \alpha + 3 \end{cases}$$

не имеет решений?

- 5. Решить неравенство

$$2 \sin^2 2x + 3 \cos 2x < 0.$$

Географический факультет

Вариант был таким же, как на отделении почвоведения биолого-почвенного факультета.

Экономический факультет
(отделение политической экономии)

- 1. Объем бруска, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, равен 150 см^3 , площадь полной поверхности равна 280 см^2 . Периметр основания равен 40 см. Найти размеры бруска.
- 2. Квадрат $ABCD$ имеет площадь 1. Его сторона AD продолжена за точку D и на продолжении взята точка O на расстоянии 3 от точки D . Из точки O проведены два луча. Первый луч пересекает отрезок CD в точке M и отрезок AB в точке N , причем длина отрезка ON равна a . Второй луч пересекает отрезок CD в точке L и отрезок BC в точке K , причем угол BKL равен α . Найти площадь многоугольника $BKLMN$.
- 3. Решить уравнение $\log_2 \log_2 x = \log_4 \log_4 2x$.
- 4. Решить уравнение (в настоящее время в школьную программу не входит)
 $|z|i - z = 1 + 2i$.

Экономический факультет
(отделение планирования и экономической кибернетики)

- 1. В правильный тетраэдр $ABCD$ вписан шар K . Из точки D на грань ABC тетраэдра опущена высота DE . Точка P является серединой отрезка DE . Через точку P проведена плоскость M перпендикулярно к DE . Из всех точек, которые принадлежат одновременно шару K и плоскости M , взята точка O , являющаяся ближайшей к точке A . Найти расстояние от точки O до грани ABD , если объем шара равен 1.
- 2. Решить уравнение $|5 - 6x| - 4 \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) - 4 \sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right) + \frac{8 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{3}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{3}\right)} = 0$.
- 3. Решить неравенство $(\log_2 x) \sqrt{\log_x \left(\frac{1}{2} \sqrt{x}\right)} \leq 1$.
- 4. Найти хотя бы один такой многочлен третьей степени $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, чтобы выполнялось неравенство

$$\left| \frac{x}{1 - \frac{x}{2}} - P_3(x) \right| < 0,02$$

при всех $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

Филологический факультет

(отделение структурной и прикладной лингвистики)

- ▶ 1. В соревнованиях участвовали три байдарки. Первая байдарка проходит каждые 100 м дистанции на две секунды быстрее второй байдарки и на три секунды быстрее третьей. За какое время первая байдарка прошла один километр, если за каждые 30 сек вторая байдарка опережает первую на $4\frac{8}{13}$ м?
- ▶ 2. Найти все x , для которых $0,5 < x < 2,5$ и которые удовлетворяют неравенству

$$\log_{3x-x^2}(3a-ax) < 1$$
 при всех a из промежутка $0 < a < 2$.
- ▶ 3. Найти все x , удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{2} < |3x - \frac{\pi}{2}| \leq \pi$ и являющиеся решением уравнения

$$1 + \cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x.$$
- ▶ 4. Доказать, что $11n^2 - 14n + 3 \geq 0$ при всех целых n .
- ▶ 5. Не пользуясь таблицами (и калькулятором) доказать, что $\operatorname{tg} 208^\circ < \sin 492^\circ$.
- ▶ 6. В окружность вписан треугольник со сторонами 7,24,25. Вычислить площадь кругового сегмента, стянутого хордой длины 7.
- ▶ 7. Сколькими способами сумму в 4 руб 96 коп можно составить из монет по 2 и 15 копеек?

Факультет психологии

- ▶ 1. Два одинаковых парохода отправляются от двух пристаней: первый пароход от пристани A вниз по течению, второй — от пристани B вверх по течению. Каждый пароход, дойдя до конечного пункта, стоит там 45 мин и возвращается обратно. Если пароходы отправляются от начальных пунктов одновременно, то на обратном пути они встречаются в точке K , которая в два раза ближе к A , чем к B . Если первый пароход отходит от A на 1 час позже, чем второй пароход отходит от B , то на обратном пути они встречаются в 20 км от A . Если первый пароход отходит от A на 30 мин раньше, чем второй отходит от B , то на обратном пути пароходы встречаются в 5 км выше K . Найти скорость реки и время, за которое второй пароход доходит от A до K .
- ▶ 2. Найти все действительные значения a , при которых уравнение

$$x^8 + ax^4 + 1 = 0$$
 имеет ровно четыре действительных корня, образующих арифметическую прогрессию.

- 3. Найти все x , удовлетворяющие неравенству

$$\log_{\cos x^2} \left(\frac{3}{x} - 2x \right) < \log_{\cos x^2} (2x - 1).$$

- 4. В правильную треугольную пирамиду помещены три шара так, что первый шар касается всех боковых граней пирамиды и второго шара, второй шар касается боковых граней и третьего шара, а третий шар касается боковых граней, основания пирамиды и второго шара. Какую долю объема пирамиды занимают три шара, если ее боковые грани наклонены к основанию под углом α ?

1971 год

Механико-математический факультет

- 1. Решить уравнение

$$(x + 4) \log_4(x + 1) - (x - 4) \log_2(x - 1) = \frac{8}{3} \log_2(x^2 - 1).$$

- 2. Найти все x из отрезка $0 \leq x \leq \pi$, удовлетворяющие неравенству

$$\sin 2x - \cos x + \sqrt{2} \sin x > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- 3. Все грани треугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, а высота пирамиды совпадает с высотой одной из ее боковых граней. Найти объем пирамиды, если расстояние между наибольшими противоположными ребрами равно единице.

- 4. Найти все α , при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2x + \alpha \leq 0, \\ x^2 - 4x - 6\alpha \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

- 5. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагонали этого четырехугольника взаимно перпендикулярны. Найти его площадь, если радиус описанной около него окружности равен R , и $AB = 2 \cdot BC$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6 \lg \sqrt{x} + 3 \cdot 2^y = 5, \\ 10 \lg x + 3 \cdot 4^y = 17. \end{cases}$$

- 2. Найти все решения неравенства

$$\sqrt{\sin 2x} < \cos x - \sin x,$$

удовлетворяющие условию $|x| < \pi$.

- 3. В киоске были проданы одинаковые комплекты, состоящие только из синих и красных карандашей, причем в каждом комплекте число синих карандашей больше чем на 3 превосходило число красных. Если бы в каждом комплекте число синих карандашей увеличили в 3 раза, а красных — в 2 раза, то число синих карандашей в одном комплекте превосходило бы число красных не более, чем на 16, а общее число всех проданных карандашей равнялось бы 81. Определить, сколько было продано комплектов и сколько в каждом комплекте было синих и красных карандашей.
- 4. Центры трех окружностей различных радиусов расположены на одной прямой, а центр четвертой находится на расстоянии α от этой прямой. Найти радиус четвертой окружности, если известно, что каждая из этих окружностей касается трех других.
- 5. Основанием пирамиды $SABC$ служит треугольник ABC , стороны AB и AC которого равны и образуют между собой угол α , а высота пирамиды совпадает с ребром SA и равна h . Дана четырехугольная пирамида, имеющая ту же вершину S . Основанием ее является четырехугольник, вершины которого лежат на сторонах треугольника ABC . Найти объем четырехугольной пирамиды, если известно, что ее боковые грани равновелики, а боковые ребра равны.

Физический факультет

- 1. Решить уравнение

$$\cos 3x + \sin x \sin 2x = 2 \cos^3 x + 2 \operatorname{tg} x.$$

- 2. Решить неравенство

$$2 \log_4(2x^2 + 3) < \log_2(x^2 + 6).$$

- 3. Автомобиль едет от пункта A до пункта B с постоянной скоростью 42 км/ч. В пункте B он переходит на равнозамедленное движение, причем за каждый час его скорость уменьшается на a км/ч, и едет так до полной остановки. Затем он сразу же начинает двигаться равноускоренно с ускорением a км/час². Каково должно быть значение a , чтобы через 3 часа после возобновления движения автомобиль находился ближе всего к пункту B ?
- 4. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC . Середина D гипотенузы AB этого треугольника является основанием высоты SD данной пирамиды. Известно, что $SD = h$, $AC = b$, $BC = c$. Через середину высоты SD проведено сечение

пирамиды плоскостью, параллельной ребрам AC и SB . Найти площадь этого сечения и угол между плоскостью сечения и основанием пирамиды.

- 5. В окружность вписана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). На дуге AD , не содержащей вершин B и C , взята точка S . Точки P, Q, M и N являются основаниями перпендикуляров, опущенных из S соответственно на стороны AD , BC , AB и CD (или их продолжения). Известно, что $SP = a$, $SQ = b$, $SN = c$. Найти отношение площади треугольника MQS к площади треугольника NQS .

Химический факультет

- 1. Около окружности радиуса r описана равнобокая трапеция $ABCD$. Пусть E и K — точки касания этой окружности с боковыми сторонами трапеции. Угол между основанием AB и боковой стороной AD трапеции равен 60° . Доказать, что EK параллелен AB и найти площадь трапеции $ABEK$.

- 2. Решить уравнение

$$2^{\log_{\sqrt{2}}(x-0,5)} + x = x^{0,5x^2} + \cos^4\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

- 3. Три экскаватора получили задание вырыть по котловану: первый и второй — емкостью по 800 м^3 , а третий — емкостью 400 м^3 . Первый и второй экскаваторы вместе вынимают за час грунта втрое больше, чем третий. Первый и третий экскаваторы начали работу одновременно, а второй — в тот момент, когда первый вынул уже 300 м^3 грунта. Когда третий экскаватор выполнил $2/3$ своей работы, второй вынул 100 м^3 грунта. первым выполнил свое задание третий экскаватор. Сколько м^3 грунта вынул первый экскаватор к моменту, когда третий закончил рыть свой котлован?

- 4. Решить неравенство $1 - \sqrt{\frac{1}{2} + \log_3 \sin x} - \log_3 \cos x > 0$.

- 5. Правильная прямая треугольная призма $ABCA'B'C'$ описана около шара радиуса r . Пусть M — середина ребра BB' и N — середина ребра CC' . В шар вписан прямой круговой цилиндр так, что его основание лежит в плоскости AMN . Найти объем этого цилиндра.

Биолого-почвенный факультет (отделение биологии)

- 1. Решить уравнение

$$\log_{1/4}(2x) \log_{1/4}\left(x \cos^5\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 7 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \log_{1/4} 2.$$

- ▶ 2. В усеченный конус, образующая которого наклонена под углом 45° к нижнему основанию, вписан шар. Найти отношение величины боковой поверхности усеченного конуса к величине поверхности шара.
- ▶ 3. Три насоса, работая вместе, наполняют бассейн за 4,5 час. Один второй насос наполняет бассейн на 5 часов быстрее, чем один третий насос. За сколько часов второй насос наполняет бассейн, если первый насос наполняет его втрое дольше, чем второй и третий вместе?
- ▶ 4. Решить неравенство

$$2 \cos 8x \geq 3 + 4 \sin 4x.$$
- ▶ 5. Правильный треугольник ABC со стороной, равной 3, вписан в окружность. Точка D лежит на окружности, причем длина хорды AD равна $\sqrt{3}$. Найти длины хорд BD и CD .

Биолого-почвенный факультет (отделение почвоведения)

- ▶ 1. Три машинистки, работая одновременно, за 4 часа работы перепечатали вместе 216 страниц. За 1 час третья машинистка печатает больше, чем вторая на столько же страниц, на сколько вторая за то же время (т.е. 1 час) печатает больше страниц, чем первая. За 5 часов третья машинистка печатает столько же страниц, сколько первая за 7 час. Сколько страниц в час печатает первая машинистка?
- ▶ 2. Упростить выражение

$$(2a - b)^2 \left(\frac{a^{-1}b^{-1}}{a^{-1} + 2\sqrt{2}a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}} + 2b^{-1}} + \frac{a^{-1}b^{-1}}{a^{-1} - 2\sqrt{2}a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}} + 2b^{-1}} \right).$$
- ▶ 3. Решить уравнение

$$\cos x - 2 \sin 2x \sin x - 4 \cos 2x - 4 \sin^2 x = 0.$$
- ▶ 4. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AB = 3$ и $BC = 4$ через середины сторон AB и AC проведена окружность, касающаяся стороны BC . Найти длину отрезка гипотенузы AC , который лежит внутри этой окружности.
- ▶ 5. Решить неравенство

$$2 \log_{1/2}(x - 2) - \log_{1/2}(x^2 - x - 2) \geq 1.$$

Геологический факультет (отделение общей геологии)

- ▶ 1. Найти все решения системы

$$\begin{cases} \cos 2x + \sin y = 2 \cos 30^\circ, \\ 2 \cos 2x - \sin y = \sin 540^\circ. \end{cases}$$

- 2. Автозавод изготавливает легковые и грузовые автомобили. В первый день было изготовлено грузовых автомобилей на 100 машин больше, чем легковых. Во второй день было изготовлено легковых автомобилей на 150 машин больше, чем в первый день, а грузовых — на 50 машин больше, чем в первый день. Сколько легковых и сколько грузовых автомобилей было изготовлено в первый день, если во второй день было изготовлено машин в 1,2 раза больше, чем в первый?
- 3. При каких значениях a корни квадратного уравнения
$$x^2 - (2a + 1)x + 2a = 0$$
равны между собой?
- 4. Две окружности радиуса r касаются друг друга. Кроме того, каждая из них касается извне третьей окружности радиуса R в точках A и B соответственно. Определить радиус r , если $AB = 12$ см, $R = 8$ см.
- 5. Найти все значения x , при которых справедливо неравенство
$$\log_{1/4}(2x + 3) > \log_9 27.$$

Геологический факультет (отделение геофизики)

Вариант был такой же, как на химическом факультете в этом году.

Географический факультет

Вариант был такой же, как на отделении почвоведения биолого-почвенного факультета в этом году.

Экономический факультет (отделение политической экономии)

- 1. Выработка продукции за год работы предприятия возросла на $P\%$, а на следующий год она возросла на 10% больше, чем в первый год. Определить, на сколько процентов увеличилась выработка за первый год, если известно, что за два года она увеличилась в общей сложности на $48,59\%$.
- 2. Решить неравенство
$$x > \frac{1}{x-1}.$$
- 3. Решить неравенство
$$11 \sin x + \cos 2x - 6 \leq 0.$$
- 4. Вычислить сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся на 13.

- 5. В двугранный угол 60° вписан шар радиуса R . Найти радиус шара, вписанного в тот же угол и касающегося данного шара, если известно, что прямая, соединяющая центры обоих шаров, образует с ребром двугранного угла угол 45° .

Экономический факультет

(отделение планирования и экономической кибернетики)

- 1. Колхоз арендовал два экскаватора. Аренда первого экскаватора стоит 60 руб в день, производительность его в мягком грунте — 250 м^3 в день, в твердом грунте — 150 м^3 в день. Аренда второго экскаватора стоит 50 рублей в день, его производительность в мягком грунте — 480 м^3 в день, а в твердом — 100 м^3 в день. Первый работал несколько полных дней и вырыл 720 м^3 . Второй за несколько полных дней вырыл 330 м^3 . Сколько дней работал каждый экскаватор, если колхоз заплатил за аренду не более 300 рублей?
- 2. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \sin x\right).$$

- 3. Найти максимальный член последовательности

$$a_n = -n^2 + 14n - 45 + \frac{4}{(2n - 17)^2 + 2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- 4. На плоскости лежит шар радиуса R . Эту же плоскость пересекает прямой круговой цилиндр радиуса r , причем образующие цилиндра перпендикулярны к плоскости. Центр шара удален от оси цилиндра на расстояние ρ ($\rho > R + r$). Найти минимально возможный радиус шара, который бы касался одновременно цилиндра, плоскости и заданного шара.
- 5. Сколько существует шестизначных чисел, делящихся на 4, в десятичной записи которых не встречаются цифры 4, 6, 8?

Филологический факультет

(отделение структурной и прикладной лингвистики)

- 1. Четыре школьника сделали в магазине канцелярских товаров следующие покупки: первый купил пенал и ластик, заплатив 40 коп.; второй купил ластик и карандаш, заплатив 12 коп.; третий купил пенал, карандаш и две тетради, заплатив 50 коп.; четвертый купил пенал и тетрадь. Сколько заплатил четвертый школьник?
- 2. Из прямоугольника, большая сторона которого равна l , вырезаются два полукруга, диаметром которых служат меньшие стороны прямоугольника. При каком значении длины меньшей стороны прямоугольника площадь оставшейся части будет максимальной?

- 3. Определить, сколько целочисленных решений имеет неравенство $(n^2 - 1)(n^2 - 11)(n^2 - 101)(n^2 - 1001) < 0$.

- 4. Определить, для каких a неравенство

$$\log_{\frac{a}{a+1}}(x^2 + 2) > 1$$

выполняется при любом действительном x .

- 5. (Не входит в теперешнюю школьную программу). Среди комплексных z найти все те, для которых

$$\log_{14}(13 + |z^2 - 4i|) + \log_{196} \frac{1}{(13 + |z^2 + 4i|)^2} = 0.$$

- 6. Исследовать и решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^5 y^8 = a, \\ x^7 y^{11} = b. \end{cases}$$

- 7. Доказать, что если p и q — целые числа, удовлетворяющие уравнению $p^2 - 4q^2 = 4pq$, то $p = q = 0$.

Факультет психологии

- 1. Вычислить без помощи таблиц

$$\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}.$$

- 2. Дан куб $ABCD A' B' C' D'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC', DD' . На продолжении ребер AB и BB' соответственно отложены отрезки AM и $B'N$ длины $AM = 0,5 \cdot AB$ и $B'N = 2 \cdot B'B$ ($BM = 1,5 \cdot AB$; $BN = 3 \cdot BB'$). Где на ребре CC' должна находиться точка P для того, чтобы в сечении куба плоскостью, проведенной через точки M, N и P , был четырехугольник?

- 3. Найти все такие значения x , что наименьшее из чисел $\{1 - x^2, \frac{1-x}{2}\}$ больше $\frac{1}{2}$.

- 4. Рабочий изготовил некоторое количество деталей двух видов: A и B , причем деталей A он изготовил больше, чем деталей B . Если он изготовит деталей A в два раза больше, то общее число деталей станет менее 32-х, а если деталей B в два раза больше, то общее число деталей станет больше 28. Сколько деталей A и сколько деталей B изготовил рабочий?

- 5. При каких значениях a уравнение

$$\sin^2 3x - \left(a + \frac{1}{2}\right) \sin 3x + \frac{a}{2} = 0$$

имеет ровно три корня, расположенных на отрезке $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \pi$?

1972 год

Механико-математический факультет

- 1. Найти все значения x , при которых справедливо неравенство

$$\frac{\log_8 x}{\log_2(1+2x)} \leq \frac{\log_2 \sqrt[3]{1+2x}}{\log_2 x}.$$

- 2. Пункты A и B соединены двумя дорогами, одна из которых на 3 км короче другой. Из B в A по более короткой дороге вышел пешеход и одновременно из A по той же дороге выехал велосипедист. Пешеход и велосипедист одновременно прибыли в A через 2 часа после начала движения. За это время пешеход прошел один раз путь от B до A , а велосипедист проехал два раза в одном направлении по кольцевому маршруту, образованному двумя названными дорогами. Найти скорости пешехода и велосипедиста, если известно, что их вторая встреча произошла на расстоянии 3,5 км от пункта B . (Скорости постоянны).

- 3. В треугольнике ABC имеем $AB = 20$ м, $AC = 24$ м. Известно, что вершина C , центр вписанного в треугольник ABC круга и точка пересечения биссектрисы угла A со стороной BC лежат на окружности, центр которой находится на стороне AC . Найти радиус описанной около треугольника ABC окружности.

- 4. В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро SC равно ребру AB и наклонено к плоскости основания ABC под углом 60° . Известно, что вершины A, B, C и середины боковых ребер пирамиды расположены на сфере радиуса 1 м. Доказать, что центр указанной сферы лежит на ребре AB и найти высоту пирамиды.

- 5. Даны три уравнения с действительными коэффициентами:

$$1) x^2 - (a+b)x + 8 = 0,$$

$$2) x^2 - b(b+1)x + c = 0,$$

$$3) x^4 - b(b+1)x^2 + c = 0.$$

Каждое из них имеет по крайней мере один действительный корень. Известно, что корни первого уравнения больше единицы. Известно также, что все корни первого уравнения являются корнями третьего уравнения и хотя бы один корень первого уравнения удовлетворяет второму уравнению. Найти числа a, b, c , если $b > 3$.

- 1. Решить уравнение

$$9^{1-(x-1)^2} - 12 \cdot 3^{-(x-1)^2} + 1 = 0.$$

- 2. Решить неравенство

$$\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \geq \frac{|\operatorname{tg} x - \sqrt{3}| + \sqrt{3}}{\operatorname{ctg} x}.$$

- 3. В прямоугольном секторе AOB из точки B как из центра проведена дуга OC (C — точка пересечения этой дуги с дугой AB) радиуса BO . Окружность S_1 касается дуги AB , дуги OC и прямой OA , а окружность S_2 касается дуги AB , прямой OA и окружности S_1 . Найти отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2 .
- 4. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды $SABC$ наклонены к плоскости основания под углом 45° . Шар касается плоскости основания ABC в точке A и, кроме того, касается вписанного в пирамиду шара. Через центр первого шара и высоту BD основания проведена плоскость. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания.
- 5. Найти все действительные значения параметра a , при которых неравенство
- $$\operatorname{tg}^2(\sin \sqrt{9\pi^2 - x^2}) - 2a \operatorname{tg}(\sin \sqrt{9\pi^2 - x^2}) + a + 2 \leq 0$$
- имеет, и притом конечное число решений. Для каждого такого a указать все решения неравенства.

Физический факультет

- 1. Решить уравнение

$$\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 1.$$

- 2. Решить неравенство

$$\log_{100}(x^2) + \log_{10}^2 x < 2.$$

- 3. В двух сосудах имеется вода разной температуры. Из этой воды составляют смеси. Если отношение объемов воды, взятой из первого и второго сосудов, равно 1:3, то температура смеси будет 49° , а если 2:5, то температура смеси будет 48° . Найти температуру воды в каждом сосуде (считая, что плотность и удельная теплоемкость воды не зависят от температуры).
- 4. На сфере, радиус которой равен 2 м, расположены три окружности радиуса 1 м, каждая из которых касается двух других. Найти радиус окружности, меньшей чем данные, которая также расположена на данной сфере и касается каждой из данных окружностей.
- 5. В треугольнике ABC угол B равен $\pi/4$, угол C равен $\pi/3$. На медианах BM и CN как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках P и Q . Хорда PQ пересекает среднюю линию MN в точке F . Найти отношение длины отрезка NF к длине отрезка FM .

Химический факультет

- 1. От пристани A одновременно отходят вниз по течению реки к пристани B две лодки. Первая лодка подходит к пристани B на 2 часа раньше второй. Если бы лодки отошли от этих пристаней одновременно, двигаясь навстречу друг другу (первая лодка отходит от пристани A), то они встретились бы через 3 часа. Расстояние между пристанями равно 24 км. Скорость второй лодки в стоячей воде в три раза больше скорости течения реки. Найти скорость течения реки.
- 2. Решить уравнение
- $$\log_{x^2-6x+8}(\log_{2x^2-2x+3}(x^2+2x)) = 0.$$
- 3. В треугольнике ABC угол A равен 45° , а угол C — острый. Из середины стороны BC опущен перпендикуляр на сторону AC . Площади треугольников NMC и ABC относятся соответственно как 1:8. Найти углы треугольника ABC .
- 4. В прямую призму $ABCA'B'C'D'$, нижним основанием которой является ромб $ABCD$, а AA', BB', CC', DD' — боковые ребра, вписан шар радиуса R . Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины A, B, C' , если известно, что $\angle BAD = \alpha$.
- 5. Найти все значения x , для которых выражение
- $$(\cos x - \cos 5x)(2 \sin x + 3 \cos x + 4)$$
- положительно.

Геологический факультет
(отделение общей геологии)

- 1. Решить уравнение
- $$2 \cos^2 x + 3 \sin x = 0.$$
- 2. Решить систему уравнений
- $$\begin{cases} \log_2 x + \log_3 y^2 = 0, \\ \log_2 x^2 - \log_{1/3} y = 5. \end{cases}$$
- 3. Из пунктов A и B , расположенных на расстоянии 10 км, навстречу друг другу одновременно выехали два велосипедиста. Через 4 часа они встретились. После встречи скорость первого велосипедиста, едущего из A в B , возросла на 5 км/ч, а скорость второго, едущего из B в A , возросла на 10 км/ч. Известно, что первый велосипедист прибыл в пункт B на 1 час раньше, чем второй прибыл в пункт A . Определить первоначальную скорость первого велосипедиста.

- 4. Найти все значения x , при которых справедливо неравенство

$$\frac{4}{1-x} > x + 2.$$

- 5. Дан треугольник ABC , в котором угол B равен 30° , $AB = 4$ см и $BC = 6$ см. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D . Определить площадь треугольника ABD .

Геологический факультет (отделение геофизики)

- 1. Колхозный сад разбит на несколько участков. На каждом участке урожай собирает одинаковое число колхозников. Известно, что число колхозников, находящихся на одном участке, превышает число участков на 14. Когда еще 15 колхозников пришли на первый участок, а с остальных участков ушло по 15 человек, то число колхозников на первом участке стало равно числу колхозников, оставшихся на всех остальных участках. Сколько колхозников было первоначально на каждом участке?

- 2. Решить уравнение

$$2 \sin^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} = 3.$$

- 3. Найти те значения x , при которых справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{3-x}} > \frac{1}{x-2}.$$

- 4. Около трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC описана окружность радиуса 6 см. Центр описанной окружности лежит на основании AD . Основание BC равно 4 см. Определить площадь трапеции.
- 5. В треугольнике ABC известно, что $AC = 12$ см, $AB = BC = 3\sqrt{10}$ см. Два шара касаются плоскости треугольника ABC в точках A и C и расположены по разные стороны от этой плоскости. Расстояние между центрами шаров равно 15 см. Центр третьего шара находится в точке B , и этот шар касается двух данных шаров. Определить радиус третьего шара.

Биолого-почвенный факультет

- 1. Два пешехода выходят одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B и встречаются через 3 часа. Если бы они оба вышли из пункта A и пошли в пункт B , причем второй вышел бы на 3 часа позднее первого, то второй пешеход догнал бы первого, пройдя две трети расстояния от A до B . Сколько времени потребуется первому пешеходу на путь от A до B ?

- 2. Упростить выражение

$$\operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg}(70^\circ - x) + \operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg}(20^\circ - x) - \operatorname{ctg}(20^\circ - x) \operatorname{ctg}(70^\circ - x).$$

- 3. Решить уравнение

$$2\sqrt{\log_2 3} = 3\sqrt{\log_9(4x) - 0,75}.$$

- 4. Найти все решения уравнения

$$\sin(\log_{\sqrt{x}} x^{\pi x}) + \sin \pi x + \cos \pi x + \cos(\log_x x^{2\pi x}) = 0.$$

- 5. В треугольнике ABC , площадь которого равна S , проведена биссектриса CE и медиана BD , пересекающиеся в точке O . Найти площадь четырехугольника $ADOE$, зная, что $BC = a$, $AC = b$.

Географический факультет

- 1. Фрукты в магазин были доставлены двумя машинами по 60 ящиков в каждой; при этом в 21 ящике были груши, а в остальных — яблоки. Сколько ящиков с грушами было в каждой машине, если известно, что в первой машине на один ящик с грушами приходилось в три раза больше ящиков с яблоками, чем во второй?

- 2. Найти все решения уравнения

$$\sin 2x + \cos x + 2 \sin x = -1,$$

удовлетворяющие условию $0 < x < 5$.

- 3. Найти все значения x , для которых справедливо неравенство

$$2 \log_7 x - \log_x 49 < 3.$$

- 4. Найти все числа x и y , для которых

$$\begin{cases} 2^{x+1} = 4y^2 + 1, \\ 2^x \leq 2y. \end{cases}$$

- 5. Окружность радиуса R проходит через вершины A и B треугольника ABC и касается прямой AC в точке A . Найти площадь треугольника ABC , зная, что $\angle ABC = \beta$, $\angle CAB = \alpha$.

Экономический факультет

(отделение политической экономии)

- 1. Не пользуясь таблицами, определить, что больше: $\log_3 75$ или $\log_2 22$.

- 2. Найти и изобразить на координатной плоскости точки, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 18x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = 0, \\ 12y^2 - 2xy^2 + 3y^3 = 0. \end{cases}$$

- 3. Один учебник алгебры, два учебника геометрии и два учебника тригонометрии стоят вместе 2 руб. 10 коп., а три учебника алгебры, один учебник геометрии и один учебник тригонометрии стоят вместе 2 руб.

30 коп. Сколько стоят учебник геометрии и учебник тригонометрии вместе?

- 4. Вне прямого угла с вершиной C , на продолжении его биссектрисы взята точка O так, что $OC = \sqrt{2}$. С центром в точке O построена окружность радиуса 2. Найти площадь фигуры, ограниченной сторонами угла и дугой окружности, заключенной между ними.
- 5. Решить неравенство
- $$\frac{4x^2 + 8x - 5}{x + 1} < 0.$$

Экономический факультет

(отделение планирования и экономической кибернетики)

- 1. Кооперативу садоводов предлагается указать длину и ширину земельного участка прямоугольной формы, одна из сторон которого должна прилегать к шоссе. Нужно, чтобы площадь участка равнялась 150 га. Участок придется огородить забором, причем 1 погонный метр забора, прилегающий к шоссе, стоит 10 руб, а один погонный метр забора на трех оставшихся сторонах стоит 5 руб. Какими должны быть стороны участка, чтобы стоимость забора была минимальной?
- 2. Найти $\lg x$, если
- $$\begin{cases} y \sin x + \cos x = 2, \\ -4 \sin x + 2y \cos x = -y. \end{cases}$$
- 3. Найти и изобразить на координатной плоскости точки, координаты которых удовлетворяют системе уравнений
- $$\begin{cases} (1-x)(x+y+3)(2x-y) = 0, \\ (x-1)(3x+3y+1) = 0. \end{cases}$$
- 4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол A равен 90° , а угол C не превосходит 90° . Из вершин B и D на диагональ AC опущены перпендикуляры BE и DF . Известно, что $AE = CF$. Доказать, что угол C прямой.

Филологический факультет

(отделение структурной и прикладной лингвистики)

- 1. Известно, что 0,5 кг лука, 3 кг картофеля и 1 кг огурцов стоят вместе 2 руб. 38 коп., а 2 кг лука и 4 кг огурцов стоят 8 руб 20 коп. Сколько стоят 1 кг лука, 2 кг картофеля и 2 кг огурцов вместе?
- 2. В языке страны мигунов 4 гласные и 6 согласных букв, причем гласные и согласные непременно чередуются при составлении слов. Сколько 9-буквенных слов может быть в этом языке?

- 3. При каком действительном x величина $t = \frac{\sqrt{x^2+16}}{3} - \frac{x}{5}$ принимает наименьшее значение?
- 4. Решить уравнение
- $$\log_x \sqrt[3]{4} + 3 \log_x (x \sqrt[3]{2}) + (\log_x \sqrt[3]{4})^2 = 12.$$
- 5. Найти без таблиц $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ и $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Факультет психологии

- 1. Три равных по весу металлических порошка образуют смесь, 1 г которой занимает объем $\frac{5}{27}$ см³. Плотность первого порошка составляет $\frac{12}{23}$ плотности третьего. Сколько см³ занимает один грамм второго порошка, если плотность третьего порошка на 1,5 г/см³ больше плотности второго порошка?
- 2. Найти все действительные числа x такие, что числа 0 , $\log_3(2 \sin x)$, $\log_3\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)$ в некотором порядке образуют арифметическую прогрессию.
- 3. Найти все целые решения неравенства
- $$x - 1 < \log_6(x + 3).$$
- 4. Известно, что AB, AC, AD, DE, DF — ребра куба. Через вершины E, F и середины ребер AB и AC проведена плоскость P . Какую часть объема шара, вписанного в куб, составляет объем меньшей из двух частей, на которые этот шар делится плоскостью P ?

1973 год

Механико-математический факультет

- 1. Решить уравнение
- $$\cos 2x + \log_4 \left(\frac{1}{2} \sin x \right) + 2 \cos x \log_{1/2} \sin x = 2 \cos x + \sin^2 x \cdot \log_2 \sin^2 x.$$
- 2. В трапеции диагонали равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований равен 2. Найти площадь трапеции.
- 3. Решить неравенство
- $$4x + 8\sqrt{2-x^2} > 4 + (x^2 - x) \cdot 2^x + 2^{x+1} \cdot x\sqrt{2-x^2}.$$
- 4. В треугольной пирамиде $ABCD$ грани ABC и ABD имеют площади p и q и образуют между собой угол α . Найти площадь сечения пирамиды, проходящего через ребро AB и центр вписанного в пирамиду шара.

- 5. Найти все пары чисел (x, y) , удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}(x-y)^2 - (x-y)^4} = y^2 - 2x^2, \\ y \geq 4x^4 + 4yx^2 + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \sin x \sin y + \cos x = 0, \\ 1 + \sin y \cos x = 2 \cos^2 y \sin x. \end{cases}$$

- 2. Решить неравенство

$$\log_{x^2 - \frac{18x - 91}{90}} \left(5x - \frac{3}{10} \right) \leq 0.$$

- 3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены биссектриса CL и медиана CM . Найти площадь треугольника ABC , если $LM = a$, $CM = b$.
- 4. Вершина S пирамиды $SABC$ находится на расстоянии 4 от центра сферы радиуса 1, которая проходит через точки A, B, C и пересекает ребра SA, SB, SC соответственно в точках A_1, B_1, C_1 . Отношение длин отрезков B_1C_1 и BC равно $\frac{1}{15}\sqrt{132}$, отношение площадей треугольников SA_1B_1 и SAB равно $\frac{22}{45}$, а отношение объемов пирамид $SA_1B_1C_1$ и $SABC$ равно $\frac{88}{325}$. Найти длины отрезков SA_1 , SB_1 и SC_1 .
- 5. Из пункта A одновременно выходят три пешехода и одновременно возвращаются в тот же пункт, обойдя маршрут, состоящий из прямолинейных отрезков AB, BC, CD, DA , которые образуют равнобоковую трапецию (AB и CD — боковые стороны). На указанных отрезках скорости всех пешеходов постоянны и равны у первого 6,8,5 и 8 км/ч соответственно, а у второго — 7,7,6 и 8 км/ч соответственно. Скорость третьего пешехода на каждом из отрезков равна либо 7 км/ч, либо 8 км/ч, причем на всем пути он меняет скорость один раз. Определить отношение меньшего основания трапеции к боковой стороне.

Физический факультет

- 1. Решить уравнение

$$2 \sin 2x + \sqrt{3} \cos x = 0.$$

- 2. Решить уравнение

$$10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99.$$

- 3. Сумма первых десяти членов арифметической прогрессии равна 30. Четвертый, седьмой и пятый члены этой прогрессии, взятые в указанном порядке, представляют собой три последовательных члена геометрической прогрессии. Найти разность арифметической прогрессии.

- 4. В треугольной пирамиде $SABC$ высота SO проходит через точку O — центр круга, вписанного в основание ABC пирамиды. Известно, что $\angle SAC = \frac{\pi}{3}$, $\angle SCA = \frac{\pi}{4}$, а отношение площади треугольника AOB к площади треугольника ABC равно $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$. Найти угол BSC .
- 5. В окружность с центром O вписана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). В этой же окружности проведены диаметр CE и хорда BE , пересекающая AD в точке F . Точка H — основание перпендикуляра, опущенного из точки F на CE , точка S есть середина отрезка EO , а M — середина отрезка BD . Известно, что радиус окружности равен R , а $CH = \frac{2}{3}R$. Найти длину отрезка SM .

Химический факультет

- 1. Трое рабочих обрабатывали одинаковые детали. К концу месяца оказалось, что количество деталей, обработанных первым, вторым и третьим рабочими образуют геометрическую прогрессию. Месячный заработок каждого рабочего складывался из части, пропорциональный количеству обработанных деталей и премии. У первого рабочего он составил 150 рублей, у второго — 180 и у третьего — 250 рублей. Найти размеры премий, если известно, что у первого и второго рабочего они одинаковы, а у третьего — в полтора раза больше.

- 2. Решить неравенство

$$\log_4(3^x - 1) \log_{1/4} \left(\frac{3^x - 1}{16} \right) \leq \frac{3}{4}.$$

- 3. Найти все действительные x , удовлетворяющие уравнению

$$(4 - x^2)^{-\frac{\cos^2 x}{\cos x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

- 4. В правильной треугольной пирамиде расположен шар радиуса 1. В точке, делящей пополам высоту пирамиды, он касается внешним образом полушара. Полушар опирается на круг, вписанный в основание пирамиды; шар касается боковых граней пирамиды. Найти площадь боковой поверхности и величину двугранного угла, образованного боковыми гранями пирамиды.
- 5. В равнобедренный треугольник ABC вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании BC , а две другие — на боковых сторонах треугольника. Сторона квадрата относится к радиусу круга, вписанного в треугольник как 8:5. Найти углы треугольника.

Геологический факультет (отделение общей геологии)

- 1. Решить систему

$$\begin{cases} \lg 3 \cdot \lg(3x) = \lg 2 \cdot \lg(2y), \\ \lg x \cdot \lg 2 = \lg y \lg 3. \end{cases}$$

- 2. Решить уравнение

$$4^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 = 0.$$

- 3. Два велосипедиста выехали из пункта A одновременно и в одном направлении. Первый велосипедист ехал со скоростью 7 км/ч, а второй — со скоростью 10 км/ч. Через 30 мин из пункта A в том же направлении выехал третий велосипедист, который догнал первого велосипедиста, а через полтора часа после этого догнал и второго велосипедиста. Определить скорость третьего велосипедиста.

- 4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 1 см. Объем пирамиды равен $\frac{\sqrt{2}}{3}$ см³. Через сторону основания CD проведено сечение, которое делит пополам двугранный угол, образованный боковой гранью SCD и основанием. Найти площадь сечения.

- 5. Найти все пары значений (x, y) , являющиеся решениями системы

$$\begin{cases} \sin x + \frac{1}{\cos y} = 2\sqrt[3]{14}, \\ \sin x \cdot \frac{1}{\cos y} = \sqrt[3]{196} - 2 \end{cases}$$

и удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} 0 < x < \pi, \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Геологический факультет (отделение геофизики)

- 1. Решить систему

$$\begin{cases} x + \sin(x+y) = \frac{3}{2}, \\ 3x - \sin(x+y) = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

- 2. См. задачу 2 геологического ф-та (отделение общей геологии)

- 3. См. задачу 3 геологического ф-та (отделение общей геологии)

- 4. Решить неравенство

$$\log_{2x-x^2} \left(x - \frac{3}{2} \right)^4 > 0.$$

- 5. На плоскости дан прямой угол. Окружность с центром, расположенным внутри этого угла, касается одной стороны угла, пересекает другую сторону в точках A и B и пересекает биссектрису угла в точках C и D . Длина хорды AB равна $\sqrt{6}$ см, длина хорды CD равна $\sqrt{7}$ см. Найти радиус окружности.

Биологический факультет

- 1. Три каменщика (разной квалификации) выложили кирпичную стенку, причем первый каменщик работал 6 часов, второй — 4 часа и третий — 7 часов. Если бы первый каменщик работал 4 часа, второй — 2 и третий — 5, то было бы выполнено лишь $\frac{2}{3}$ всей работы. За сколько часов каменщики закончили бы кладку, если бы они работали все вместе одно и то же время?

- 2. Решить уравнение

$$2 \cos 2x - 1 = (2 \cos 2x + 1) \operatorname{tg} x.$$

- 3. Решить уравнение

$$\log_{\sin 2x}(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 1 - \log_{\sin 2x}^2 2.$$

- 4. Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O . Найти площадь четырехугольника $OMCD$.

- 5. Найти все значения действительного параметра α , для которых неравенство

$$4^x - \alpha \cdot 2^x - \alpha + 3 \leq 0$$

имеет хотя бы одно решение.

Факультет почвоведения

- 1. Два экскаватора разной конструкции должны проложить две траншеи одинакового поперечного сечения длиной 960 и 180 метров. Вся работа продолжалась 22 дня, в течение которых первый экскаватор прокладывал большую траншею. Второй экскаватор начал работать на 6 дней позже первого, отрыл первую траншею, три дня ремонтировался и затем помогал первому. Если бы не нужно было тратить времени на ремонт, то работа была бы закончена за 21 день. Сколько метров траншеи в день может отрыть каждый экскаватор?

- 2. Что больше, $(\log_2 \sqrt{2} 4)(\log_9 3\sqrt{3})^2$ или $2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos^2 \frac{23\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{37\pi}{4}$?

- 3. Решить уравнение

$$(\cos x - \sin x) \left(1 + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + \sin x = 2 \cos^2 x.$$

- 4. Правильный шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность радиуса $3 + \sqrt{3}$. Найти радиус круга, вписанного в треугольник ACD .

- 5. Найти все действительные решения уравнения

$$4^{3x^2+x} - 8 = 2 \cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}.$$

Географический факультет

- 1. На прокладке двух параллельных трубопроводов работали два экскаватора. Первый из них начал работу на 30 минут раньше второго. Когда второй экскаватор прокопал 27 метров, оказалось, что он отстает от первого на 1 метр. С какой скоростью копали экскаваторы, если известно, что второй выкапывает в час на 4 метра больше, чем первый?

- 2. Упростить выражение

$$5^{\log_{1/5} \frac{1}{2}} + \log_{\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{7}} + \log_{1/2} \frac{1}{10 + 2\sqrt{21}}.$$

- 3. Сторона AB квадрата $ABCD$ равна 1 и является хордой некоторой окружности, причем все остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Длина касательной CK , проведенной из вершины C к той же окружности равна 2. Чему равен диаметр окружности?

- 4. Найти решения уравнения

$$3^{x^2+4x} = \frac{1}{25},$$

удовлетворяющие неравенству $x > -3$.

- 5. Решить уравнение

$$\sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x = 2\sqrt{2 + 2 \cos 2x}.$$

Экономический факультет

(отделение политической экономии)

- 1. Пароход прошел 4 км вверх против течения реки и затем прошел еще 33 км вниз по течению, затратив на все это 1 час времени. Найти скорость парохода в стоячей воде, если скорость течения реки равна 6,5 км/ч.

- 2. В равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α вписана окружность. Кроме того, построена вторая окружность, касающаяся боковых сторон треугольника и вписанной в него окружности. Определить радиус второй окружности.

- 3. Решить уравнение

$$\sqrt{24 - 10x} = 3 - 4x.$$

- 4. Решить уравнение

$$\frac{\cos 2x - \cos 4x - 4 \sin 3x - 2 \sin x + 4}{2 \sin x - 1} = 0.$$

- 5. Решить неравенство

$$\log_x 5 < \log_{2x-1} 5.$$

Экономический факультет

(отделение планирования и экономической кибернетики)

- ▶ 1. График функции $y = 1 - 3x^2$ пересекается в двух точках с прямой, наклоненной к оси x под углом φ . Вычислить абсциссу середины отрезка, соединяющего проекции точек пересечения на ось x .
- ▶ 2. Найти все пары чисел (x, y) , для которых выполняются одновременно следующие условия:
 - а) $x^2 - 2xy + 12 = 0$;
 - б) $x^2 + 4y^2 \leq 60$;
 - в) x является целым числом.
- ▶ 3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с площадью основания S и высотой h . Через вершину A_1 верхнего основания $A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена секущая плоскость, пересекающая боковое ребро BB_1 в точке B_2 , боковое ребро CC_1 в точке C_2 и боковое ребро DD_1 в точке D_2 . Найти объем той части параллелепипеда, которая расположена под секущей плоскостью, если известно, что $CC_2 = c$.
- ▶ 4. Известно, что 5100 шаров, из которых 300 красных, а остальные — белые, разложены в некотором числе ящиков так, что в каждом ящике находится не более трех шаров красного цвета. Доказать, что найдутся два ящика, содержащие одинаковое число шаров (белых и красных в совокупности).

Филологический факультет

(отделение структурной и прикладной лингвистики)

- ▶ 1. Сумма, равная 53 коп., составлена из трехкопеечных и пятикопеечных монет, общее число которых меньше 15. Если в этом наборе монет трехкопеечные монеты заменить пятикопеечными, а пятикопеечные — трехкопеечными, то полученная в результате сумма уменьшится по сравнению с первоначальной, но не более, чем в 1,5 раза. Сколько трехкопеечных монет было в наборе?
- ▶ 2. Плоскость, не содержащая вершин правильной n -угольной пирамиды, делит совокупность этих вершин на две части. Сколькими способами можно осуществить подобное деление?
- ▶ 3. Найти минимальное значение следующего выражения $\cos 2x - 8 \cos x$.
- ▶ 4. Можно ли вокруг четырехугольника $ABCD$ описать окружность, если $\angle ADC = 30^\circ$, $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 6$?
- ▶ 5. Решить уравнение

$$\log_{x-1} \sqrt[4]{2x^2 - 8x + 9} = \frac{1}{2}.$$

Факультет психологии

- 1. Два экскаватора должны прорыть канал длиной 36 м. Первый экскаватор, начавший эту работу, проработал 2 часа, затем его сменил второй экскаватор, проработавший 3 часа, в результате чего весь канал был прорыт. Сколько метров канала роет за час первый экскаватор, если 24 м канала он роет за время, на 1 час большее, чем требуется на 24 м второму экскаватору?
- 2. Найти все корни уравнения

$$\log_3(2 \sin^2 x) - 1 = 2 \log_3 \cos x + \log_3 2.$$
- 3. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ (S — ее вершина). Сторона основания этой пирамиды равна a , высота пирамиды равна $a\sqrt{\frac{7}{2}}$. Пусть E — середина стороны основания AB , пусть также F — середина SB и G — середина SC (где B и C — соседние вершины основания пирамиды). Найти расстояние от центра шара, описанного около пирамиды $SABCD$, до плоскости, проведенной через точки E, F, G, H , где H — середина CD .
- 4. Найти все целые числа x , удовлетворяющие неравенству

$$3^{\frac{5}{2} \log_3(12-3x)} - 3^{\log_2 x} > 83.$$

1974 год

Механико-математический факультет

- 1. Решить уравнение

$$\sqrt{1 + \sin x} + \cos x = 0.$$
- 2. Решить неравенство

$$\sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)} < \log_5(5x^2 - 10x + 10).$$
- 3. Вокруг треугольника ABC описана окружность. Медиана AD продолжена до пересечения с этой окружностью в точке E . Известно, что $AB + AD = DE$, угол BAD равен 60° и $AE = 6$. Найти площадь треугольника ABC .
- 4. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро DC равно 9, и $BD = AD$. Ребро AC перпендикулярно к грани ABD . Сфера радиуса 2 касается грани ABC , ребра DC , а также грани DAB в точке пересечения ее медиан. Найти объем пирамиды.

- 5. Найти все действительные значения α , для каждого из которых существуют четыре целых числа x, y, u, v , удовлетворяющие равенствам

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (111 - \alpha)(\alpha - 89), \\ 50(u^2 - v^2) = \alpha(15u + 5v - \alpha). \end{cases}$$

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{\sin(1-x)} = \sqrt{\cos x},$$

удовлетворяющие условию $0 \leq x \leq 2\pi$.

- 2. Найти все действительные значения a , при которых каждое решение неравенства

$$\log_{1/2} x^2 \geq \log_{1/2}(x+2)$$

является решением неравенства

$$49x^2 - 4a^4 \leq 0.$$

- 3. Найти все значения x , удовлетворяющие одновременно следующим условиям:

$$\begin{cases} |x-2| + |x-3| = 1, \\ 813x - 974 \leq 163x^2. \end{cases}$$

- 4. Имеются три несообщающихся между собой резервуара, причем объем третьего не меньше объема второго. Первый резервуар имеет объем V и может быть заполнен первым шлангом за 3 часа, вторым шлангом — за 4 часа, третьим шлангом — за 5 часов. К каждому из резервуаров может быть подключен любой из этих трех шлангов. После того, как произведено подключение к каждому из резервуаров по одному шлангу каким-то способом, все шланги одновременно включаются. Как только какой-то резервуар наполнится, соответствующий шланг отключается и не может быть подключен в дальнейшем к другому резервуару. Заполнение считается окончанным, если наполнены все три резервуара. При самом быстром способе подключения заполнение окончится через 6 часов. Если бы все резервуары сообщались, то заполнение окончилось бы через 4 часа. Найти объемы второго и третьего резервуаров.

- 5. В треугольной пирамиде $SABC$ суммы трех плоских углов при каждой вершине B и C равны 180° и $SA = BC$. Найти объем пирамиды, если площадь грани SBC равна 100 см^2 , а расстояние от центра описанного шара до плоскости основания ABC равно 3 см.

Физический факультет

- 1. Решить уравнение

$$\sqrt{3} - \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \left(\frac{4\pi}{3} - x \right).$$

- 2. Решить неравенство

$$x^2 - 2|x + 1| < 0.$$

- 3. Решить уравнение

$$2\sqrt[3]{2\log_{16}^2 x} - \sqrt[3]{\log_2 x} - 6 = 0.$$

- 4. Два одинаковых правильных треугольника ABC и CDE со стороной 1 расположены на плоскости так, что имеют только одну общую точку C , и угол BCD меньше, чем $\pi/3$. Точка K — середина отрезка AC , точка L — середина отрезка CE , точка M — середина отрезка BD . Площадь треугольника KLM равна $\frac{\sqrt{3}}{5}$. Найти длину отрезка BD .
- 5. Даны две треугольные пирамиды $SABC$ и $NKLM$, все ребра которых равны a . Эти пирамиды имеют общую высоту SN (S — центр грани KLM и N — центр грани ABC). Кроме того, $KL \parallel BC$ и пирамиды расположены так, что плоскость, проходящая через KL и BC , пересекает отрезок SN . Найти объем общей части пирамид $SABC$ и $NKLM$.

Химический факультет

- 1. Решить уравнение

$$\sqrt{1 + \sqrt{\sin 2x}} + \sqrt{1 - \sqrt{\sin 2x}} = \sqrt{1 + \sqrt{\cos x}} + \sqrt{1 - \sqrt{\cos x}}.$$

- 2. Верно ли, что всякое решение неравенства $\log_2(8 + 8x - 5x^2) > 2$, будет решением неравенства $\log_2(2 + 2x - x^2) > 0$?
- 3. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами 3 и 4 вершина C прямого угла соединена с серединой D гипотенузы AB . Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD .
- 4. Двадцать четыре школьника разбились на две группы. Первая из них пошла в цирк, а вторая — в кино. При этом оказалось, что на цирк и кино было затрачено одинаковое количество денег. Если бы билет в цирк стоил на 20 копеек дешевле, а билет в кино — на 20 копеек дороже, то, истратив на билеты в цирк и на билеты в кино те же суммы денег, в цирк и в кино смогли бы пойти вместе 15 школьников. Если бы при прежней стоимости билетов вторая группа школьников пошла в цирк, а первая группа — в кино, то на билеты в цирк ушло бы на 19 руб. 20 коп. больше, чем на билеты в кино. Сколько стоили билеты в цирк и в кино?
- 5. На основании правильной треугольной пирамиды с высотой H и радиусом круга, вписанном в его основание, равным r , лежит шар, касающийся основания в его центре. Найти радиус шара, если плоскость, проведенная через вершину пирамиды и середины двух сторон основания, касается этого шара.

Геологический факультет
(отделение общей геологии)

- 1. Решить уравнение

$$\sqrt{x+8} - x + 2 = 0.$$

- 2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 3^{2x+1} - 3^{x+2} + 6 > 0, \\ 3^{2x+2} - 2 \cdot 3^{x+2} - 27 < 0. \end{cases}$$

- 3. Найти все решения уравнения

$$\log_2(\sin x \cos x) - \log_4 \operatorname{tg}^2 x + \log_{1/2} \cos 2x = 2,$$

удовлетворяющие условию $0 \leq x < 2\pi$.

- 4. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C . Угол CAB равен α . Биссектриса угла ABC пересекает катет AC в точке K . На стороне BC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке M . Найти угол AMK .
- 5. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . На продолжении ребра CD взята точка K так, что $KD : KC = 3 : 4$. На ребре SC взята точка L так, что $SL : LC = 2 : 1$. В каком отношении делит объем пирамиды плоскость, проведенная через точки K, B и L ?

Геологический факультет
(отделение геофизики)

- 1. Решить неравенство

$$(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) \geq 5.$$

- 2. Решить уравнение

$$\log_{16}(x^2 - 2x - 3)^2 - 2 \log_{16}(x^2 + x - 2) = \frac{1}{2}.$$

- 3. Определить, при каких целых значениях k система

$$\begin{cases} (\operatorname{arctg} x)^2 + (\arccos y)^2 = \pi^2 k, \\ \operatorname{arctg} x + \arccos y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

имеет решения и найти все эти решения.

- 4. В прямой круговой цилиндр с радиусом основания $r = 1$ см и высотой $H = \frac{12}{3+2\sqrt{3}}$ см вписаны три одинаковых шара так, что шары касаются верхнего основания цилиндра, его боковой поверхности и попарно друг друга. Найти объем прямого кругового конуса, основание которого совпадает с нижним основанием цилиндра и который касается всех трех шаров.
- 5. Дан треугольник ABC . Из вершины A проведена медиана AM , а из вершины B — медиана BP . Известно, что угол APB равен углу BMA ,

косинус угла ACB равен 0,8 и $BP = 1$ см. Найти площадь треугольника ABC .

Биологический факультет

- 1. Пристани A и B находятся на противоположных берегах озера. Пароход плывет из A в B и после десятиминутной стоянки в B возвращается в A , двигаясь в обоих направлениях с одной и той же постоянной скоростью 18 км/ч. В момент выхода парохода из A навстречу ему из B в A отправляется движущаяся с постоянной скоростью лодка, которая встречается с пароходом в 11 часов 10 минут. В 11 часов 25 минут лодка находится на расстоянии 3 км от A . Направляясь из B в A после стоянки, пароход догоняет лодку в 11 часов 40 минут. Определить время прибытия лодки в A .

- 2. Решить уравнение

$$5 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{\sin^2 x} + 4 \cdot 5^{\cos 2x} = 25^{(\sin 2x)/2}.$$

- 3. В правильном треугольнике ABC со стороной A точки E и D являются серединами сторон BC и AC соответственно. Точка F лежит на отрезке DC , отрезки BF и DE пересекаются в точке M . Найти длину отрезка MF , если известно, что площадь четырехугольника $ABMD$ составляет $5/8$ площади треугольника ABC .

- 4. Решить неравенство

$$\frac{\log_{1/3} \sqrt{x+3}}{\log_{1/3}(x+1)} < 1.$$

- 5. Найти все значения x , для которых величина $y = \frac{\pi}{3}(\sin x + \sqrt{3} \cos x)$ удовлетворяет уравнению

$$\log_4(\operatorname{tg} 2y - 3 \operatorname{ctg} y) = 1 + \frac{1}{2} \log_{1/2}(\operatorname{ctg} y - \operatorname{tg} y).$$

Факультет почвоведения

- 1. Из пункта A в пункт B движется с постоянной скоростью автомобиль. Навстречу автомобилю из пункта B в пункт A движется с постоянной скоростью мотоцикл, который выехал из пункта B одновременно с отправлением автомобиля из пункта A . Скорость автомобиля на 20 км/ч больше скорости мотоцикла. Через 1 час 30 минут автомобиль и мотоцикл встречаются. Найти расстояние между пунктами A и B , если это расстояние автомобиль проезжает на 1 час 15 минут быстрее мотоцикла.

- 2. Решить уравнение

$$\left((\log_2 x)^2 + 2 \log_{1/2} \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) (3 \log_8 x - 1) = 2 \left(\log_2 \frac{x}{2} \right) \cdot \log_2 (x^2).$$

- 3. Найти все решения уравнения

$$\frac{2(\cos x + \sin x) + 1 - \cos 2x}{2(1 + \sin x)} = \sqrt{3} + \sin x.$$

- 4. Найти все значения a , при которых неравенство

$$\frac{x - 2a - 1}{x - a} < 0$$

выполняется для всех таких x , что $1 \leq x \leq 2$.

- 5. На стороне AC остроугольного треугольника ABC взята точка D так, что $AD = 1$, $DC = 2$ и BD является высотой треугольника ABC . Окружность радиуса 2, проходящая через точки A и D , касается в точке D окружности, описанной около треугольника BDC . Найти площадь треугольника ABC .

Географический факультет

- 1. Из пункта A в пункт B , расположенный на противоположном берегу озера, одновременно вышли моторная лодка и катер. К моменту, когда катер прибыл в пункт B , моторная лодка прошла половину пути и была в 30 км от B . Известно, что если бы катер шел из A в B с бóльшей скоростью, увеличив ее на 3 км/ч, то лодка пришла бы в пункт B на 6 часов позднее катера. Найти скорость моторной лодки.

- 2. Найти все решения уравнения

$$\sin x + \cos \left(5x - \frac{9}{2}\pi \right) = \sqrt{3} \sin(3x + \pi).$$

- 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 25 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^{2y-2} - \frac{1}{5^{2x}}, \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{2x+y+14} = \sqrt{x+y+12}. \end{cases}$$

- 4. В треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны a , угол ABC равен 120° . В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке D . Вторая окружность имеет центром точку B и проходит через точку D . Найти площадь той части вписанного круга, которая находится внутри второго круга.

- 5. Найти все значения x , удовлетворяющие неравенству

$$\frac{\log_3 \left(x + \frac{4}{5} \right)}{\log_7 \left(x^2 - 2x + \frac{7}{15} \right)} < 0.$$

Экономический факультет
(отделение политической экономии)

- 1. Два поезда вышли из города A в город B и весь путь каждый из поездов прошел с постоянной скоростью. Второй поезд вышел на 5 часов позже первого и прибыл в B одновременно с первым поездом. За один час до прибытия в B расстояние между поездами составило 30 км, а когда первый поезд находился в середине пути, второй отставал от него на 225 км. Определить скорости поездов и расстояние между городами.

- 2. Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{x^2-1}}(2x^2 - 4x + 2) = 2.$$

- 3. В прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с прямым углом при вершине B вписан прямоугольный треугольник MNC так, что угол MNC прямой, точка N лежит на AC , а точка M — на стороне AB . В каком отношении точка N должна делить гипотенузу AC , чтобы площадь треугольника MNC составляла $3/8$ от площади треугольника ABC ?

- 4. При каких значениях величины h многочлен от x

$$y = x^4 + 2^{\cos h} \cdot x^2 + (\sin h + \operatorname{tg} h)x + 2^{\cos h} - 1$$

является квадратом квадратного трехчлена относительно x ?

Экономический факультет
(отделение планирования и экономической кибернетики)

- 1. Найти все действительные решения уравнения

$$\sqrt{2x^2 - 4x} = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}.$$

- 2. Сколько различных слов по пять букв в каждом слове можно составить из букв алфавита, состоящего из шести различных букв, причем в каждом слове ни одна из букв не встречается более двух раз, а любые две соседние буквы в каждом слове различны?

- 3. Найти все решения уравнения

$$\log_{(\cos 2x - \sin 2x)}(1 - \cos x - \sin x) = 1.$$

- 4. На плоскости даны три точки, лежащие на одной прямой (точка B лежит между точками A и C), причем $AB = 1$ м, $BC = 10$ м. Найти минимальное расстояние между такими точками P и Q , лежащими в данной плоскости по разные стороны от прямой AC , чтобы угол APB равнялся 45° , а угол BCQ равнялся 60° .

- 5. Найти все действительные значения величины h , при которых уравнение
- $$x(x+1)(x+h)(x+1+h) = h^2$$
- имеет четыре действительных корня.

Филологический факультет

(отделение структурной и прикладной лингвистики)

- 1. В бассейн проведены две трубы, которые при совместной работе наполняют бассейн за 40 минут. Сколько времени нужно одной первой трубе для наполнения бассейна, если известно, что второй трубе для наполнения бассейна требуется времени на 1 час больше, чем первой?
- 2. Решить уравнение

$$\sqrt{15+5x} - \sqrt{19-5x} = 2.$$

- 3. Решить уравнение
- $$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x.$$
- 4. Найти все значения x , удовлетворяющие неравенству
- $$u^3(x) - 6u^2(x) + 8u(x) \leq 0,$$

где $u(x) = \log_2 \frac{4x-1}{3x+1}$.

- 5. В правильную треугольную пирамиду с плоским углом α при вершине вписана правильная треугольная призма так, что нижнее основание призмы лежит на основании пирамиды, а верхнее основание совпадает с сечением пирамиды плоскостью, проходящей через верхнее основание призмы. Длина бокового ребра призмы равна длине стороны основания призмы. Найти отношение объемов пирамиды и призмы.

Факультет психологии

- 1. Каждый из трех туристов должен преодолеть 1000 км сначала пешком, а затем используя последовательно велосипед, мотоцикл и автомобиль. Второй турист прошел пешком $3/4$ пути, пройденного первым туристом и проехал на мотоцикле $2/3$ того, что проехал на мотоцикле первый. На велосипеде второй турист проехал 108 км, а на автомобиле — 708 км. Известно, что с велосипеда второй турист пересел на мотоцикл в том же месте, что и первый турист. Наконец, третий турист проходит пешком столько же, сколько прошел пешком второй, проезжает на велосипеде столько же, сколько проехал на велосипеде первый, а на мотоцикле и автомобиле проезжает оставшиеся 876 км. Определить, сколько километров прошел пешком и проехал на каждом из указанных видов транспорта первый турист.
- 2. Точки E, F, M расположены соответственно на сторонах AB, BC, AC треугольника ABC . Отрезок AE составляет $1/3$ стороны AB , опре-

зок BF составляет $1/6$ стороны BC , отрезок AM составляет $2/5$ стороны AC . Найти отношение площади треугольника EFM к площади треугольника ABC .

- 3. Решить систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(\pi y) = \frac{1 + \operatorname{tg}(\pi x)}{1 - \operatorname{tg}(\pi x)}, \\ 2x^2 + y^2 = \frac{2}{8}. \end{cases}$$

- 4. Доказать, что при всех a и b имеет место неравенство

$$\frac{5^{a+1}}{5^{2a} + 25} \leq 13 - 5b + \frac{1}{2}b^2,$$

и определить, при каких a и b достигается равенство.

1975 год

Механико-математический факультет

- 1. Решить неравенство

$$98 - 7x^2 + 5x - 48 \geq 49x^2 + 5x - 49.$$

- 2. Найти все пары действительных чисел (x, y) , удовлетворяющих условию $x > 0$ и системе уравнений

$$\begin{cases} \sin((x - \sqrt{\pi})^2 + y^2) = 0, \\ \log_{\sqrt{2}\pi} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2 \log_{2\pi} \sqrt{x^2 + y^2}} = 2. \end{cases}$$

- 3. Два равных равнобедренных треугольника ABC и DBE ($AB = BC = BD = BE$) имеют общую вершину B и лежат в одной плоскости так, что точки A и C находятся по разные стороны от прямой BD , а отрезки AC и DE пересекаются в точке K . Известно, что $\angle ABC = \angle DBE = \alpha < \frac{\pi}{2}$. В каком отношении прямая BK делит угол ABC ?
- 4. Сфера радиуса $3/8$ вписана в четырехугольную пирамиду $SABCD$, у которой основанием служит ромб $ABCD$, такой, что $\angle BAD = 60^\circ$; высота пирамиды, равная 1, проходит через точку K пересечения диагоналей ромба. Доказать, что существует единственная плоскость, пересекающая ребра основания AB и AD в некоторых точках M, N таких, что $MN = \frac{4\sqrt{3}}{5}$, касающаяся сферы в точке, удаленной на равные расстояния от точек M и N , и пересекающая продолжение отрезка SK за точку K в некоторой точке E . Найти длину отрезка SE .
- 5. Без помощи таблиц найти все значения x в промежутке $-0,5 < x < 1,5$, удовлетворяющие равенству

$$\log_2 \left(\sin 3x - \cos 2x - \frac{3}{10} \right) = \log_2 \left(\sin 7x - \cos 6x - \frac{3}{10} \right).$$

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 + 4x - 5} - 2x + 3 > 0.$$

- 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin(2x + \sin^2 y) = 0, \\ x - 3\sin^2 y = -2. \end{cases}$$

- 3. Дана прямоугольная трапеция. Известно, что некоторая прямая, параллельная основаниям, пересекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Определить основания исходной трапеции, если ее боковые стороны равны c и d ($c < d$).
- 4. Два грузовика доставили со склада на стройку одно и то же количество кирпича и одно и то же количество цемента, причем каждый из них доставлял сначала кирпич, а затем цемент, перевоза за каждую поездку груз одного и того же веса. Первый грузовик начал работу на 40 минут раньше, а закончил на 40 минут позже второго. При этом интервал времени между окончаниями доставки кирпича грузовиками был не более 20 минут.

Если бы первый грузовик начал работу на 1 час 5 минут раньше второго, уменьшив свою производительность на 10%, а производительность второго грузовика не изменилась, то второй грузовик закончил бы работу на 55 минут раньше первого, а интервал времени между окончаниями доставки кирпича грузовиками был бы не менее 25 минут.

Если бы производительность первого грузовика уменьшилась на 2 тонны в час, а производительность второго грузовика не изменилась, то первый грузовик затратил бы на выполнение всей работы в два раза больше времени, чем второй грузовик на доставку кирпича. Сколько всего цемента было доставлено на стройку?

- 5. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Скрещивающиеся ребра AC и BD этой пирамиды перпендикулярны. Ребра AD и BC также перпендикулярны. Ребра AB и CD равны. Все ребра этой пирамиды касаются шара радиуса r . Найти площадь грани ABC .

Физический факультет

- 1. Решить уравнение

$$\cos(3x + 5) - \cos(x + 1) = 2\sin(x + 2).$$

- 2. Решить уравнение

$$9^{\log_{1/3}(x+2)} = 7^{\log_{1/7}(2x^2+3x+2)}.$$

- 3. Решить неравенство

$$\frac{2x^2 - 11x + 15}{2^x - 6} < 0.$$

- 4. В треугольнике ABC угол BAC тупой и $AB = AC$. Пусть D — точка пересечения биссектрисы угла ABC со стороной AC . Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на сторону BC , а E — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на сторону BC . Через точку D проведен также перпендикуляр к BD до пересечения со стороной BC в точке F . Известно, что $ME = FC = a$. Найти площадь треугольника ABC .
- 5. В треугольнике ABC угол ACB прямой, $AC = a$, $BC = 3a$. Через точку B проведена в пространстве прямая, перпендикулярная отрезку BC и на этой прямой взята точка D так, что $BD = a$. Двугранный угол между полуплоскостями, которым принадлежат треугольники BCD и ABC равен $\pi/3$. Шар касается отрезка AB в такой точке P , что $AB = 3 \cdot AP$ и касается отрезка CD в такой точке Q , что $CD = 3 \cdot QD$. Найти радиус шара.

Химический факультет

- 1. Решить неравенство

$$5^{2x-10-3\sqrt{x-2}} - 4 \cdot 5^{x-5} < 5^{1+3\sqrt{x-2}}.$$

- 2. На второй остановке вошло в автобус на 12 человек больше, чем вышло на третьей остановке, а на третьей вошло на 3 человека меньше, чем вышло на четвертой. Вошло на четвертой вдвое больше, чем на второй. На четвертую остановку приехало на тринадцать человек больше, чем уехало с первой. Что больше, и насколько; число человек, вошедших на второй остановке, или число человек, вышедших на второй остановке?

Известно, что если бы на второй остановке вышло вдвое больше человек, чем вошло на третьей, то с четвертой остановки уехало бы на 9 человек больше, чем с первой.

- 3. Дан треугольник ABC , в котором $BC = 5$. Окружность проходит через вершины B и C и пересекает сторону AC в точке K так, что $CK = 3$, $KA = 1$. Известно, что косинус угла ACB равен $4/5$. Найти отношение радиуса данной окружности к радиусу окружности, вписанной в треугольник ABK .
- 4. В тетраэдре $SABC$ грань SAC перпендикулярна плоскости ABC . Кроме того, $SA = SC = 1$ и угол при вершине B треугольника ABC прямой. Шар касается плоскости ABC в точке B , а грани SAC — в точке S . Найти радиус шара.

- 5. Найти все значения параметра b , при которых система
- $$\begin{cases} \cos(y - b) - 2 \cos x = 0, \\ \log_2(by - y^2) = 2 \log_4(-x) - \log_{1/2}(3y) \end{cases}$$
- имеет нечетное число решений.

Геологический факультет
(отделение общей геологии)

- 1. Решить уравнение

$$4 \cos 4x + 6 \sin^2 2x + 5 \cos 2x = 0.$$

- 2. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми равно 100 км, одновременно выехали два автобуса. Пройдя половину пути, первый автобус остановился, простоял 45 минут и поехал дальше со скоростью на 10 км/час меньше первоначальной. Второй автобус весь путь от A до B прошел с постоянной скоростью за 4 часа. Найти первоначальную скорость первого автобуса, если он прибыл в пункт B на час раньше второго.

- 3. Решить неравенство

$$\log_{10} |2x + 3|^3 + 2 \log_{(2x+3)^3} 10 < 3.$$

- 4. В треугольнике ABC известны стороны $AB=6$ см, $BC=4$ см, $AC=8$ см. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D . Через точки A, D, C проведена окружность, пересекающая сторону BC в точке E . Найти площадь треугольника ADE .

- 5. Решить неравенство

$$\sqrt{x+5} < 1 + \sqrt{-x-3} + \sqrt{(x+5)(-x-3)}.$$

Геологический факультет
(отделение геофизики)

- 1. Решить уравнение

$$(x-1)^2 + |x-1| - 2 = 0.$$

- 2. Решить неравенство

$$\log_{9x^2-6x+1} \left(\frac{1}{9x^2-18x+8} \right) < -1.$$

- 3. Найти все решения системы

$$\begin{cases} 5^{\sin x + \operatorname{tg} y} = 1, \\ 7^{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 y} = 7, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям: $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$.

- 4. На отрезке AB длины R см как на диаметре построена окружность. Вторая окружность такого же радиуса, что и первая, имеет центр в

точке A . Третья окружность касается первой внутренним образом, второй — внешним образом, а также касается отрезка AB . Найти радиус третьей окружности.

- 5. Дан правильный тетраэдр $PABC$ с длиной ребра a см. Через точки C, E, M и P , где E — середина ребра AB , а M — середина ребра AC , проведена сфера. Найти радиус этой сферы.

Биологический факультет

- 1. Два насоса, работая одновременно, наполнили водой бассейн емкостью 80 м^3 . Если увеличить производительность первого насоса в $4/3$ раза, то он один сможет наполнить бассейн, работая на два часа дольше, чем работали оба насоса вместе. Сколько кубометров воды в час перекачивает второй насос?

- 2. Найти все значения параметра p , при которых квадратное уравнение

$$(3x)^2 + \left(3^{\frac{1}{p}+3} - 15\right)x + 4 = 0$$

имеет ровно одно решение.

- 3. Отрезок AB есть диаметр круга, а точка C лежит вне этого круга. Отрезки AC и BC пересекаются с окружностью в точках D и M соответственно. Найти угол CBD , если площади треугольников DCM и ABC относятся как $1:4$.

- 4. Решить уравнение

$$\sin x - 2 \sin 2x + \sin 3x = |1 - 2 \cos x + \cos 2x|.$$

- 5. Найти все целые числа n , удовлетворяющие неравенству

$$\log_{(2 \cos(2\pi/7) - n + 8)} \left(\frac{\sqrt{n+5} - 1}{\sqrt{10-n}} \right) \geq 0.$$

Факультет почвоведения

- 1. Два экскаватора должны вырыть три одинаковых котлована. Если они будут работать вместе, то выроют их за два дня. Первый экскаватор может вырыть один такой котлован на день быстрее второго. В один из дней первый экскаватор работал полдня, а второй работал весь день. Какая часть всей работы была выполнена за этот день?

- 2. Найти все значения переменной x , при которых выражение

$$3 + \sin^2 2x - 2 \sin^2 x$$

достигает своего наибольшего значения.

- 3. Решить уравнение

$$x + 27^{\frac{x}{2} |\log_3 \sqrt{x}|} = \frac{10}{3}.$$

- 4. В параллелограмме лежат две окружности, касающиеся друг друга и трех сторон параллелограмма каждая. Радиус одной из окружностей равен 1. Известно также, что один из отрезков стороны параллелограмма от вершины до точки касания равен $\sqrt{3}$. Найти площадь параллелограмма.
- 5. Доказать без помощи таблиц и калькулятора, что

$$\log_2 7 + \left(3 + \cos \frac{15}{7} \right) \log_7 2 < 4.$$

Географический факультет

- 1. Бассейн может наполняться водой с помощью двух насосов разной производительности. Если половину бассейна наполнить, включив лишь первый насос, а затем, выключив его, продолжать наполнение с помощью второго насоса, то весь бассейн наполнится за 2 часа 30 минут. При одновременной работе обоих насосов бассейн наполнится за 1 час 12 минут. Какую часть бассейна наполняет за 20 минут работы насос меньшей производительности?
- 2. Решить уравнение

$$\sin^2 x - \cos x \cos 3x = \frac{1}{4}.$$

- 3. Решить уравнение

$$49^{2 \log_4 (x-2)} \cdot 7^{\log_{\sqrt{2}} \sqrt{12-x}} = 49^{\log_2 \sqrt{(1-\frac{x}{2})^8}} \cdot 7^{4 \log_2 x}.$$

- 4. В треугольнике ABC биссектриса AK перпендикулярна медиане BM , а угол ABC равен 120° . Найти отношение площади треугольника ABC к площади описанного около этого треугольника круга.
- 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} \frac{x-5}{2}, \\ 2x + 3 \log_{(4x/\pi)} \sqrt[3]{\frac{\pi^2 x}{16}} = \frac{3}{4} \log_{\sqrt[4]{\frac{4x}{\pi}}} \left(\frac{4x^2}{\pi} \right) - 4^{3 \log_8 \sqrt{x}}. \end{cases}$$

Экономический факультет

(отделение политической экономии)

- 1. Три бригады, работая вместе, должны выполнить некоторую работу. Известно, что первая и вторая бригады вместе могут выполнить ее за 36 минут быстрее, чем одна третья бригада. За то время, за какое могут выполнить эту работу вместе первая и третья бригады, вторая бригада может выполнить только половину работы. За то время, за какое эту работу могут выполнить вместе вторая и третья бригады, первая может

выполнить $2/7$ этой работы. За какое время выполнят работу все три бригады вместе?

- 2. Решить уравнение

$$(2 \cos x - \sin x - 2)(\sin x - 1) = \cos^2 x.$$

- 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3 + \log_x(1 - y)} = \log_x x(1 - y), \\ xy = -6. \end{cases}$$

- 4. Периметр равнобокой трапеции, описанной около круга, равен p . Найти радиус этого круга, если известно, что острый угол при основании трапеции равен α .

- 5. При каком значении x выражение

$$x^2 + 3 + \frac{1}{x^2 + 4}$$

принимает наименьшее значение?

Экономический факультет

(отделение планирования и экономической кибернетики)

- 1. Найти все действительные решения уравнения

$$\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^{\sin x} + \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right)^{\cos x} = \frac{10}{3}.$$

- 2. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Диагонали AC и BD пересекаются в точке O , а прямые AB и CD — в точке K . Прямая KO пересекает стороны BC и AD в точках M и N соответственно, и угол BAD равен 30° . Известно, что в трапеции $ABMN$ и $NMCD$ можно вписать окружность. Найти отношение площадей треугольника BKC и трапеции $ABCD$.

- 3. Решить неравенство

$$\sqrt{9 - \frac{9}{x}} < x - \sqrt{x - \frac{9}{x}}.$$

- 4. Зоопарк ежедневно распределяет 111 кг мяса между лисами, леопардами и львами. Каждой лисе полагается 2 кг мяса, леопарду — 14 кг, льву — 21 кг. Известно, что у каждого льва бывает ежедневно 230 посетителей, у каждого леопарда — 160, у каждой лисы — 20. Сколько должно быть лис, леопардов и львов в зоопарке, чтобы ежедневное число посетителей у этих животных было максимальным?

Филологический факультет

(отделение структурной и прикладной лингвистики)

- 1. Из пункта A в пункт B выехал автобус, а одновременно с этим из пункта B навстречу автобусу выехал такси. Через некоторое время автобус встретился с такси в пункте C , а еще через такое же время автобус встретился в пункте D с велосипедистом, выехавшим из пункта B в момент встречи автобуса с такси. Известно, что после встречи с автобусом велосипедист затратил на поездку в пункт C времени в 4 раза больше, чем автобус до конца своего пути. Во сколько раз скорость такси превосходит скорость велосипедиста?

- 2. Найти все значения x , удовлетворяющие уравнению

$$2 \log_{2+a^2}(4 - \sqrt{7+2x}) = \log_{2+a^2x^2}(4 - 3x)$$

при любом действительном a .

- 3. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{6} = \frac{2 \operatorname{ctg} x + 3}{\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

- 4. Найти сумму корней уравнения

$$\cos 2x + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - 3 \cos^3 x}{\cos^2 x},$$

принадлежащих отрезку $1 \leq x \leq 50$.

- 5. В прямой круговой конус с углом раствора 60° вложены три одинаковых шара радиуса r так, что каждый шар касается двух остальных, боковой поверхности конуса и плоскости основания. Найти радиус R основания конуса.

Факультет психологии

- 1. Бригаде из трех трактористов поручено вспахать поле. Если бы работали только первый и второй трактористы, то за один день было бы вспахано 45% поля. Если бы работали только второй и третий трактористы, то за два дня было бы вспахано 75% поля. Наконец, если бы работали только первый и третий трактористы, то за три дня было бы вспахано 97,5% поля. За сколько дней данное поле вспахал бы каждый тракторист в отдельности, если считать интенсивности работы каждого тракториста постоянными?

- 2. Вокруг треугольника ABC со сторонами $AB = 10\sqrt{2}$ см, $AC = 20$ см и углом B , равным 45° , описана окружность. Через точку C проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение стороны AB в точке D . Найти площадь треугольника BCD .

- 3. Решить уравнение

$$2 - 3 \operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{5 - 6 \cos^2 x}{\cos^2 x}}.$$

- 4. Решить неравенство

$$\log_{(x-2)} \frac{1}{5} \geq \log_{\frac{x-3}{x-5}} \frac{1}{5}.$$

- 5. Найти все целые положительные решения уравнения

$$2x^2 + 2xy - x + y = 112.$$

1976 год

Механико-математический факультет

- 1. Решить уравнение

$$\log_{\sin(-x)} \left(\sin \frac{x}{2} + \sin \frac{3x}{2} \right) = 1.$$

- 2. Решить неравенство

$$\frac{7}{9^x - 2} \geq \frac{2}{3^x - 1}.$$

- 3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C , углом B равным 30° и катетом $CA = 1$ проведена медиана CD . Кроме того, из точки D под углом 15° к гипотенузе проведена прямая, пересекающая отрезок BC в точке F . Найти площадь треугольника CDF . Указать ее приближенное значение в виде десятичной дроби с точностью до 0,01.

- 4. Три шара, среди которых имеются два одинаковых, касаются плоскости P и, кроме того, попарно касаются друг друга. Вершина прямого кругового конуса принадлежит плоскости P , а ось конуса перпендикулярна этой плоскости. Все три шара лежат вне конуса, причем каждый из них касается некоторой образующей конуса. Найти косинус угла между образующей конуса и плоскостью P , если известно, что в треугольнике с вершинами в точках касания шаров с плоскостью один из углов равен 150° .

- 5. Действительные числа r, s и t таковы, что $r < s < t$. Кроме того, известно, что после подстановки каждого из трех чисел r, s, t вместо y в равенство $x^2 - (9 - y)x + y^2 - 9y + 15 = 0$ по меньшей мере одно из двух оставшихся чисел будет содержаться среди корней получившегося квадратного уравнения. Доказать, что $-1 < r < 1$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Стороны треугольника равны $\sqrt{\frac{5}{2}}$ и $\sqrt{2}$, а угол между ними равен 60° . Квадрат имеет сторону $2\sqrt{\frac{5}{3}}$. Определить, что больше: площадь треугольника или площадь квадрата.

- 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x - \log_2 y = 2, \\ 2^x \cdot \log_2 y = 1. \end{cases}$$

- 3. Решить уравнение

$$\sqrt{1 - \operatorname{tg} x + \sin^2 x} - \sqrt{\sin^2 x - \frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{9}{5} - \operatorname{tg} x}.$$

- 4. На плоскости даны две пересекающиеся окружности. Первая имеет центр в точке O_1 и радиус равный 4, вторая — центр в точке O_2 и радиус, равный $2\sqrt{3}$. Отрезок O_1O_2 пересекает обе окружности, а угол KO_1O_2 равен 30° (где K — одна из точек пересечения окружностей). Вершина A равностороннего треугольника ABC является точкой пересечения второй окружности и отрезка O_1O_2 , а сторона BC — хордой первой окружности, перпендикулярной к прямой O_1O_2 . Найти площадь треугольника ABC , если известно, что $AB < 4$.
- 5. Найти все положительные числа a , для которых не существует действительных чисел x и y , одновременно удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} 16x^2 + (4 - 5a)(x^3 + x) - \frac{5}{4}a(x^2 + 1)^2 \leq 0, \\ \frac{4x}{x^2 + 1} = \frac{1 - y}{5y} + \frac{ay}{1 - y} + \frac{a}{4}, \\ 0 < y < 1. \end{cases}$$

Физический факультет

- 1. Решить уравнение

$$\cos 2x + 4 \sin^3 x = 1.$$

- 2. Решить неравенство

$$1 - 2 \log_{(1/9)}(x + 2) > \log_3(x - 3).$$

- 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{\frac{x-y}{2}} + 3^x \cdot 3^{-y} = 12, \\ 3^x + 3^{-y} = 10. \end{cases}$$

- 4. В треугольнике ABC , все стороны которого различны, биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке D . Известно, что $AB - BD = a$, $AC + CD = b$. Найти длину отрезка AD .

- 5. Все плоские углы трехгранного угла $SABC$ (S — вершина) прямые. На грани ASC взята точка D на расстоянии 5 см от вершины S и на расстоянии 3 см от ребра SC . Из некоторой точки M , расположенной внутри трехгранного угла $SABC$, в точку D направлен луч света. Луч образует угол $\pi/4$ с ребром SB и угол $\pi/3$ с ребром SC . Луч зеркально отражается от граней $SABC$ сначала в точке D , затем — в точке F . Найти длину отрезка EF .

Химический факультет

- 1. Из города A в город B одновременно выехали автомобиль и мотоцикл, а в тот момент, когда мотоцикл преодолел шестую часть пути, выехал велосипедист. К моменту прибытия автомобиля в город B велосипедист проехал четвертую часть пути. Скорость мотоцикла на 21 км/ч меньше скорости автомобиля и на столько же больше скорости велосипедиста. Найти скорость автомобиля.

- 2. Решить неравенство

$$4x^2 + \sqrt[4]{14} > |x| \sqrt[4]{224} + 1.$$

- 3. В трапеции $ABCD$ (AB — основание) величины углов DAB , BCD , ADC , ABD , и ADB образуют арифметическую прогрессию (в том порядке, в котором они написаны). Найти расстояние от вершины C до диагонали BD , если высота трапеции равна h .

- 4. Найти все решения уравнения

$$4 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + \sqrt{3}(1 - \cos x - \sin x) = 4 - \sin x - 3 \cos x,$$

которые являются и решениями уравнения

$$\operatorname{ctg}^2 x + \left(\frac{4}{3} + \sqrt{3} \right) \cos x = 1 - \sin x.$$

- 5. В кубе $ABCD A' B' C' D'$, где AA' , BB' , CC' , DD' — параллельные ребра, плоскость P проходит через диагональ $A'C'$ грани куба и середину ребра DD' . Найти расстояние от середины ребра CD до плоскости P , если ребро куба равно 4 см.

Геологический факультет

(отделение общей геологии)

- 1. Найти все решения уравнения

$$4 + \log_2 x^2 = \log_x 64.$$

- 2. В бассейне имеется 6 м³ воды. Вода из бассейна может выливаться через две трубы. Если одновременно открыть обе трубы, то вся вода вытечет за 2 часа. Если открыть вначале большую трубу, а потом, когда вытечет одна треть воды, закрыть большую и одновременно открыть меньшую

трубу, то вся вода вытечет через 5 часов после того, как была открыта большая труба. Определить, какое количество воды вытекает из каждой трубы за 1 час.

- 3. Найти все решения уравнения

$$\frac{|1 - \cos x|}{1 - \cos x} \cdot \sin x = 4 \sin^2 x \cdot \cos x.$$

- 4. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3 - \sqrt{-1 - y} = \sqrt{x + y}, \\ \sqrt{x + y} + 2 = \sqrt{-3 + x}. \end{cases}$$

- 5. В параллелограмме $ABCD$ известны длины стороны $AB = \sqrt{2}$ и диагонали $BD = 2$. Окружность радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке B , лежащая в плоскости параллелограмма, пересекается со второй окружностью радиуса 1, проходящей через точки A и C . Известно, что касательные, проходящие через одну из точек пересечения окружностей, взаимно перпендикулярны. Найти диагональ AC .

Геологический факультет (отделение геофизики)

- 1. Из пункта A в пункт B , расположенный ниже по течению реки на расстоянии 24 км, одновременно вышли теплоход и плот. Теплоход, прибыв в B , простоял там 7 часов и, отправившись обратно в A , встретил плот на середине пути от A до B . Найти скорость теплохода в стоячей воде, если скорость плота совпадает со скоростью течения реки и равна 1 км/ч.

- 2. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}} \cdot (\sin^2 x + \operatorname{ctg} y - 1) = 0, \\ \cos^2 x + \frac{1}{4} \operatorname{tg} y - 1 = 0. \end{cases}$$

- 3. Найти все решения неравенства

$$\log_{10-x} \left(\frac{19}{2} - x \right)^2 > 2 \log_{x-9} (x - 9).$$

- 4. В параллелограмме $ABCD$ со сторонами $AD = 5$ и $AB = 4$ проведен отрезок EF , соединяющий точку E стороны BC с точкой F стороны CD . Точки E и F выбраны так, что $BE : EC = 1 : 2$, $CF : FE = 1 : 5$. Известно, что точка M пересечения диагонали AC с отрезком FE удовлетворяет условию $MF : ME = 1 : 4$. Найти диагонали параллелограмма.
- 5. Найти все отрицательные числа p , при которых существует единственное

действительное число x , удовлетворяющее следующим условиям:

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg} \pi \left(x + \frac{1}{4}\right) &= 1, \\ (4x - 16p + 23)(-2p - 33 - 6x) &> 0.\end{aligned}$$

Географический факультет

- ▶ 1. Рабочий шестого разряда делает в час на 4 детали больше, чем рабочий четвертого разряда. Первая бригада, в которой трое рабочих шестого и один четвертого разряда, сделала 252 детали на 2 часа раньше, чем вторая бригада, состоящая из трех рабочих четвертого разряда и одного рабочего шестого разряда. Сколько деталей в час делает один рабочий шестого разряда?
- ▶ 2. Решить уравнение $4\sqrt{x+1} = |2x-1| + 3$.
- ▶ 3. Решить уравнение $1 - \sin 2x = -(\sin x + \cos x)$.
- ▶ 4. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{\log_2 x}}(4x^2 - 20x + 22) < 0$.
- ▶ 5. В трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD , а диагональ DB перпендикулярна боковой стороне AB . Продолжения боковых сторон AB и DC пересекаются в точке K , образуя треугольник AKD с углом 45° при вершине K . Площадь трапеции $ABCD$ равна S . Найти площадь треугольника AKD .

Биологический факультет

- ▶ 1. Решить уравнение $|\sin x + \cos x| = 1 + 2 \sin 2x$.
- ▶ 2. Решить неравенство $-3 \log_{(x-1)} \frac{1}{3} + \log_{\frac{1}{3}}(x-1) > 2|\log_{\frac{1}{3}}(x-1)|$.
- ▶ 3. Имеются две смеси — № 1 и № 2, составленные из одних и тех же веществ А, Б, В, но взятых в различных весовых соотношениях. В смеси № 1 вещества В в девять раз меньше, чем вещества А и в два раза меньше, чем вещества Б. Соединив 6 кг смеси № 1 с тремя кг смеси № 2 и добавив 1 кг вещества А, получим новую смесь, в которой вещества А в шесть раз больше, чем вещества Б, а вещества В столько же, сколько вещества Б. Требуется определить весовое соотношение веществ А, Б, В в смеси № 2.
- ▶ 4. Дана трапеция $ABCD$, сторона AB которой перпендикулярна основаниям BC и AD . На стороне AB как на диаметре построена окружность

радиуса $\sqrt{6}$, которая касается стороны CD . Другая окружность радиуса $\sqrt{2}$ касается сторон AD и CD и пересекается с первой окружностью, имея с ней общую хорду длины $\sqrt{6}$. Центры обеих окружностей расположены по разные стороны от общей хорды. Найти площадь трапеции $ABCD$.

- 5. Доказать, что уравнение

$$\sqrt{x} = -x^2 + 8x - 15$$

не имеет решений.

Факультет почвоведения

- 1. Из пункта A в пункт B одновременно отправились пешеход и велосипедист. Прибыв в пункт B , велосипедист отдохнул 2 часа и отправился обратно с прежней скоростью. К тому моменту, когда пешеход пришел в пункт B , велосипедист проехал половину пути из B в A . Найти скорость пешехода, если известно, что она на 12 км/ч меньше скорости велосипедиста, а расстояние между A и B равно 24 км.

- 2. В прямоугольном треугольнике меньший угол равен α . Перпендикулярно гипотенузе проведена прямая, делящая треугольник на две равновеликие части. Определить, в каком отношении эта прямая делит гипотенузу.

- 3. Решить уравнение

$$4 \sin^2 2x - 2 \cos^2 2x = \cos 8x.$$

- 4. Найти все значения параметра α , при которых больший корень уравнения

$$x^2 + \frac{x+4}{\sqrt{3}} \sin 2\alpha - 16 = 0$$

на $\sqrt{\frac{2}{3}}$ больше, чем квадрат разности корней уравнения

$$x^2 - x \sin \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{4} - 1 = 0.$$

- 5. Решить неравенство

$$\log_x \sqrt[6]{3} (3x^6 + 2x^2 - 6) > 6.$$

Экономический факультет

(отделение политической экономии)

- 1. Через 2 часа после того, как первый трактор начал пахать поле, к нему присоединился второй, и они вместе закончили вспашку. Если бы тракторы поменялись ролями, то они закончили бы вспашку на 24 минуты позднее. Сколько времени тракторы работали вместе, если известно, что первый может вспахать четверть поля на 3 часа быстрее, чем второй — треть поля.

- 2. Решить уравнение $3 \operatorname{tg} x = 2\sqrt{5} \cos \frac{x}{2}$.

- 3. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 40$ и $BC = 35$. Кроме того, угол BAC равен 60° . Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABD , где BD — биссектриса угла ABC .
- 4. Решить систему уравнений
- $$\begin{cases} (x^2 + 5)^{3/2} \operatorname{tg}^2 2y = 9, \\ \frac{1}{2} \log_{\operatorname{tg} 2y} (x^2 + 5) - 2 \log_{\operatorname{tg} 2y} 3 = 2. \end{cases}$$

- 5. Решить уравнение

$$13x - 3x^2 - \frac{x}{\sqrt{x-1}} - \frac{|4-x|}{\sqrt{x-1}} + |4-x| = 3x|4-x| - \frac{4}{\sqrt{x-1}} + 4.$$

Экономический факультет

(отделение планирования и экономической кибернетики)

- 1. Решить неравенство

$$(\lg x)^4 - 5(\lg x)^2 + 6 < 0.$$

- 2. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2(x-y) - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}(x-y) + 1 = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $-\pi \leq y \leq 0$.

- 3. В треугольнике ABC задана точка M на стороне AC , соединенная с вершиной B прямолинейным отрезком MB . Известно, что $AM = 6$, $MC = 2$, $\angle ABM = 60^\circ$, $\angle MBC = 30^\circ$. Найти площадь треугольника ABC .
- 4. Основание ABC треугольной пирамиды $SABC$ является прямоугольным треугольником площадью в 16 м^2 ; угол ACB — прямой. Ребро SC перпендикулярно основанию ABC и равно $0,9 \text{ м}$. Какова наименьшая возможная при этих условиях площадь грани ASB ?

Филологический факультет

(отделение структурной и прикладной лингвистики)

- 1. Автоматическая линия выпускает за 600 операций три партии шин для легковых автомобилей и 11 партий шин для грузовых автомобилей. Если бы эта автоматическая линия изготавливала только шины для грузовых автомобилей и изготовила столько партий таких шин, сколько операций она тратит на изготовление партии шин для легковых автомобилей, то этой линии потребовалось бы не менее 2727 операций. Сколько операций требуется ей для изготовления одной партии шин для грузовых автомобилей?
- 2. Найти все целые z , удовлетворяющие неравенству $\sqrt[6]{z+1} < \sqrt[6]{6-z}$.

- 3. Решить уравнение

$$\log_2 \left(5 + 3 \cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sin^2 \left(2x - \frac{2\pi}{3} \right).$$

- 4. Решить уравнение

$$\log_2 (2 \sin^2 2x + 1) - 2 \log_2 \cos x = 1 + \log_2 5.$$

- 5. В шар вписана прямоугольная призма, в основании которой — правильный треугольник, а высота призмы равна стороне основания. Найти отношение объема этой призмы к объему вписанной в тот же шар правильной шестиугольной пирамиды, боковое ребро которой равно удвоенной стороне основания.

Факультет психологии

- 1. Двое рабочих, работая совместно, за один час выполняют три четверти всей работы. Если первый рабочий выполнит одну четвертую часть всей работы, а второй рабочий, сменив первого, выполнит половину всей работы, то вместе они проработают 2,5 часа. За сколько часов каждый рабочий может выполнить всю работу, если за один час работы первого рабочего и 0,5 часа работы второго рабочего будет выполнено больше половины всей работы?
- 2. Круг радиуса 6 см лежит внутри полукруга радиуса 24 см и касается середины диаметра полукруга. Найти радиус меньшей окружности, касающейся заданных круга, полукруга и диаметра полукруга.

- 3. Решить уравнение

$$x^{\log_{10} x} = 5 \cdot 2^{(\log_{10} x^2 - 1)}.$$

Доказать, что все его корни являются рациональными числами.

- 4. Найти все корни уравнения

$$\sqrt{5 + 4 \sin x - 4 \cos^2 x} = 2 + \cos 2x.$$

- 5. Из всех решений (x, y) уравнения

$$x^2 y - x^2 + 4xy + 6y - 2x = 3$$

найти те решения, для которых y принимает наименьшее значение.

1977 год

Механико-математический факультет

- 1. Решить неравенство

$$x \leq 3 - \frac{1}{x-1}.$$

- 2. Длины боковых сторон трапеции равны 3 и 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно 5/11. Найти длины оснований трапеции.

- 3. Доказать, что для функции $f(x) = \cos x \sin 2x$ справедливо неравенство

$$\min_{x \in [-\pi, \pi]} f(x) > -\frac{7}{9}.$$

- 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0, \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0, \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0. \end{cases}$$

- 5. Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC , длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найти угол и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC , а другая проходит через точку C и середину ребра AB .

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Решить неравенство

$$2^{2x+1} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+2} + 2 \geq 0.$$

- 2. В треугольнике, один из углов которого равен разности двух других, длина меньшей стороны равна 1, а сумма площадей квадратов, построенных на двух других сторонах, в два раза больше площади описанного около треугольника круга. Найти длину большей стороны треугольника.

- 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^2(-2x) - (3 - \sqrt{2}) \operatorname{tg} 5y = \frac{3\sqrt{2}-1}{2}, \\ \operatorname{tg}^2 5y + (3 - \sqrt{2}) \sin(-2x) = \frac{3\sqrt{2}-1}{2}. \end{cases}$$

- 4. Города A, B, C, D , расположенные так, что четырехугольник $ABCD$ — выпуклый, соединены прямолинейными дорогами AB, BC, CD, AD и AC . Их длины соответственно равны 6, 14, 5, 15 и 15 км. Из одного из этих городов одновременно вышли три туриста, идущие без остановок с постоянными скоростями. Маршруты всех туристов различны, причем каждый из них состоит из трех дорог и проходит через все города. Первый и второй туристы перед прохождением третьих дорог своих маршрутов встретились в одном городе, а третий закончил маршрут на час раньше туриста, закончившего маршрут последним. Найти скорости туристов, если скорость третьего больше скорости второго и на $1/2$ км/ч меньше

скорости первого, причем скорости всех туристов заключены в интервале от 5 км/ч до 8 км/ч.

- 5. Найти все значения параметра α ($0 \leq \alpha \leq \pi/2$), при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 3x^4 + 4x^3(\cos \alpha - \sin \alpha) - 3x^2 \sin 2\alpha$ на отрезке $-\sin \alpha \leq x \leq \cos \alpha$ принимает наименьшее значение.

Физический факультет

- 1. Решить уравнение $\sin^2 x = \frac{3}{4}$.
- 2. Найти все значения параметра a , для каждого из которых все числа x и y , удовлетворяющие системе уравнений
- $$\begin{cases} x + y = a, \\ 2x - y = 3, \end{cases}$$
- удовлетворяют также неравенству $x > y$.

- 3. Решить неравенство

$$\log_7 x - \log_x \left(\frac{1}{7} \right) \geq 2.$$

- 4. Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение высоты трапеции к радиусу описанной окружности равно $\sqrt{2/3}$. Найти углы трапеции.
- 5. Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) равна 1. На ребре AA_1 взята точка E так, что длина отрезка AE равна $1/3$. На ребре BC взята точка F так, что длина отрезка BF равна $1/4$. Через центр куба и точки E и F проведена плоскость α . Найти расстояние от вершины B_1 до плоскости α .

Химический факультет

- 1. Из пункта A в пункт B доставлена почта. Сначала ее вез мотоциклист; проехав $2/3$ расстояния от пункта A до пункта B , он передал почту ожидавшему его велосипедисту, который и доставил ее в пункт B (время, потребовавшееся на передачу почты, считается равным нулю). При этом почта была доставлена из пункта A в пункт B за промежуток времени, необходимый, чтобы проехать от пункта A до пункта B со скоростью 40 км/ч. Известно, что если бы мотоциклист и велосипедист выехали одновременно навстречу друг другу, то они встретились бы через промежуток времени, необходимый для проезда от пункта A до пункта B со скоростью 100 км/ч. Найти скорость мотоциклиста, считая, что она больше скорости велосипедиста.

- 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+y-1} = 1, \\ \sqrt{x-y+2} = 2y-2. \end{cases}$$

- 3. Решить неравенство

$$\log_{1/\sqrt{5}}(6^{x+1} - 36^x) \geq -2.$$

- 4. В выпуклом четырехугольнике длины диагоналей равны одному и двум метрам. Найти площадь четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющие середины его противоположных сторон, равны.

- 5. Найти все решения уравнения

$$2 - \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x = 4 \cos^2 3x,$$

удовлетворяющих неравенству $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) > 0$.

Биологический факультет

- 1. Решить уравнение

$$\sqrt{6-4x-x^2} = x+4.$$

- 2. В выпуклом четырехугольнике $MNLQ$ углы при вершинах N и L прямые, а величина угла при вершине M равна $\arctg \frac{2}{3}$. Найти длину диагонали NQ , если известно, что длина стороны LQ вдвое меньше длины стороны MN и на 2 м больше длины стороны LN .

- 3. Две бригады рабочих начали работу в 8 часов. Сделав вместе 72 детали, они стали работать раздельно. В 15 часов выяснилось, что за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая. На другой день первая бригада делала в 1 час на одну деталь больше, а вторая бригада в 1 час на одну деталь меньше. Работу бригады начали вместе в 8 часов и, сделав 72 детали, снова стали работать раздельно. Теперь за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая, уже к 13 часам. Сколько деталей в 1 час делала каждая бригада?

- 4. Решить уравнение

$$\sqrt{2} \cos\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{6} \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}\right) = 2 \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{3}\right) - 2 \sin\left(\frac{3x}{5} + \frac{\pi}{6}\right).$$

- 5. Найти все те значения параметра s , при которых корни уравнений $x^2 + \frac{3x}{s} + 2s = 0$ и $x^2 + \frac{12x}{s} - s = 0$ не перемежаются, т.е. оба уравнения имеют по два корня и между двумя корнями одного из уравнений нет ни одного корня другого уравнения.

Факультет почвоведения

- 1. Решить уравнение

$$2\sqrt{x+5} = x+2.$$

- 2. Решить уравнение

$$2 \lg \left(x + \frac{1}{2} \right) - \lg(x - 1) = \lg \left(x + \frac{5}{2} \right) + \lg 2.$$

- 3. Решить уравнение

$$|\sin x| = \sin x + 2 \cos x.$$

- 4. Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD . Длина диагонали AC равна a , а длина боковой стороны BC равна b . Найти площадь трапеции.
- 5. Рота солдат прибыла на парад в полном составе прямоугольным строем по 24 человека в ряд. По прибытии оказалось, что не все солдаты могут участвовать в параде. Оставшийся для парада состав роты перестроили так, что число рядов стало на 2 меньше прежнего, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Известно, что если бы все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы выстроить так, чтобы число солдат в каждом ряду равнялось числу рядов. Сколько солдат было в роте?

Геологический факультет (отделение общей геологии)

- 1. Решить неравенство

$$\frac{11 \cdot 3^{x-1} - 31}{4 \cdot 9^x - 11 \cdot 3^{x-1} - 5} \geq 5.$$

- 2. Два бегуна стартовали один за другим с интервалом в две минуты. Второй бегун догнал первого на расстоянии 1 км от точки старта, а пробежав от точки старта 5 км, он повернул обратно и встретился с первым бегуном. Эта встреча произошла через 20 минут после старта первого бегуна. Найти скорость второго бегуна.
- 3. Решить уравнение
- $$\sin^2 1,5x + \sin^2(\pi/4 - 2,5x) = \sin^2 5,5x + \sin^2(\pi/4 - 6,5x).$$
- 4. В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса BE прямого угла B делится центром O вписанной окружности в отношении $BO : OE = \sqrt{3} : \sqrt{2}$. Найти острые углы треугольника.
- 5. Найти радиус шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна b , а угол между боковыми ребрами равен α .

Геологический факультет (отделение геофизики)

- 1. В бак может поступать вода через одну из двух труб. Через первую трубу бак можно наполнить на час быстрее, чем через вторую трубу. Если бы емкость бака была больше на 2 м^3 , а пропускная способность второй трубы была бы больше на $4/3 \text{ м}^3$ в час, то для наполнения бака через вторую трубу понадобилось бы столько же времени, сколько требуется для пропуска 2 м^3 воды через первую трубу. Какова емкость бака, если известно, что за время его наполнения через вторую трубу, через первую трубу могло бы поступить 3 м^3 воды?

- 2. Решить неравенство

$$x^2 - |5x - 3| - x < 2.$$

- 3. Решить уравнение

$$\sin^2(2 + 3x) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \cos^2(2 - 5x) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 6x\right).$$

- 4. В окружность с центром O вписан треугольник ABC ($\angle A > \frac{\pi}{2}$). Продолжение биссектрисы AF угла A этого треугольника пересекает окружность в точке L , а радиус AO пересекает сторону BC в точке E . Пусть AH — высота треугольника ABC . Найти отношение площади треугольника OAL к площади четырехугольника $OEFL$, если известно, что $AL = 4\sqrt{2}$, $AH = \sqrt{2\sqrt{3}}$ и $\angle AEN = \frac{\pi}{3}$.

- 5. Найти все значения параметра k , при каждом из которых существует хотя бы одно общее решение у неравенств $x^2 + 4kx + 3k^2 > 1 + 2k$ и $x^2 + 2kx \leq 3k^2 - 8k + 4$.

Географический факультет

- 1. Решить неравенство

$$2|x + 1| > x + 4.$$

- 2. В треугольнике ABC сторона AB имеет длину 3 м, высота CD , опущенная на сторону AB , имеет длину $\sqrt{3}$ м. Основание D высоты CD лежит на стороне AB , длина отрезка AD равна длине стороны BC . Найти длину стороны AC .

- 3. Решить уравнение

$$4^x - 2^{x+1} = 3.$$

- 4. Грузовик и гоночный автомобиль выехали одновременно из пункта A и должны прибыть в пункт C . Грузовик, двигаясь с постоянной скоростью, доехал до пункта C , проделав путь, равный 360 км. Гоночный автомобиль поехал по окружной дороге и сначала доехал до пункта B , расположенного в 120 км от пункта A , двигаясь со скоростью, вдвое

большей скорости грузовика. После пункта B он увеличил свою скорость на 40 км/ч и проехал путь от пункта B до пункта C , равный 1000 км. Он прибыл в пункт C на 1 час 15 минут позднее грузовика. Если бы гоночный автомобиль весь свой путь от A до C ехал с той же скоростью, что и от пункта B до пункта C , то в пункт C он бы прибыл на 1 час позднее грузовика. Найти скорость грузовика.

- 5. Решить уравнение

$$2 \sin(3x + \pi/4) = \sqrt{1 + 8 \sin 2x \cos^2 2x}.$$

Экономический факультет (отделение политической экономии)

- 1. Для разгрузки парохода было выделено две бригады грузчиков. Если ко времени, за которое может самостоятельно разгрузить пароход первая бригада, прибавить время, за которое может самостоятельно разгрузить пароход вторая бригада, то получится 12 часов. Определить эти времена, если их разность составляет 45% времени, за которое обе бригады могут разгрузить пароход совместно.
- 2. Решить уравнение
- $$8 \sin^4 x + 13 \cos 2x = 7.$$
- 3. Найти наименьшее из расстояний от точки M с координатами $(0, -2)$ до точек (x, y) таких, что $y = \frac{16}{\sqrt{3x^3}} - 2$, $x > 0$.
- 4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки E, F, H, G являются соответственно серединами отрезков AB, BC, CD, AD и O — точка пересечения отрезков EH и FG . Известно, что $EH = a$, $FG = b$, $\angle FOH = \frac{\pi}{3}$. Найти длины диагоналей четырехугольника $ABCD$.
- 5. Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$25y^2 + \frac{1}{100} \geq x - axy + y - 25x^2$$

выполняется для любых пар (x, y) таких, что $|x| = |y|$.

Экономический факультет (отделение планирования и экономической кибернетики)

- 1. Решить уравнение $\frac{\cos x}{(x + \frac{\pi}{2})^2} = |\cos x|$.
- 2. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. В тот момент, когда он проехал $1/4$ пути от A до B , из B в A выехал мотоциклист, который, прибыв в A , не задерживаясь, повернул обратно и одновременно с велосипедистом прибыл в B . Время движения мотоциклиста до первой встречи с велосипедистом равно времени движения мотоциклиста из A в B . Считая скорости мотоциклиста при движении из A в B и из B в A

различными, найти, во сколько раз скорость мотоциклиста при движении из A в B больше скорости велосипедиста.

- 3. Найти все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + a), \\ (x + y)^2 = 14. \end{cases}$$
 имеет два решения.

- 4. Рассматриваются всевозможные трапеции, вписанные в окружность радиуса R , такие, что центр окружности лежит внутри трапеции, а одно из оснований равно $R\sqrt{3}$. Найти боковую сторону той из этих трапеций, которая имеет наибольшую площадь.

- 5. В треугольной пирамиде $SA_1A_2A_3$ на сторонах основания A_1A_2 , A_2A_3 и A_1A_3 выбраны соответственно точки K_1 , K_2 , K_3 так, что
$$A_1K_1 : K_1A_2 = A_2K_2 : K_2A_3 = A_3K_3 : K_3A_1 = 2.$$

Через середину ребра SA_1 параллельно основанию пирамиды проведена плоскость π , которая пересекает отрезки SK_1 , SK_2 , SK_3 в точках L_1 , L_2 , L_3 соответственно. Треугольник $L_1L_2L_3$ принят за верхнее основание прямой призмы, нижнее основание которой лежит в плоскости основания пирамиды. Найти объем призмы, если объем пирамиды $SA_1A_2A_3$ равен V .

Факультет психологии

- 1. Решить уравнение $3 \operatorname{tg}^2 x - 8 \cos^2 x + 1 = 0$.
- 2. На графике функции $y(x) = x^3 - 3x^2 - 7x + 6$ найти все точки, касательная в каждой из которых к этому графику отсекает от положительной полуоси Ox вдвое меньший отрезок, чем от отрицательной полуоси Oy . Определить длины отсекаемых отрезков.
- 3. Производительность первого автомобильного завода не превышает 950 машин в сутки. Производительность второго автомобильного завода первоначально составляла 95% от производительности первого завода. После ввода дополнительной линии второй завод увеличил производство машин в сутки на 23% от числа машин, выпускаемых в сутки на первом заводе и стал их выпускать более 1000 штук в сутки. Сколько автомобилей в сутки выпускал каждый завод до реконструкции второго завода? Предполагается, что каждый завод в сутки выпускает целое число машин.
- 4. В окружность радиуса 17 см вписан четырехугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны и находятся на расстоянии 8 см и 9 см от центра окружности. Найти длины сторон четырехугольника.
- 5. Найти все значения параметра a , при каждом из которых имеется хотя бы одна пара чисел (x, y) , удовлетворяющая условиям
$$\begin{cases} x^2 + (y + 3)^2 < 4, \\ y = 2ax^2. \end{cases}$$

Филологический факультет

(отделение структурной и прикладной лингвистики)

- ▶ 1. В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенной на 2, более, чем в три раза превышает число деталей во втором ящике. Утроенное число деталей в первом ящике превышает удвоенное число деталей во втором ящике, но менее, чем на 60. Сколько деталей в каждом ящике?
- ▶ 2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 5 - 2\sqrt{6}, \\ x + y = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$
- ▶ 3. Найти наименьший положительный корень уравнения $\cos(\pi x^2) = \cos(\pi(x^2 + 2x + 1))$.
- ▶ 4. Для каждого значения параметра a определить число решений уравнения $\sqrt{2|x| - x^2} = a$.
- ▶ 5. Дана пирамида $SABC$. Точки D и E лежат соответственно на ребрах SA и SB , причем $SD : DA = 1 : 2$ и $SE : EB = 1 : 2$. Через точки D и E проведена плоскость α , параллельная ребру SC . В каком отношении плоскость α делит объем пирамиды?

1978 год

Механико-математический факультет

- ▶ 1. Разность $\sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57}$ является целым числом. Найти это целое число.
- ▶ 2. Найти все решения уравнения $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$, принадлежащие отрезку $[\frac{3}{4}, 1]$.
- ▶ 3. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB . Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а длина отрезка PQ равна $2\sqrt{2}$. Вычислить радиус окружности, описанной около треугольника ABC .
- ▶ 4. Найти все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств
$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \frac{1-a}{1+a}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2 \end{cases}$$
 имеет решение.

- 5. Объем пирамиды $ABCD$ равен 5. Через середины ребер AD и BC проведена плоскость, пересекающая ребро CD в точке M . При этом $DM : MC = 2 : 3$. Вычислить площадь сечения пирамиды указанной плоскостью, если расстояние от нее до вершины A равно 1.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Решить неравенство $(x - 1)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$.
- 2. Найти точки минимума функции $f(x) = \sqrt{3} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} - \frac{x-3}{2}$.
- 3. Найти уравнение прямой, проходящей через точку с координатами $(1/2, 2)$, касающейся графика функции $y(x) = -\frac{x^2}{2} + 2$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y(x) = \sqrt{4 - x^2}$.
- 4. Совокупность A состоит из различных натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A .
- 5. Основанием пирамиды $ABCEH$ служит выпуклый четырехугольник $ABCE$, который диагональю BD делится на два равновеликих треугольника. Длина ребра AB равна 1, длины ребер BC и CE равны. Сумма длин ребер AH и EH равна $\sqrt{2}$. Объем пирамиды равен $1/6$. Найти радиус шара, имеющего наибольший объем среди всех шаров, помещающихся в пирамиде $ABCEH$.

Физический факультет

- 1. Решить уравнение $2 \sin x + 3 \sin 2x = 0$.
- 2. Исследовать на экстремум функцию $y(x) = \sqrt{2x^2 - x + 2}$.
- 3. Прямая l проходит через точки $A(1, 2, 3)$ и $B(4, 6, 9)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно прямой l .
- 4. Решить уравнение $\log_2(3^x - 8) = 2 - x$.
- 5. Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ (D — вершина, ABC — основание). Известно, что $AB = a$, $AD = b$. Пирамиду пересекает плоскость α , параллельная ребрам AD и BC . На каком расстоянии от ребра AD должна быть проведена плоскость α , чтобы площадь сечения пирамиды этой плоскостью была наибольшей?
- 6. Дана окружность с диаметром AB . Вторая окружность с центром в точке A пересекает первую окружность в точках C и D , а диаметр AB в точке E . На дуге CE , не содержащей точки D , взята точка M , отличная от точек C и E . Луч BM пересекает первую окружность в точке N . Известно, что $CN = a$, $DN = b$. Найти MN .

Химический факультет

- 1. Решить уравнение $\sin 2x + \sin 6x = 3 \cos^2 2x$.
- 2. Из пункта A в пункт B выехал грузовой автомобиль. Через 1 час из пункта A в пункт B выехал легковой автомобиль, который прибыл в пункт B одновременно с грузовым автомобилем. Если бы грузовой и легковой автомобили одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу, то они бы встретились через 1 час 12 минут после выезда. Сколько времени провел в пути от A до B грузовой автомобиль?
- 3. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, основания которых являются квадратами, а каждая из боковых граней имеет периметр 6 см. Найти среди них параллелепипед с наибольшим объемом и вычислить величину этого объема.
- 4. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC длина боковой стороны AB равна 2 см. Биссектриса угла BAD пересекает прямую BC в точке E . В треугольник ABE вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M , и стороны BE в точке H . Длина отрезка MH равна 1 см. Найти величину угла BAD .
- 5. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y + 2 = (3 - x)^3, \\ (2z - y)(y + 2) = 9 + 4y, \\ x^2 + z^2 = 4x, \end{cases}$$
 удовлетворяющие условию $z \geq 0$.

Биологический факультет

- 1. Решить уравнение $\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{2}$.
- 2. В реку впадает приток. Пароход отходит от пристани A на притоке, идет вниз по течению 80 км до реки, далее по реке вверх против течения до пристани B , затратив 18 часов на весь путь от A до B . Затем пароход возвращается обратно. Время обратного движения от B до A по тому же пути равно 15 часам. Скорость парохода в стоячей воде равна 18 км/ч. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Каково расстояние от пристани A до пристани B и какова скорость притока?
- 3. Дана окружность с центром в точке O и радиусом 2. Из конца отрезка OA , пересекающего с окружностью в точке M , проведена касательная AK к окружности. Величина угла OAK равна $\pi/3$. Найти радиус окружности, касающейся отрезков AK , AM и дуги MK .
- 4. Решить неравенство $9^{\sqrt{x^2-3}} + 3 < 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2-3}-1}$.

- 5. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x|x + 2a| + 1 - a = 0$ имеет единственное решение.

Факультет почвоведения

- 1. Решить уравнение $\cos x = \cos 3x + 2 \sin 2x$.
- 2. Решить неравенство $\log_2^2 x - 3 \log_2 x + 2 \geq 0$.
- 3. Имеется два слитка золота с серебром. Процентное содержание золота в первом слитке в два с половиной раза больше, чем процентное содержание золота во втором слитке. Если сплавить оба слитка вместе, то получится слиток, в котором будет 40% золота. Найти, во сколько раз первый слиток тяжелее второго, если известно, что при сплавке равных по весу частей первого и второго слитков получается слиток, в котором содержится 35% золота.
- 4. Плоскость прямоугольного треугольника, длины катетов которого равны 3 см и 4 см, образует с плоскостью P угол, величина которого равна α . Гипотенуза этого треугольника лежит в плоскости P . Найти величину угла, который образует меньший катет с плоскостью P .
- 5. Решить уравнение
- $$\sqrt{x}(9^{\sqrt{x^2-3}} - 3^{\sqrt{x^2-3}}) = 3^{2\sqrt{x^2-3}+1} - 3^{\sqrt{x^2-3}+1} + 6\sqrt{x} - 18.$$

Геологический факультет (отделение общей геологии)

- 1. Решить уравнение $\sqrt{2} \sin x + \operatorname{ctg} x = 0$.
- 2. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист, а через четверть часа вслед за ним выехал автомобиль. На половине пути от A до B автомобиль догнал велосипедиста. Когда автомобиль прибыл в пункт B , велосипедисту оставалось проехать еще треть пути. За какое время велосипедист проехал путь от A до B , если известно, что скорости велосипедиста и автомобиля постоянны на всем пути от пункта A до пункта B ?
- 3. Решить неравенство $\log_x \frac{2x + \frac{1}{x}}{x(1-x)} > 0$.
- 4. В треугольнике ABC длина стороны AC равна 3, угол BAC равен $\pi/6$, и радиус описанной окружности равен 2. Доказать, что площадь треугольника ABC меньше 3.
- 5. Найти все значения параметра a , при каждом из которых существует хотя бы одно x , удовлетворяющее условиям:

$$\begin{cases} x^2 + (5a + 2)x + 4a^2 + 2a < 0, \\ x^2 + a^2 = 4. \end{cases}$$

Геологический факультет (отделение геофизики)

- ▶ 1. Решить уравнение $-5 \cos 4x = 2 \cos^2 x + 1$.
- ▶ 2. Решить уравнение $|5x - 13| - |6 - 5x| = 7$.
- ▶ 3. Решить неравенство $\log_3 \log_{9/16}(x^2 - 4x + 3) \leq 0$.
- ▶ 4. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K так, что $AK : BK = 1 : 2$, а на стороне BC взята точка L так, что $CL : BL = 2 : 1$. Пусть Q — точка пересечения прямых AL и CK . Найти площадь треугольника ABC , зная, что площадь треугольника BQC равна 1.
- ▶ 5. Пункт A стоит в поле на расстоянии 8 км от дороги. На дороге, которая является прямой линией, стоит пункт B . Скорость движения автомобиля по дороге в два раза больше, чем по полю. Известно, что если ехать из A по прямой до некоторой находящейся на дороге точки C , отличной от B , а затем по дороге до B , то при любом выборе точки C на это уйдет не меньше времени, чем потребуется, если ехать из A в B напрямик по полю. Чему равно расстояние от A до B ?

Географический факультет

- ▶ 1. Пароход, отчалив от пристани A , спустился вниз по течению реки на 60 км до устья впадающего в реку притока и поднялся вверх по притоку (против течения) на 20 км до пристани B . Весь путь от A до B пароход прошел за 7 часов. Скорость течения реки и скорость течения притока равна 1 км/ч. Найти скорость парохода в стоячей воде.
- ▶ 2. Найти все значения x , при которых производная функции $y(x) = \sin x - \frac{2}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x$ равна нулю.
- ▶ 3. Прямоугольник $EKMP$ лежит в прямоугольном треугольнике ABC таким образом, что сторона EK лежит на гипотенузе BC , а вершины M и P — на катетах AC и AB соответственно. Известно, что $AC = 3$ см и $AB = 4$ см. Найти длины сторон прямоугольника $EKMP$, если его площадь равна $5/3$ см², а периметр строго меньше, чем 9 см.
- ▶ 4. Решить неравенство $\sqrt{\log_9(3x^2 - 4x + 2)} + 1 > \log_3(3x^2 - 4x + 2)$.
- ▶ 5. Найти все значения параметра a , при каждом из которых существует только одно значение x , удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} |x^2 - 5x + 4| - 9x^2 - 5x + 4 + 10x|x| = 0, \\ x^2 - 2(a - 1)x + a(a - 2) = 0. \end{cases}$$

Экономический факультет
(отделение политической экономии)

- ▶ 1. Решить уравнение $\log_{1-2x^2} x = \frac{1}{4} - \frac{3}{\log_2(1-2x^2)^4}$.
- ▶ 2. В плоскости дан квадрат с последовательно расположенными вершинами A, B, C, D и точка O . Известно, что $OB = OD = 13$, $OC = 5\sqrt{2}$ и что площадь квадрата больше 225. Найти длину стороны квадрата и выяснить, где расположена точка O — вне или внутри квадрата.
- ▶ 3. Найти все значения параметра b , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} bx + 2y = b + 2, \\ 2bx + (b + 1)y = 2b + 4 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.
- ▶ 4. Груз вначале погрузили в вагоны по 80 тонн, но один вагон оказался загружен не полностью. Тогда весь груз переложили в вагоны по 60 тонн, однако понадобилось на 8 вагонов больше и при этом все равно один вагон оказался не полностью загруженным. Наконец, груз переложили в вагоны вместимостью по 50 тонн, однако понадобилось еще на 5 вагонов больше, при этом все такие вагоны были загружены полностью. Сколько тонн груза было?
- ▶ 5. Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $a(4 - \sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + a > 0$ выполняется для всех x .

Экономический факультет
(отделение планирования и экономической кибернетики)

- ▶ 1. Найти все корни уравнения $|x^2 + x - 1| = 2x - 1$, удовлетворяющие неравенству $x < \sqrt[3]{\frac{5}{3}}$.
- ▶ 2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке F . Известно, что $AF = CF = 2$, $BF = 1$, $DF = 4$, $\angle BFC = \frac{\pi}{3}$. Найти косинус угла между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{DC}$.
- ▶ 3. Решить уравнение $3 + \frac{1}{\log_{32} \frac{x}{2}} = \log_{\frac{x}{2}} \left(\frac{75x}{4} - \frac{11}{x} \right)$.
- ▶ 4. Имеется три сплава. Первый сплав содержит 30% никеля и 70% меди, второй — 10% меди и 90% марганца, третий — 15% никеля, 25% меди и 60% марганца. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 40% марганца. Какое наименьшее и какое наибольшее количество меди может быть в этом новом сплаве?
- ▶ 5. Найти все значения параметра a , при каждом из которых функция $f(x) = \sin 2x - 8(a + 1) \sin x + (4a^2 + 8a - 14)x$ является возрастающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек.

Факультет психологии

- 1. Решить уравнение $(\log_3 \frac{3}{x}) \cdot \log_2 x - \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}$.
- 2. Диагональ BD четырехугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около этого четырехугольника. Вычислить длину диагонали AC , если $BD = 2$, $AB = 1$ и $\angle ABD : \angle DBC = 4 : 3$.
- 3. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был на расстоянии 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обогнал пешехода в тот момент, когда пешехода настиг мотоциклист?
- 4. Найти множество всех пар чисел (a, b) , для каждой из которых при всех x справедливо равенство $a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1$.
- 5. Известно, что для некоторой квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ выполнены неравенства $f(-1) < 1$, $f(1) > -1$, $f(3) < -4$. Определить знак коэффициента a .

Филологический факультет

(отделение структурной и прикладной лингвистики)

- 1. Двум бригадам, общей численностью 18 человек, было поручено организовать в течение трех суток непрерывное круглосуточное дежурство по одному человеку. Первые двое суток дежурили члены первой бригады, распределив между собой это время поровну. Известно, что во второй бригаде три девушки, а остальные юноши, причем девушки дежурили по одному часу, а все юноши распределили остаток дежурства между собой поровну. При подсчете оказалось, что сумма продолжительностей дежурств каждого юноши второй бригады и любого члена первой бригады меньше 9 часов. Сколько человек в каждой бригаде?
- 2. Число α подобрано так, что уравнение $\sqrt{x - \sqrt{3}} + \alpha^2 x^2 + 2\alpha x(\sqrt{6} - \sqrt{3}) = 6\sqrt{2} - 9$ имеет решение. Найти это решение.
- 3. Решить уравнение $5 \sin x + 6 \sin 2x + 5 \sin 3x + \sin 4x = 0$.
- 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \sin^2 x + \cos x - \frac{1}{2}$.
- 5. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность единичного радиуса. Известно, что $AB = \sqrt{2}$, $\angle ABE = \frac{\pi}{4}$, $\angle EBD = \frac{\pi}{6}$ и $BC = CD$. Чему равна площадь пятиугольника?

1979 год

Механико-математический факультет

- 1. Найти все решения уравнения $1 - 5 \sin x + 2 \cos^2 x = 0$, удовлетворяющие неравенству $\cos x \geq 0$.
- 2. Отрезок KL является диаметром некоторой окружности. Через его концы K и L проведены две прямые, пересекающие окружность соответственно в точках P и Q , лежащих по одну сторону от прямой KL . Найти радиус окружности, если $\angle PKL = \frac{\pi}{3}$ и точка пересечения прямых KP и QL удалена от точек P и Q на расстояние 1.
- 3. Найти точки минимума функции $y = x^3 - 2x|x - 2|$ на отрезке $[0, 3]$ и ее наибольшее значение на этом отрезке.
- 4. Решить неравенство $\frac{6}{2x+1} > \frac{1+\log_2(2+x)}{x}$.
- 5. Основанием треугольной пирамиды $ABCD$ является треугольник ABC , в котором $A = \frac{\pi}{2}$, $C = \frac{\pi}{6}$, $BC = 2\sqrt{2}$. Длины ребер AD, BD, CD равны между собой. Сфера радиуса 1 касается ребер AD, BD , продолжения ребра CD за точку D и плоскости ABC . Найти величину отрезка касательной, проведенной из точки A к сфере.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Найти точки экстремума функции $f(x) = x^3 + 6x^2 - 3x + 3$ на интервале $(-5, \frac{1}{5})$.
- 2. Решить уравнение $5^{|4x-6|} = 25^{3x-4}$.
- 3. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке E . Прямая, проходящая через точку E и перпендикулярная к AB , пересекает сторону CD в точке M . Доказать, что EM — медиана треугольника CED и найти ее длину, если $AD = 8$ см, $AB = 4$ см и $\angle CDB = \alpha$.
- 4. Найти все целые корни уравнения $\cos\left(\frac{\pi}{8}(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800})\right) = 1$.
- 5. Найти все действительные значения параметра a , при которых уравнение $(a - x^2 - \cos \frac{11\pi x}{4}) \cdot \sqrt{8 - ax} = 0$ имеет на отрезке $[-2, 3]$ нечетное число различных корней.

Физический факультет

- 1. Решить уравнение $\cos \frac{\pi}{2} = 1 + \cos x$.
- 2. Найти угол между векторами $\vec{a} = (6, -2, -3)$ и $\vec{b} = (5, 0, 0)$.

- 3. Решить систему
$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \frac{1}{9}, \\ y - x = 2. \end{cases}$$
- 4. Найти координаты пересечения с осью Ox касательных к графику функции $y = \frac{x+1}{x+3}$, которые образуют угол 135° с осью Ox .
- 5. В ромб $ABCD$, у которого $AB = l$ и $\angle BAD = \alpha$, вписана окружность. Касательная к этой окружности пересекает сторону AB в точке M , а сторону AD — в точке N . Известно, что $MN = 2a$. Найти длины отрезков MB и ND .
- 6. В плоскости P дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC = l$, $AC = 2a$). Шар радиуса r касается плоскости P в точке B . Две скрещивающиеся прямые проходят через точки A и C и касаются шара. Угол между каждой из этих прямых и плоскостью P равен α . Найти расстояние между этими прямыми.

Химический факультет

- 1. Решить уравнение $\sin 2x = 1 + \sqrt{2} \cos x + \cos 2x$.
- 2. Решить неравенство $\sqrt{x+3} > x+1$.
- 3. От пристани A вниз по течению реки одновременно отплыли пароход и плот. Пароход, доплыв до пристани B , расположенной в 324 км от пристани A , простоял там 18 часов и отправился назад в A . В момент, когда он находился в 180 км от A , второй пароход, отплывший из A на 40 часов позднее первого, нагнал плот, успевший к тому времени проплыть 144 км. Считая, что скорость течения реки постоянна, скорость плота равна скорости течения реки, а скорости пароходов в стоячей воде постоянны и равны между собой, определить скорости пароходов и скорость течения реки.
- 4. Из точки M , которая расположена внутри остроугольного треугольника ABC , опущены перпендикуляры на стороны. Длины сторон и опущенных на них перпендикуляров соответственно равны a и k , b и m , c и n . Вычислить отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров.
- 5. Найти все решения системы уравнений
$$\begin{cases} y \sin x = \log_2 \left| \frac{y \sin x}{1+3y} \right|, \\ (6y^2 + 2y)(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x}) = 25y^2 + 6y + 1, \end{cases}$$
 для которых $|y| \leq 1$.

Биологический факультет

- 1. Найти все значения x , при которых касательные к графикам функций $y = 3 \cos 5x$ и $y = 5 \cos 3x + 2$ в точках с абсциссой x параллельны.

- 2. Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 2400 км, навстречу друг другу выезжают одновременно пассажирский и скорый поезда. Каждый из них идет с постоянной скоростью и в некоторый момент времени они встречаются. Если бы оба поезда шли со скоростью скорого поезда, то их встреча произошла бы на 3 часа раньше фактического момента встречи. Если бы оба поезда шли со скоростью пассажирского поезда, то их встреча произошла бы на 5 часов позже фактического момента встречи. Найти скорости поездов.
- 3. Около окружности радиуса R описана трапеция. Хорда, соединяющая точки касания окружности с боковыми сторонами трапеции, параллельна основаниям трапеции. Длина этой хорды равна b . Найти площадь трапеции.
- 4. Решить неравенство $\log_{x+1}(x^2 + x - 6) \geq 4$.
- 5. Найти все пары чисел x и y , удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} (\sqrt{3} + 1)(1 + \cos(xy) \sin(xy)) = (\sqrt{3} + 1) \sin^2(xy) + \cos(2xy), \\ x^2 y^2 - y^2 + 1 = 0, \\ \frac{1}{x^2} + y^2 \leq 6. \end{cases}$$

Факультет почвоведения

- 1. Решить уравнение $2\sqrt{x} - 2^{1-\sqrt{x}} = 1$.
- 2. Найти наименьшее значение функции $y = x + \frac{4}{(x-2)^2}$ на отрезке $[0, 5]$.
- 3. Решить уравнение $\frac{1+\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 2x = (\sqrt{3} - 1) \cos^2 x + 1$.
- 4. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E . Найти площадь треугольника BCE , если длины оснований трапеции $AB = 30$ см, $DC = 24$ см, боковой стороны $AD = 3$ см и угол DAB равен 60° .
- 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0, \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0. \end{cases}$$

Геологический факультет (отделение общей геологии)

- 1. Найти все действительные x , удовлетворяющие условию $|2x - 3| = 3 - 2x$.
- 2. Решить уравнение $\log_2(x - 1) + \log_2 x = 1$.
- 3. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2}y + \sqrt{12} \operatorname{ctg} x = 4, \\ 2\sqrt{2}y - \sqrt{27} \operatorname{ctg} x = 1. \end{cases}$$
- 4. Экскаваторщик получил задание выкопать две траншеи одинаковой глубины на различных участках строительной площадки. Экскаватор сначала вырыл первую траншею длиной 5 метров, потом доехал до второго

участка и вырыл вторую траншею длиной три метра. Время, затраченное на прокладку первой траншеи на 1 час 12 минут меньше, чем время, затраченное на переезд экскаватора и рытье второй траншеи. Если бы производительность экскаватора была в 4 раза меньше, то время, затраченное на прокладку первой траншеи, равнялось бы времени переезда экскаватора с одного места работы на другое. Определить длину траншеи, выкапываемой экскаватором за 1 час.

- 5. Основанием пирамиды $SABC$ является правильный треугольник, длина стороны которого равна $\sqrt{3}$. Основанием высоты, опущенной из вершины S , является точка O , лежащая внутри треугольника ABC . Расстояние от точки O до стороны AC равно 1. Синус угла OBA относится к синусу угла OBC как 2:1. Площадь грани SAB равна $\sqrt{\frac{5}{6}}$. Найти объем пирамиды.

- 6. Найти все значения α , при которых уравнение

$$x^2 + \frac{6x}{\sqrt{\sin \alpha}} + \frac{9\sqrt{3}}{\cos \alpha} + 36 = 0$$

имеет единственное решение.

Геологический факультет (отделение геофизики)

- 1. Найти все x , удовлетворяющие условию $\frac{a}{a-2x} = 2$.
- 2. Решить уравнение $1 + \lg(1 + x^2 + 2x) - \lg(6 + x^2) = 2\lg(1 + x)$.
- 3. Найти все A , при которых уравнение $2\sin x + 3\cos x = A$ имеет решение.
- 4. Из пункта A в пункт B едет трактор. Радиус переднего колеса трактора меньше радиуса заднего колеса. На пути из A в B переднее колесо сделало на 200 оборотов больше, чем заднее. Если бы длина окружности переднего колеса была в $5/4$ раза больше, то на пути из A в B оно сделало бы на 80 оборотов больше, чем заднее колесо. Найти длины окружностей переднего и заднего колес трактора, если длина окружности заднего колеса на 1 м больше длины окружности переднего колеса.
- 5. В плоском четырехугольнике $ABCD$ длина стороны AB равна $10\frac{3}{10}$, длина стороны AD равна 14, длина стороны CD равна 10. Известно, что угол DAB острый, причем синус его равен $3/5$, косинус угла ADC равен $-\frac{3}{5}$. Окружность с центром в точке O касается сторон AD, AB, BC . Найти длину отрезка BO .
- 6. Найти все неотрицательные x , при которых из неравенств
- $$abx \geq 3a + 4b + x, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0$$
- следует неравенство $ab \geq 2$.

Географический факультет

- 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ на отрезке $[-5, 5]$.
- 2. Решить уравнение $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
- 3. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. На стороне AB как на диаметре, построена окружность, пересекающая сторону BC в точке D , так что $BD : DC = 2 : 1$. Найти длину основания AC треугольника, если известно, что $AB = 6$.
- 4. В школьной газете сообщается, что процент учеников некоторого класса, повысивших во втором полугодии свою успеваемость, заключен в пределах от 2,9% до 3,1%. Определить минимально возможное число учеников в таком классе.
- 5. Найти решения неравенства $\cos \frac{3}{2} - 4x - x^2 \geq 0$, лежащие в интервале $-4, 2 < x < 0$.

Экономический факультет

(отделение политической экономии)

- 1. Решить уравнение $\sqrt{10 - 18 \cos x} = 6 \cos x - 2$.
- 2. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AB = 8$ и $BC = 6$ проведена прямая AD , делящая катет BC в отношении $BD : DC = 4 : 5$. Найти угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$.
- 3. Имеются два бака: первый бак наполнен чистым глицерином, второй — водой. Взяли два трехлитровых ковша, зачерпнули первым полным ковшом глицерин из первого бака, а вторым полным ковшом воду из второго бака, после чего первый ковш влили во второй бак, а второй ковш влили в первый бак. Затем, после перемешивания, снова зачерпнули первым полным ковшом смесь из первого бака, вторым полным ковшом смесь из второго бака, и влили первый ковш во второй бак, а второй ковш в первый бак. В результате половину объема первого бака занял чистый глицерин. Найти объемы баков, если известно, что их суммарный объем в 10 раз больше объема первого бака.
- 4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + x - 2y = 1, \\ 5x^2 + 2,5y^2 + 3x - 4y = 4. \end{cases}$$
- 5. Решить уравнение $\log_{1-2x}(6x^2 - 5x + 1) - \log_{1-3x}(4x^2 - 4x + 1) = 2$.

Экономический факультет

(отделение планирования и экономической кибернетики)

- 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 4 \sin y - 6\sqrt{2} \cos x = 5 + 4 \cos^2 y, \\ \cos 2x = 0. \end{cases}$
- 2. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 48, а длина диагонали равна 10. На плоскости, в которой расположен прямоугольник, выбрана точка O так, что $OB = OD = 13$. Найти расстояние от точки O до наиболее удаленной от нее вершины прямоугольника.
- 3. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года $5/6$ некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть — во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равна 670 денежным единицам, к концу следующего года — 749 денежным единицам. Было подсчитано, что если бы первоначально $5/6$ исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть — в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равна 710 денежным единицам. В предположении, что исходное количество денег первоначально целиком положено в первый банк, определить величину вклада по истечении двух лет.
- 4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 4x + 2y = 1, \\ 3x^2 - 2y^2 - 6x - 4y = 5. \end{cases}$
- 5. Решить неравенство $\frac{\log_5(x^2 - 4x - 11)^2 - \log_{11}(x^2 - 4x - 11)^8}{2 - 5x - 3x^2} \geq 0$.

Факультет психологии

- 1. Найти все решения уравнения $\sqrt{2 + \sqrt{6}} - (6\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) \sin x = 2 \sin x - \sqrt{2}$.
- 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} \log_{1+x}(y^2 - 2y + 1) + \log_{1-y}(x^2 + 2x + 1) = 4, \\ \log_{1+x}(2y + 1) + \log_{1-y}(2x + 1) = 2. \end{cases}$
- 3. Решить неравенство $\frac{4}{|x+1|-2} \geq |x-1|$.
- 4. Точка M равноудалена от вершин A, B, C правильного тетраэдра $ABCD$ и $MA = MB = MC = 2\sqrt{\frac{3}{2}}$. Известно, что отрезок MA перпендикулярен высоте треугольника BCD , опущенной из вершины B . Вычислить объем тетраэдра $ABCD$.
- 5. Найти все тройки целых чисел (x, y, z) , для которых выполняется соотношение $5x^2 + y^2 + 3z^2 - 2yz = 30$.

Филологический факультет

(отделение структурной и прикладной лингвистики)

- 1. Даны две непересекающиеся окружности. К ним проведены две общие касательные, которые пересекаются в точке A отрезка, соединяющего центры окружностей. Радиус меньшей окружности равен R . Расстояние от точки A до центра окружности большего радиуса равно $6R$. Точка A делит длину отрезка касательной, заключенного между точками касания, в отношении 1:3. Найти площадь фигуры, ограниченной отрезками касательных и большими дугами окружностей, соединяющими точки касания.
- 2. Решить уравнение $\sin\left(2x + \frac{5}{2}\pi\right) - 3\cos\left(x - \frac{7}{2}\pi\right) = 1 + 2\sin x$.
- 3. Решить неравенство $\log_{1/2}(4 - x) \geq \log_{1/2} 2 - \log_{1/2}(x - 1)$.
- 4. Три автоматических линии выпускают одинаковую продукцию, но имеют разную производительность. Производительность всех трех одновременно действующих линий в 1,5 раза выше производительности первой и второй линий, работающих одновременно. Сменное задание для первой линии вторая и третья линии, работая одновременно, могут выполнить за 4 часа 48 минут быстрее, чем его выполняет первая линия; это же задание вторая линия выполняет за 2 часа быстрее по сравнению с первой линией. Найти время выполнения первой линией своего сменного задания.
- 5. Пусть m и n — натуральные числа, причем $\frac{m}{n}$ есть правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3n - m}{5n + 2m}$, если известно, что она сократима?

1980 год

Механико-математический факультет

- 1. Найти все значения x , удовлетворяющие условию $(x^2 - 4)\sqrt{x + 1} = 0$.
- 2. Найти все решения уравнения $\sin 2x = \sqrt{3} \sin x$.
- 3. В трапеции длина средней линии равна 4, а углы при одном из оснований имеют величины 40° и 50° . Найти длины оснований трапеции, если длина отрезка, соединяющего середины этих оснований равна 1.
- 4. Касательная к графику функции $y = \sqrt[3]{x^2}$ такова, что абсцисса s точки касания принадлежит отрезку $[\frac{1}{2}, 1]$. При каком значении s площадь

треугольника, ограниченного этой касательной, осью Ox и вертикальной прямой $x = 2$ будет наименьшей, и чему равна эта наименьшая площадь?

- 5. Найти все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x^2 + ax + 5} + 1) \cdot \log_5(x^2 + ax + 6) + \log_a 3 \geq 0$$

имеет ровно одно решение.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.
- 2. Решить уравнение $\sin 2x - \sqrt{3} \cos x = 0$.
- 3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины B прямого угла опущена высота BD на гипотенузу AC . Известно, что $AB = 13$, $BD = 12$. Найти площадь треугольника ABC .
- 4. При каких значениях параметра a уравнение
- $$(3a - 1)x^2 + 2ax + 3a - 2 = 0$$
- имеет два действительных корня.
- 5. Две точки движутся с постоянными скоростями по окружностям, которые лежат в одной плоскости и имеют общий центр. Направление движения одной точки — по часовой стрелке, другой — против часовой стрелки. В момент начала движения обе точки и центр окружностей лежат на одной прямой, а расстояние между точками равно $\frac{18}{7}$ см. После старта расстояние между точками сначала уменьшалось, а через 11 сек составляло $\frac{\sqrt{207}}{7}$ см. Кроме того, с интервалом в 11 сек было зафиксировано два момента, когда расстояние равнялось $\frac{\sqrt{156}}{7}$ см, а в промежутке между этими моментами расстояние ни разу не принимало значения $\frac{\sqrt{158}}{7}$ см. Найти минимальное расстояние между точками.
- 6. В пирамиде $SABC$ суммы длин ребер, выходящих из каждой вершины, равны одному и тому же числу. Величина тупого угла между ребрами SB и AC равна $\arccos(-\frac{1}{3})$, радиус вписанной в пирамиду сферы равен $\sqrt{\frac{3}{13}}$, и $SA^2 + SC^2 = 12$. Найти объем пирамиды $SABC$, если известно, что он не превосходит $\frac{5}{3}$.

Физический факультет

- 1. Найти все корни уравнения

$$\sin x \cos \frac{\pi}{8} + \cos x \sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2},$$

расположенные в промежутке $[-\frac{3\pi}{2}, \pi]$.

- 2. Найти координаты точки C , лежащей на оси Ox и одинаково удаленной от точек $A(1, 2, 3)$ и $B(2, 3, 4)$.

- 3. Решить уравнение $3\sqrt{\log_3 x} - \log_3(3x) - 1 = 0$.
- 4. Решить неравенство $2^{x-1} > \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}}$.
- 5. В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$, $AC = b$. На стороне BC взята точка D так, что $BD = 3 \cdot DC$. Через точки B и D проведена окружность, касающаяся стороны AC или ее продолжения за точку A . Найти радиус этой окружности.
- 6. Точка O — общая вершина двух равных конусов, расположенных по одну сторону от плоскости α так, что только одна образующая каждого конуса (OA для одного конуса и OB для другого) принадлежит плоскости α . Известно, что величина угла между высотами конусов равна β , а величина угла между высотой и образующей конуса равна φ , причем $2\varphi < \beta$. Найти величину угла между образующей OA и плоскостью основания другого конуса, которой принадлежит точка B .

Химический факультет

- 1. Решить уравнение $\log_7 \left(\frac{x+3}{21}\right) = \log_7 \left(\frac{2}{3x-6}\right)$.
- 2. Найти все решения уравнения $2 \cos^2 3x - \cos 3x = 0$.
- 3. На координатной плоскости рассматриваются прямоугольные треугольники ABC ($\angle ACB = 90^\circ$), у каждого из которых вершина A имеет координаты $(-4, 0)$, вершина C лежит на отрезке $[0, 4]$ оси Ox , а вершина B лежит на параболы $y = 4x - x^2$. Какие координаты должна иметь вершина B , чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей?
- 4. В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность, которая касается боковой стороны AB в точке M . Через точку M проведен перпендикуляр ML к стороне AC треугольника ABC (точка L — основание этого перпендикуляра). Найти величину угла BCA , если известно, что площадь треугольника ABC равна 1, а площадь четырехугольника $LMBC$ равна S .
- 5. Найти все такие значения a , для каждого из которых число решений относительно x уравнения

$$3(x^2 + a^2) = 1 - (9a^2 - 2)x$$

не превосходит числа решений относительно y уравнения

$$y + (3a - 2)^2 \cdot 3^y = (8^a - 4) \cdot \log_3 \left(s^a - \frac{1}{2}\right) - 3y^3.$$

Биологический факультет

- 1. Решить уравнение $1 + 2 \cos 3x \cos x - \cos 2x = 0$.

- ▶ 2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$ на отрезке $[-5, 4]$.
- ▶ 3. Решить неравенство $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$.
- ▶ 4. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 26 м. Величина угла ABC равна 120° . Радиус окружности, вписанной в треугольник BCD равен $\sqrt{3}$ м. Найти длины сторон параллелограмма, если известно, что $AD > AB$.
- ▶ 5. Найти все те решения уравнения

$$3 \sin^3 x - 3 \cos^2 x + 7 \sin x - \cos 2x + 1 = 0,$$
 которые являются также решениями уравнения

$$\cos^2 x + 3 \cos x \sin 2x - 8 \sin x = 0.$$

Факультет почвоведения

- ▶ 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x - y = 6, \\ x^3 - y^3 = 126. \end{cases}$
- ▶ 2. Найти все значения x , при которых производная функции $y = 4x - \sin 2x + 4\sqrt{2} \cos x$ равна нулю.
- ▶ 3. Хорды AB и AC имеют одинаковую длину. Величина образованного ими вписанного в окружность угла равна $\frac{\pi}{6}$. Найти отношение площади той части круга, которая заключена в этом угле, к площади всего круга.
- ▶ 4. Решить неравенство $(4x^2 - 16x + 7) \log_2(x - 3) > 0$.

Геологический факультет (отделение общей геологии)

- ▶ 1. Решить уравнение $\sin 2x = 2\sqrt{3} \cos^2 x$.
- ▶ 2. Найти периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, если известно, что хорда длиной 2 см этой окружности удалена от ее центра на 3 см.
- ▶ 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 5, \\ 2 \log_4 x + \log_2 y = 4. \end{cases}$
- ▶ 4. Магазин радиотоваров продал в первый рабочий день месяца 105 телевизоров. Каждый следующий рабочий день дневная продажа возрастала на 10 телевизоров, и месячный план — 4000 телевизоров — был выполнен досрочно, причем в целое число рабочих дней. После этого ежедневно продавалось на 13 телевизоров меньше, чем в день выполнения месячного плана. На сколько процентов был перевыполнен месячный план продажи телевизоров, если в месяце 26 рабочих дней.

- 5. Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости следующей системой:

$$\begin{cases} ||x - y| - |y - 1|| = x - 2y + 1, \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1. \end{cases}$$

Геологический факультет (отделение геофизики)

- 1. Решить неравенство $7^{-x} - 3 \cdot 7^{1+x} > 4$.
- 2. Решить уравнение $\frac{2-3\sin x - \cos 2x}{6x^2 - \pi x - \pi^2} = 0$.
- 3. Решить уравнение $x^2 + 4|x - 3| - 7x + 11 = 0$.
- 4. В гору ехал автомобиль. В первую секунду после достижения пункта A он проезжал 30 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 2 м меньше, чем в предыдущую. Через 9 сек после того, как автомобиль достиг пункта A , навстречу ему выехал автобус из пункта B , находящегося на расстоянии 258 м от пункта A . В первую секунду автобус проехал 2 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 1 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние проехал автобус до встречи с автомобилем?
- 5. На сфере радиуса 11 см расположены точки A, A_1, B, B_1, C и C_1 . Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M , отстоящей от центра сферы на расстояние $\sqrt{59}$ см. Найти длину отрезка AA_1 , если известно, что длина отрезка BB_1 равна 18 см, а точка M делит отрезок CC_1 в отношении $(8 + \sqrt{2}) : (8 - \sqrt{2})$.

Географический факультет

- 1. Найти все значения параметра k , для которых уравнение $x^2 - 2kx + k^2 + 2k - 1 = 0$ имеет два различных действительных корня.
- 2. Решить уравнение $\log_{x-1} 3 = 2$.
- 3. В правильную шестиугольную пирамиду вписан прямой конус и около нее описан прямой конус. Даны высота пирамиды H и радиус основания описанного конуса R . Найти разность объемов описанного и вписанного конусов.
- 4. Решить уравнение $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{15}{8} \cos 2x - \frac{1}{2}$.
- 5. Найти все пары чисел (x, y) , удовлетворяющие условиям $x < 0, y > 0$ и системе
- $$\begin{cases} |y + \frac{1}{x}| + |\frac{13}{6} + x - y| = \frac{13}{6} + x + \frac{1}{x}, \\ x^2 + y^2 = \frac{97}{36}. \end{cases}$$

Экономический факультет
(отделение политической экономии)

- ▶ 1. Решить уравнение $\log_2 \left(\frac{1}{|x-1|-1} \right) = 1$.
- ▶ 2. Решить неравенство $3^{4x^2-3x+\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-40x^2}$.
- ▶ 3. На плоскости даны две окружности радиусов 12 см и 7 см с центрами в точках O_1 и O_2 , касающиеся некоторой прямой в точках M_1 и M_2 и лежащие по одну сторону от этой прямой. Отношение длины отрезка M_1M_2 к длине отрезка O_1O_2 равно $2 : \sqrt{5}$. Вычислить длину отрезка M_1M_2 .
- ▶ 4. Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй — 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Определить, сколько килограммов олова содержится в получившемся новом сплаве.
- ▶ 5. Найти все целые значения параметра k , при каждом из которых уравнение $5 - 4\sin^2 x - 8\cos^2 \frac{x}{2} = 3k$ имеет решения. Найти все эти решения.

Экономический факультет
(отделение планирования и экономической кибернетики)

- ▶ 1. Решить неравенство $\log_3(13 - 4^x) > 2$.
- ▶ 2. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания с окружностью делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12 см. Найти площадь треугольника.
- ▶ 3. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2xy + y^2 - 4x - 3y + 2 = 0, \\ xy + 3y^2 - 2x - 14y + 16 = 0. \end{cases}$$
- ▶ 4. На отрезке $[0, \frac{5}{4}\pi]$ найти наибольшее значение функции $y = 2\sin x + \sin 2x$.
- ▶ 5. На прямой дороге последовательно расположены пункты A, B, C, D . Расстояния от пункта A до пунктов B, C, D находятся в отношении 1:4:7. Через равные промежутки времени по направлению от D к A по дороге едут автобусы с одной и той же скоростью. Из A в D в разное время вышли три пешехода и пошли по дороге с одной и той же скоростью. Первый пешеход в пути между A и B встретил 2 автобуса. Второй пешеход в пути между A и C встретил 4 автобуса. Третий пешеход вышел из A

и прибыл в D , когда через эти пункты проезжали очередные автобусы. Сколько автобусов встретил третий пешеход в пути между A и D ?

Факультет психологии

- 1. Решить уравнение $(\sqrt{3})^{\lg 2x} -$
- 2. Найти все действительные решения системы уравнений $\begin{cases} 2u + v = 7, \\ |u - v| = 2. \end{cases}$
- 3. В прямоугольном треугольнике ABC угол A прямой, величина угла B равна 30° , а радиус вписанной окружности равен $\sqrt{3}$. Найти расстояние от вершины C до точки касания вписанной окружности и катета AB .
- 4. Вычислить площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y = \frac{x}{2x-1}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.
- 5. Доказать, что для любых действительных чисел p и t справедливо неравенство

$$2(2p-1)^4 + 1 + (1 + 2(2p-1)^4) \sin 2t \geq 0,$$

и найти все пары чисел (p, t) , для которых это неравенство превращается в равенство.

Филологический факультет

(отделение структурной и прикладной лингвистики)

- 1. Решить уравнение $\sqrt{3} \sin 2x = 2 \cos^2 x$.
- 2. Решить неравенство $\log_3(x^2 - 1) \leq 1$.
- 3. К параболы $y = 4 - x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$ проведена касательная. Найти точку пересечения этой касательной с осью Oy .
- 4. В трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD и с боковыми сторонами AB и CD вписана окружность с центром O . Найти площадь трапеции, если угол DAB прямой, $OC = 2$ см и $OD = 4$ см.
- 5. При каких значениях a из промежутка $(1, +\infty)$ больший из корней уравнения $x^2 - 6x + 2ax + a - 13 = 0$ принимает максимальное значение?

1981 год

Механико-математический факультет

- 1. Решить неравенство $\frac{\sqrt{x-3}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1} \geq 0$.

- 2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{\sin x} \cdot \cos y = 0, \\ 2 \sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0. \end{cases}$$
- 3. В два различных сосуда налиты растворы соли, причем в 1-й сосуд налито 5 кг, а во второй — 20 кг. При испарении воды процентное содержание соли в 1-м сосуде увеличилось в p раз, а во втором сосуде — в q раз. О числах p и q известно только, что $pq = 9$. Какое наибольшее количество воды могло при этом испариться из обоих сосудов вместе?
- 4. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность ($BC \parallel AD$). На дуге CD взята точка E и соединена со всеми вершинами трапеции. Известно, что $\angle CED = 120^\circ$ и $\angle ABE - \angle BAE = \alpha$. Для треугольника ABE найти отношение периметра к радиусу вписанной окружности.
- 5. Отрезок DE , лежащий в двугранном угле AD с точками B и C на его гранях, параллелен плоскости треугольника ABC , имеющего площадь S . В тетраэдр $BCDE$ вписан шар, k — отношение расстояния от центра шара до прямой DE к расстоянию от DE до плоскости ABC . Пусть B' — проекция точки B на плоскость CDE , и известно, что $\operatorname{tg}(\angle B'DE) : \operatorname{tg}(\angle BDE) = l$. Через середину AD проводится плоскость P , параллельная плоскости ABC . Найти площадь сечения многогранника $ABCDE$, составленного из тетраэдров $ABCD$ и $BCDE$, плоскостью P , если известно, что сумма площадей всех граней тетраэдра $BCDE$ равна σ .

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Три сенокосилки участвовали в покосе травы с поля площадью 25 га. За один час первая сенокосилка скашивает 3 га: вторая — на b га меньше первой, а третья — на $2b$ га больше первой. Сначала работали одновременно первая и вторая сенокосилки и скошили 11 га, а затем оставшуюся часть площади скошили, работая одновременно, первая и третья сенокосилки. Определить значение b ($0 < b < 1$), при котором все поле скошено за 4 часа, если работа велась без перерыва.
- 2. Решить уравнение $\frac{1}{\sqrt{3x-5}} = (3x-5)^{\log_{1/25}(2+5x-x^2)}$.
- 3. В треугольнике ABC величина угла BAC равна $\frac{\pi}{3}$, длина высоты, опущенной из вершины C на сторону AB равна $\sqrt{3}$ см, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 5 см. Найти длины сторон треугольника ABC .
- 4. Для всех вещественных значений a решить уравнение
$$(a+2)^2 \log_3(2x-x^2) + (3a-1)^2 \log_{11} \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) = 0.$$
- 5. Найти все решения уравнения $|\sin(2x-1)| = \cos x$, удовлетворяющие условию $|x| \leq 2\pi$.

- 6. В пирамиде $SABC$ площадь грани ABS равна $\frac{3\sqrt{7}}{4}$, величина угла BCS равна $\arctg \frac{\sqrt{237}}{37}$. Кроме того, $AS = SB$ и $SC \cdot AC = 20$. Известно, что перпендикуляры к граням, восстановленные из центров вписанных в них окружностей, пересекаются в одной точке. Найти объем пирамиды $SABC$.

Физический факультет

- 1. Решить уравнение $\sin(x - 60^\circ) + 2 \cos(x + 30^\circ) = 0$.
- 2. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a \end{cases}$ имеет единственное решение?
- 3. Решить уравнение $\frac{y}{2^x - 2} = \frac{10 + 4^{x/2}}{4}$.
- 4. Решить неравенство $5^{\log_3(\frac{2}{x+2})} < 1$.
- 5. Правильную четырехугольную пирамиду пересекает плоскость, проходящая через вершину основания перпендикулярно противоположному боковому ребру. Площадь получившегося сечения в два раза меньше площади основания пирамиды. Найти отношение длины высоты пирамиды к длине бокового ребра.
- 6. В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке E , лежащей на стороне CD . Известно, что отношение длины отрезка CD к длине отрезка BC равно m . Найти
- 1) отношение расстояний от точки E до прямых AD и BC ;
 - 2) отношение площадей треугольников ADE и BCE .

Химический факультет

- 1. Решить неравенство $\frac{30x-9}{x-2} \geq 25(x+2)$.
- 2. Решить уравнение $2 \cos 2x + \cos^2 \frac{x}{2} - 10 \cos(\frac{5\pi}{2} - x) + \frac{7}{2} = \frac{1}{2} \cos x$.
- 3. Из города A в город B выехал автомобиль. Одновременно с ним из пункта C , расположенного между A и B , выехал второй автомобиль. Первый прибыл в B одновременно с прибытием второго в A . Затем автомобили одновременно выехали навстречу друг другу, встретились в пункте D и одновременно прибыли: первый — в A , второй — в B . Каждый автомобиль ехал со своей постоянной скоростью, но второй сделал остановку на пути от C к A , а первый — остановку той же продолжительности на пути от B к D . Найти расстояние между C и D , если известно, что расстояние от A до C равно 270 км, а расстояние от C до B равно 180 км.
- 4. В прямом круговом конусе расположены два шара единичного радиуса, касающиеся основания конуса в точках, симметричных относительно

центра основания. Каждый из шаров касается боковой поверхности конуса и другого шара. Найти величину угла между образующей конуса и основанием, при которой объем конуса будет наименьшим.

- 5. При каких значениях параметра a неравенство

$$(a^3 + (1 - \sqrt{2})a^2 - (3 + \sqrt{2})a + 3\sqrt{2})x^2 + 2(a^2 - 2)x + a > -\sqrt{2}$$

выполняется для любого $x > 0$?

Биологический факультет

- 1. Решить уравнение $3\log_8(x - 2) = \log_2 \sqrt{2x - 1}$.

- 2. Решить уравнение $\cos\left(2x - \frac{7\pi}{2}\right) = \sin(4x + 3\pi)$.

- 3. Центр O окружности радиуса 3 лежит на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC . Катеты треугольника касаются окружности. Найти площадь треугольника ABC , если известно, что длина отрезка OC равна 5.

- 4. Решить неравенство $(2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2\log_2 x - \log_2(x+6)} > 1$.

- 5. В треугольной пирамиде длины двух непересекающихся ребер равны 12 и 4, а остальные ребра имеют длину 7. В пирамиду вписана сфера. Найти расстояние от центра сферы до ребра длины 12.

Факультет почвоведения

- 1. Три бригады работают с постоянной производительностью, прокладывая рельсовые пути. Первая и третья бригады, работая совместно, прокладывают 15 км путей в месяц. Три бригады вместе укладывают в месяц путей в два раза больше, чем первая и вторая бригады при их совместной работе. Найти, сколько километров путей укладывает в месяц третья бригада, если известно, что вторая бригада совместно с третьей уложили некоторый участок пути в четыре раза быстрее, чем его уложила бы одна вторая бригада.

- 2. Решить уравнение $2(\lg x)^2 + (1 - \sqrt{2})\lg(x^2) = 2\sqrt{2}$.

- 3. Решить неравенство $\sqrt{4x - 8} \geq x - 5$.

- 4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O . Радиус AO перпендикулярен радиусу OB , а радиус OC перпендикулярен радиусу OD . Длина перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AD , равна 9. Длина отрезка BC в два раза меньше длины отрезка AD . Найти площадь треугольника AOB .

- 5. Найти все пары чисел (x, y) , для которых выполнено равенство

$$\frac{3 + 2\cos(x - y)}{2} = \sqrt{3 + 2x - x^2} \cdot \cos^2\left(\frac{x - y}{2}\right) + \frac{\sin^2(x - y)}{2}.$$

Геологический факультет
(отделение общей геологии)

- ▶ 1. Найти все решения уравнения $3 \cdot 2^{x+1} + 5 \cdot 2^x - 2^{x+2} = 21$.
- ▶ 2. Найти все решения уравнения $3 \sin^2 x - \cos^2 x - 1 = 0$.
- ▶ 3. Расстояние между двумя городами скорый поезд проходит на 4 часа быстрее товарного и на 1 час быстрее пассажирского. Найти скорости товарного и скорого поездов, если известно, что скорость товарного составляет $5/8$ от скорости пассажирского и на 50 км/час меньше скорости скорого.
- ▶ 4. Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости соотношением $|x| + |y - 1| \leq 4$.
- ▶ 5. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K . Найти длину отрезка KC , если $BC = 4$, а $AK = 6$.
- ▶ 6. Показать, что функция

$$y = \sin^2 x - 12 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x - 2 \sqrt[3]{66}$$
 может принимать неотрицательные значения.

Геологический факультет
(отделение геофизики)

- ▶ 1. Найти все решения уравнения $x^2 - 4x + |x - 3| + 3 = 0$.
- ▶ 2. Найти все решения уравнения $3 \log_3 x - \log_9 x = 5$.
- ▶ 3. Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости системой неравенств

$$\begin{cases} y \leq 6 - 2|x|, \\ y \geq 2 + 2|x|. \end{cases}$$
- ▶ 4. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4}, \\ 3 \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} y. \end{cases}$$
- ▶ 5. Для составления смеси из двух жидкостей A и B было взято два сосуда: первый емкостью 10 л, второй — 20 л. Сначала в оба сосуда было налито всего 15 л жидкости A . Затем первый сосуд был дополнен доверху жидкостью B и было произведено перемешивание. После этого второй сосуд был дополнен доверху смесью из первого сосуда. После того, как в первый сосуд было добавлено жидкости A столько, сколько было в него ее налито сначала, отношения количества жидкости A ко всему объему имеющейся жидкости в сосудах для первого и второго сосудов

стали равными. Сколько литров жидкости A было налито первоначально в первый сосуд?

- 6. Найти все решения уравнения $\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1$.

Географический факультет

- 1. Решить уравнение $\log_3(2x+1) = 2\log_{2x+1} 3 + 1$.
- 2. Найти наибольшее значение функции $y(x) = \frac{\pi}{2} + \sin^2 x$ на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- 3. Сорокапроцентный раствор серной кислоты в воде слили с шестидесятипроцентным раствором, после чего добавили 5 кг чистой воды и получили раствор двадцатипроцентной концентрации. Если бы вместо 5 кг чистой воды добавили 5 кг восьмидесятипроцентного раствора серной кислоты, то получили бы раствор семидесятипроцентной концентрации. Сколько было сорокапроцентного и шестидесятипроцентного растворов серной кислоты?
- 4. В треугольнике ABC на стороне AC как на диаметре построена окружность, которая пересекает сторону AB в точке M , а сторону BC в точке N . Известно, что $AC = 2$, $AB = 3$ и точка M делит отрезок AB в отношении 2:3. Найти длину отрезка AN .
- 5. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} y^2 - xy + 1 = 0, \\ x^2 + 2x = -y^2 - 2y - 1. \end{cases}$$

Экономический факультет

(отделение политической экономии)

Вариант был такой же, как на на отделении общей геологии геологического факультета в этом году.

Экономический факультет

(отделение планирования и экономической кибернетики)

Вариант был такой же, как на на отделении геофизики геологического факультета в этом году.

Факультет психологии

- 1. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ x^5 \sqrt{x^2 - 4y^2} = 0. \end{cases}$$

- 2. На плоскости лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, у которого катеты имеют длину a . Поворотом данного треугольника вокруг вершины его прямого угла на 45° получается другой равнобедренный прямоугольный треугольник. Найти площадь четырехугольника, являющегося общей частью этих двух треугольников.
- 3. Найти все решения уравнения $\cos 7x - \sqrt{3} \sin 7x = -\sqrt{2}$, которые удовлетворяют условию $0, 4\pi < x < \frac{6\pi}{7}$.
- 4. Решить уравнение $\frac{4}{3}(\log_3(5x-6)^3)^2 - (\log_3(5x-6)^3) \log_3 x^6 = -6(\log_3 \frac{1}{x})^2$.
- 5. Найти все числа a , при каждом из которых наименьшее значение квадратного трехчлена $4x^2 - 4ax + (a^2 - 2a + 2)$ на отрезке $0 \leq x \leq 2$ равно 3.

Филологический факультет

(отделение структурной и прикладной лингвистики)

- 1. Решить уравнение $\sin(2x - \frac{7\pi}{2}) + \sin(\frac{3\pi}{2} - 8x) + \cos 6x = 1$.
- 2. Решить неравенство $\log_2^2(2-x) - 8\log_{1/4}(2-x) \geq 5$.
- 3. В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна 6 см, а высота, проведенная к основанию AD , равна 3 см. Биссектриса угла BAD пересекает сторону BC в точке M так, что $MC = 4$ см. Пусть N — точка пересечения биссектрисы AM и диагонали BD . Вычислить площадь треугольника BNM .
- 4. Каждый из рабочих должен был изготовить 36 одинаковых деталей. Первый рабочий приступил к выполнению своего задания на 4 минуты позже второго, но $1/3$ задания они выполнили одновременно. Полностью выполнив свое задание, первый рабочий после двухминутного перерыва снова приступил к работе и к моменту выполнения задания вторым рабочим изготовил еще две детали. Сколько деталей в час изготавливал каждый рабочий?
- 5. Вычислить размеры конуса наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R .

1982 год

Механико-математический факультет

- 1. Решить уравнение $\log_2(x^2 - 3) - \log_2(6x - 10) + 1 = 0$.

- 2. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром в точке O , при этом $AO = OC = 1$, $BO = OD = 2$. Найти периметр четырехугольника $ABCD$.
- 3. Решить уравнение $\sqrt{5 \sin x + \cos 2x} + 2 \cos x = 0$.
- 4. Найти все значения x , для которых выражение $\sqrt{3x^4 - 2 - x^8} \cdot \sin(\pi(2x + 16x^2))$ не обращается в нуль.
- 5. Дана треугольная пирамида $ABCD$ с вершиной D , грани которой ABD и ACD — прямоугольные треугольники, ребро AD перпендикулярно медиане основания AK и $AD = AK$. Сечением пирамиды плоскостью, не проходящей через середины ребер AD и BC , является равнобокая трапеция $EFGH$ с основаниями EF и GH , причем точка E делит ребро BD пополам, а точка G лежит на ребре AC и $AG = 3 \cdot GC$. Найти отношение площади трапеции $EFGH$ к площади грани BCD .

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Какое из чисел больше, $\sqrt{8}$, или $2^{2 \log_2 5 + \log_{1/2} 9}$?
- 2. Найти все x , для которых функция $y = 6 \cos^2 x + 6 \sin x - 2$ принимает наименьшее значение.
- 3. Решить неравенство $\frac{\sqrt{2-x} + 4x}{x} \geq 2$.
- 4. На заводе было несколько одинаковых прессов, штампующих детали, и завод выпускал 6480 деталей в день. После реконструкции все прессы заменили на более производительные, но также одинаковые, а их число увеличилось на 3. Завод стал выпускать в день 11200 деталей. Сколько прессов было первоначально?
- 5. При всех a решить уравнение $|x + 3| - a|x - 1| = 4$ и определить, при каких a оно имеет ровно два решения.
- 6. Около треугольника ABC описана окружность с центром в точке O . Касательная к окружности в точке C пересекается с прямой, делящей пополам угол B треугольника, в точке K , причем угол BKC равен половине разности утроенного угла A и угла C треугольника. Сумма длин сторон AC и AB равна $2 + \sqrt{3}$, а сумма расстояний от точки O до сторон AC и AB равна 2. Найти радиус окружности.

Физический факультет

- 1. Решить уравнение $\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} + \sqrt{2} \cos \frac{x}{4} = 0$.
- 2. Для каких значений a решение уравнения $10x - 15a = 13 - 5ax + 2a$ больше 2?
- 3. Известно, что $\log_b a = \sqrt{3}$. Вычислить $\log_{\left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right)} \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)$.

- 4. Решить неравенство $5^x - 3^{x+1} > 2(5^{x-1} - 3^{x-2})$.
- 5. На боковом ребре SA правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S взята точка D , через которую проведено сечение пирамиды, пересекающее апофемы граней SAC и SAB в точках M и N . Известно, что прямые DM и DN образуют углы величиной β с плоскостью основания пирамиды, а величины углов DMS и DNS равны α ($\alpha < \frac{\pi}{2}$). Найти величину угла MDN .
- 6. Прямая, проходящая через центры вписанной и описанной окружностей треугольника, перпендикулярна одной из его биссектрис. Известно, что отношение расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей к радиусу описанной окружности равно h . Найти углы треугольника.

Химический факультет

- 1. Решить уравнение $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{3}$.
- 2. Решить неравенство $\log_2 \frac{x}{x-1} \leq -1$.
- 3. Решить неравенство $f(g(x)) < g(f(x))$, где $f(x) = 2^x - 1$ и $g(x) = 2x + 1$.
- 4. Конус лежит на горизонтальной поверхности P_i , касаясь ее боковой поверхностью. Площадь основания конуса равна S_1 , а площадь его боковой поверхности равна S_2 . На какой высоте над плоскостью Π находится наивысшая точка конуса?
- 5. При каких значениях параметра p уравнение

$$(x-p)^2(p(x-p)^2 - p-1) = -1$$
 имеет больше положительных корней, чем отрицательных?

Биологический факультет

- 1. Решить неравенство $\log_{1/2}(1+x-\sqrt{x^2-4}) \leq 0$.
- 2. Решить уравнение $\sin^2 x + \cos^2 3x = 1$.
- 3. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ вписан куб. Четыре вершины одной из граней куба лежат на основании $ABCD$ пирамиды. Вершины противоположной грани куба лежат на боковых ребрах пирамиды. Известно, что $SA = AB = a$. Найти объем куба.
- 4. Найти уравнения тех касательных к графику функции $y = \frac{x^3+1}{x}$, которые вместе с осями координат ограничивают треугольник площади $\frac{1}{2}$.
- 5. Точки P и Q расположены на стороне BC треугольника ABC так, что $BP : PQ : QC = 1 : 2 : 3$. Точка R делит сторону AC этого треугольника так, что $AR : RC = 1 : 2$. Чему равно отношение площади четырехугольника $PQST$ к площади треугольника ABC , где S и T — точки пересечения прямой BR с прямыми AQ и AP соответственно?

Факультет почвоведения

- 1. Из пункта A в пункт B отправился скорый поезд. Одновременно навстречу ему из B в A вышел товарный поезд, который встретился со скорым через $\frac{2}{3}$ часа после отправления. Расстояние между пунктами A и B равно 80 км, поезда двигались с постоянными скоростями. С какой скоростью двигался скорый поезд, если 40 км он прошел за время на $\frac{3}{8}$ часа большее, чем время, за которое товарный поезд прошел 5 км?
- 2. Решить уравнение $\sqrt{2 - 3 \cos 2x} = \sqrt{\sin x}$.
- 3. Найти наибольшее значение функции $f(x) = |x^3 + 6x^2 + 9x + 1|$ на отрезке $[-3, 1]$.
- 4. В равнобедренный треугольник ABC (в котором $AB = BC$) вписана окружность радиуса 3. Прямая p касается этой окружности и параллельна прямой AC , но не совпадает с ней. Расстояние от точки B до прямой p равно 3. Найти расстояние между точками, в которых данная окружность касается сторон AB и BC .
- 5. Длина высоты SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна 1, а длины сторон основания ABC равны $2\sqrt{6}$. Точки M и N — середины отрезков AC и AB . Вычислить радиус сферы, вписанной в пирамиду $SAMN$.

Геологический факультет
(отделение общей геологии)

- 1. Определить, что больше, $\sqrt[7]{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - 3 \cos \pi}$ или $\sqrt[3]{2}$.
- 2. Найти все решения уравнения $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-3}$.
- 3. Найти все решения неравенства

$$2 \log_{25}((1+x)(3-x)) - \frac{1}{2} \log_{\sqrt{5}}(1+x) > \log_{1/5} \frac{1}{2}.$$
- 4. Найти все решения уравнения $\sin\left(\frac{13}{9}\pi \sin x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 5. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается стороны AB в точке D , а стороны AC — в точке E . Найти площадь треугольника ADE , если известно, что $AD = 6$, $EC = 2$ и угол BCA равен 60° .
- 6. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cos y \sin(x+y) + \frac{1}{8} = 0, \\ x = y + z. \end{cases}$$

Геологический факультет (отделение геофизики)

- 1. Определить, что больше, $\sqrt{1 - 2 \sin \frac{3\pi}{2}}$ или $\sqrt[3]{5 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}}$.
- 2. Найти все решения неравенства $\frac{2x+5}{|x+1|} \geq 1$.
- 3. Найти все решения уравнения $9 \cdot 4^{1/x} + 5 \cdot 6^{1/x} = 4 \cdot 9^{1/x}$.
- 4. Найти все решения уравнения $\frac{\sin 4x}{\cos 6x} = 1$.
- 5. Построить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = 4 - |y - \frac{6}{x}| - 2|\frac{3}{x} - 1|$, и среди точек этого множества найти все такие, где координата y принимает наибольшее значение.
- 6. Длина меньшего основания равнобокой трапеции равна сумме длин ее боковых сторон. Найти наименьшее возможное целое k , такое, что площадь полной поверхности фигуры, полученной вращением трапеции вокруг меньшего основания, в k раз больше площади трапеции.

Географический факультет

- 1. Решить уравнение $\sqrt{2x^2 + 8x + 7} - x = 2$.
- 2. При каких значениях x производная функции $y = 3 - 2 \sin(2x - \frac{\pi}{8})$ равна $2\sqrt{2}$?
- 3. В треугольнике ABC длина высоты BD равна 6 см, длина медианы CE равна 5 см, расстояние от точки пересечения BD с CE до стороны AC равно 1 см. Найти длину стороны AB .
- 4. Найти все пары (x, y) , действительных чисел, удовлетворяющих системе неравенств $\begin{cases} \log_{2-x}(2-y) > 0, \\ \log_{4-y}(2x-2) > 0. \end{cases}$
- 5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A' B' C' D'$ длина ребра AB равна 4 см, длина ребра AD равна 6 см, длина ребра AA' равна 8 см. Точка K , лежащая на ребре AA' , удалена от вершины A на 4 см. Расстояние от точки L ребра DD' до вершины D равно 2 см. Точка M лежит на отрезке $B'C$, длина MC вдвое больше длины $B'M$. Найти площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки K, L, M .

Экономический факультет (отделение политической экономики)

- 1. Определить, что больше, $\sqrt{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} - 2 \sin \frac{3}{2}\pi}$ или $\sqrt[3]{5}$.

- ▶ 2. Найти все решения уравнения $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x-2}$.
- ▶ 3. Найти все решения неравенства $\log_3((x+2)(x+4)) + \log_{1/3}(x+2) < \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} 7$.
- ▶ 4. Найти все решения уравнения $\sin\left(\frac{4}{3}\pi \sin x\right) = \frac{1}{2}$.
- ▶ 5. В треугольник вписана окружность, которая касается сторон AB, BC и AC треугольника ABC соответственно в точках M, D, N . Определить длину отрезка MD , если известно, что $NA = 2$, $NC = 3$ и угол BCA равен $\frac{\pi}{3}$.
- ▶ 6. Найти все решения системы уравнений
$$\begin{cases} 8 \cos x \cos y \cos(x-y) + 1 = 0, \\ x + y = z. \end{cases}$$

Экономический факультет

(отделение планирования и экономической кибернетики)

- ▶ 1. Определить, что больше, $\sqrt[7]{2+3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}$ или $\sqrt[3]{-2 \cos \pi}$.
- ▶ 2. Найти все решения неравенства $\frac{2x-5}{|x-1|} \leq 1$.
- ▶ 3. Найти все решения уравнения $5 \cdot 25^{1/x} + 3 \cdot 10^{1/x} = 2 \cdot 4^{1/x}$.
- ▶ 4. Найти все решения уравнения $\frac{\sin 4x}{\sin 6x} = 1$.
- ▶ 5. Построить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $2y + \left|y - \frac{3}{x}\right| = 4 - \left|\frac{3}{x} - 1\right|$, и среди точек этого множества найти все такие, где координата y принимает наибольшее значение.
- ▶ 6. Длина меньшего основания равнобокой трапеции вдвое больше суммы длин ее боковых сторон. Найти наименьшее возможное целое m , такое, что площадь полной поверхности фигуры, полученной вращением трапеции вокруг меньшего основания, в m раз больше площади трапеции.

Факультет психологии

- ▶ 1. Решить неравенство $\frac{2x-3}{4-x} > \frac{1}{x}$.
- ▶ 2. Найти координаты точки пересечения касательных к графику функции $y = \cos \pi x$ в точках с абсциссами $x_0 = \frac{1}{6}$ и $x_0 = \frac{7}{6}$.
- ▶ 3. Решить уравнение $2 \sin x - \sqrt[4]{3} = (\sqrt{2} - \sqrt[4]{12})\sqrt{\sin x}$.
- ▶ 4. В ромбе $ABCD$, где $\angle BAD = 60^\circ$, перпендикуляр к стороне AD , восстановленный из середины AD , пересекает диагональ AC в точке M , а перпендикуляр к стороне CD , восстановленный из середины CD , пересекает диагональ AC в точке N . Найти отношение площади треугольника MND к площади ромба $ABCD$.
- ▶ 5. Из пункта A в пункт B вышел пешеход, и одновременно из пункта B в пункт A выехал мотоциклист. Встретив в пути пешехода, мотоциклист

сразу же развернулся, довез пешехода до пункта B , а затем тотчас же снова поехал в пункт A , куда и добрался беспрепятственно. В результате мотоциклист затратил на дорогу до пункта A в два с половиной раза больше времени, чем если бы он ехал из пункта B в пункт A , не подвозя пешехода. Во сколько раз медленнее пешеход добрался бы до пункта B , если бы весь путь от A до B он прошел пешком?

- 6. Решить уравнение $\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3)$.

Филологический факультет

(отделение структурной и прикладной лингвистики)

- 1. Решить уравнение $\cos 2x + 1 = -\sqrt{2} \sin x$.
- 2. Найти все числа x , удовлетворяющие одновременно следующим условиям:
- 1) $\log_{1/2} \sqrt{5-x} < \log_{1/2}(3-x)$ и
 - 2) $x + \frac{1}{3}$ — целое число.
- 3. Проводятся две касательные к графику функции $y = 3x - x^2$. Первая касательная проводится в точке с абсциссой $x_0 = 2$, вторая — в точке максимума данной функции. Найти площадь треугольника, образованного осью ординат и этими двумя касательными.
- 4. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O , длина стороны AB равна 1, а величина угла OAB равна 60° . Найти площадь общей части кругов, описанных около треугольников ABO и BOC .
- 5. При каких значениях параметра $\alpha \neq 0$ количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих неравенству $|y| \leq \frac{\alpha^2 - x^2}{\alpha^3}$, минимально?

1983 год

Механико-математический факультет

- 1. Решить неравенство $\frac{\sqrt{8|x-x^2|}}{2x+5} \geq \frac{\sqrt{8+x-x^2}}{x+4}$.
- 2. Решить уравнение $\log_2(\cos 2x + \cos \frac{x}{2}) + \log_{1/2}(\sin x + \cos \frac{x}{2}) = 0$.
- 3. В треугольнике ABC с периметром $2p$ длина стороны AC равна a и величина острого угла ABC равна α . Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается стороны BC в точке K . Найти площадь треугольника BOK .

- 4. Найти все значения a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} \left| 12\sqrt{\cos \frac{\pi y}{2}} - 5 \right| - \left| 12\sqrt{\cos \frac{\pi y}{2}} - 7 \right| + \left| 24\sqrt{\cos \frac{\pi y}{2}} + 13 \right| = 11 - \sqrt{\sin \frac{\pi(x-2y-1)}{3}} \\ 2(x^2 + (y-a)^2) - 1 = 2\sqrt{x^2 + (y-a)^2} - \frac{3}{4} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

- 5. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Точка F взята на ребре AD , а точка N взята на ребре DB так, что $DN:NB = 1:2$. Через точки F, N и точку пересечения медиан треугольника ABC проведена плоскость, пересекающая ребро BC в точке H . Через точку H проведена плоскость, параллельная плоскости ADB и пересекающая ребра CA и CD в точках L и K соответственно. Известно, что $CH:HB = (AF:FD)^2$, и что радиус шара, вписанного в пирамиду $CHLK$ равен R . Найти отношение площади треугольника ABC к сумме площадей всех граней пирамиды $ABCD$, если длина перпендикуляра, опущенного из вершины D на плоскость ABC , равна h .

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Найдите область определения функции $y = \sqrt{16 - x^2} \cdot \log_2(x^2 - 5x + 6)$.
- 2. Найдите все решения уравнения $\frac{1 + 2 \sin^2 x - 3\sqrt{2} \sin x + \sin 2x}{2 \sin x \cos x - 1} = 1$.
- 3. Найдите площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости неравенством $2|x| + |y + 2x + 1| \leq 5$.
- 4. Угол при основании равнобедренного треугольника равен $\frac{\pi}{6}$. Построен круг радиуса $\frac{2}{\sqrt{3}}$ с центром в вершине треугольника. Определите отношение площади общей части треугольника и круга к площади треугольника, если длина медианы, проведенной к боковой стороне равна $\sqrt{7}$.
- 5. При всех a решите уравнение $(x-3)(x+1) + 3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = (a-1)(a+2)$ и определите, при каких a оно имеет ровно одно решение.
- 6. Найдите все решения уравнения $\sqrt{2 - |y|} \cdot (5 \sin^2 x - 6 \sin x \cos x - 9 \cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}) = \arcsin^2 x + \arccos^2 x - \frac{5}{4}\pi^2$.

Физический факультет

- 1. Решить уравнение $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$.
- 2. Решить уравнение $|5x^2 - 3| = 2$.
- 3. Решить неравенство $\frac{3}{2} \log_4 \sqrt[3]{x} - \frac{1}{2} \log_2 x > 1$.
- 4. После деления некоторого двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 7 и в остатке 6. После деления этого же двузначного числа на произведение его цифр в частном получается 3 и в остатке 11. Найти это двузначное число.

- 5. Прямая, параллельная гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC , пересекает катет AC в точке D , а катет BC — в точке E , причем $DE = 2$ и $BE = 1$. На гипотенузе взята точка F так, что $BF = 1$. Известно также, что величина угла FCB равна α . Найти площадь треугольника ABC .
- 6. Дан трехгранный угол с вершиной O , у которого величина каждого из плоских углов равна φ . Плоскость α пересекает ребра этого трехгранного угла в точках A, B и C , причем отрезки OA и OB имеют равную длину, а отрезок OC короче отрезка OA . Известно, что величина двугранного угла между плоскостью α и гранью OAB равна β . Два шара расположены по разные стороны от плоскости α так, что каждый шар касается всех граней трехгранного угла и плоскости α . Найти: 1) величину угла между прямой, проходящей через центры шаров и плоскостью грани OAB ; 2) отношение радиусов указанных шаров.

Химический факультет

- 1. Найти все решения уравнения
- $$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 4\sin x = 2 + \sqrt{2}(1 - \sin x).$$
- 2. Решить неравенство $(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 1) \log_5 \frac{x}{5} + \frac{1}{x}(\sqrt{8x - 2x^2 - 6} + 1) \leq 0$.
- 3. Треугольная призма $ABCA'B'C'$ с нижним основанием ABC и боковыми ребрами AA', BB', CC' рассечена плоскостью, проходящей через точки E, F, C , где точка E является серединой ребра AA' , точка F лежит на ребре BB' , причем $BF : FB' = 1 : 2$. Найти объем части призмы $ABCA'B'C'$, заключенный между секущей плоскостью и нижним основанием этой призмы, если известно, что объем призмы равен V .
- 4. Найти координаты точки, лежащей на графике функции $y = 1 + \cos x$ при $0 \leq x \leq \pi$ и наименее удаленной от прямой $x\sqrt{3} + 2y + 1 = 0$.
- 5. Значениями переменных x, y являются действительные числа. Найти все целые значения n , при которых система уравнений
- $$\begin{cases} 6x^2 + 24y(x + y) + 2(3n - 2)x + 4(3n - 2)y + 3 = 0, \\ 4(x^2 + y^2) + (4n + 2)y + 2n^2 = 8xy + (4n + 2)x + \frac{5}{2} \end{cases}$$
- имеет решения. При найденных целых значениях n найти все решения этой системы.

Биологический факультет

- 1. Решить уравнение $4\cos^3 x + 3\sqrt{2}\sin 2x = 8\cos x$.
- 2. Найти все значения x , при которых производная функции $y(x) = 3x^3 \ln x - 36x \ln x - 7x63 + 108x$ равна нулю.
- 3. Решить неравенство $8 + 6 \cdot |3 - \sqrt{x+5}| > x$.

- 4. Площадь трапеции $ABCD$ равна 6. Пусть E — точка пересечения продолжений боковых сторон этой трапеции. Через точку E и точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, которая пересекает меньшее основание BC в точке P , а большее основание AD — в точке Q . Точка F лежит на отрезке EC , причем $EF : FC = EP : EQ = 1 : 3$. Найти площадь треугольника EPF .
- 5. Найти все значения b , при которых оба неравенства
 $2b \cos 2(x-y) + 8b^2 \cos(x-y) + 8b^2(b+1) + 5b < 0$, $x^2 + y^2 + 1 > 2bx + 2y + b - b^2$
 выполняются при любых x и y .

Факультет почвоведения

- 1. Поле разделено на три участка. За день были вспаханы половина первого участка и $3/4$ второго участка, а третий участок, который составляет четвертую часть всего поля, был вспахан полностью. Вспаханная за день площадь поля в два раза больше площади второго участка. Какую часть площади поля составляет площадь, вспаханная за день?
- 2. Решить уравнение $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos 2x = 1$.
- 3. Найти действительные x и y , удовлетворяющие системе уравнений
- $$\begin{cases} x + 2^{y+1} = 3, \\ 4x + 4^y = 32. \end{cases}$$
- 4. В треугольнике ABC биссектриса угла ABC пересекает сторону AC в точке K . Известно, что $BC = 2$, $KC = 1$, $BK = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Найти площадь треугольника ABC .
- 5. Найти все значения α , которые удовлетворяют условию $2 < \alpha < 5$ и при которых уравнение $\log_2(3 - |\sin \alpha x|) = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right)$ относительно x имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $2 \leq x \leq 3$.

Геологический факультет (отделение общей геологии)

- 1. Найти все действительные решения уравнения
 $(x+1)\sqrt{x^2+x-2} = 2x+2$.
- 2. В треугольнике ABC угол A прямой, $AB = 1$, $BC = 3$. Точка K делит сторону AC в отношении 7:1, считая от точки A . Что больше, длина AC , или длина BK ?
- 3. Решить неравенство $\log_3(5x^2 + 6x + 1) \leq 0$.
- 4. Найти все пары действительных чисел x и y , удовлетворяющие системе уравнений
- $$\begin{cases} \cos 4x + \sin 2y = -2, \\ x - y = 2\pi. \end{cases}$$

- 5. Автобус проходит путь AE , состоящий из участков AB, BC, CD, DE длиной 10 км, 5 км, 5 км, 6 км соответственно. При этом, согласно расписанию, выезжая из пункта A в 9 часов, он проходит B в $9\frac{1}{5}$ часа, пункт C — в $9\frac{3}{8}$ часа, пункт D — в $9\frac{2}{3}$ часа. С какой постоянной скоростью v должен двигаться автобус, чтобы сумма абсолютных величин отклонений от расписания прохождений пунктов B, C, D и времени движения автобуса от A до E при скорости v не превосходила 51,7 минут?
- 6. В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC , в котором длины сторон AB и AC равны $\sqrt{5}$. Ребро SA перпендикулярно плоскости ABC , а угол BAC вдвое больше угла BSC . Среди всех прямых круговых цилиндров с образующей, параллельной SA , находящихся внутри пирамиды, рассматривается цилиндр с наибольшей площадью боковой поверхности. Известно, что расстояние от центра его нижнего основания до ребра BC составляет $\frac{1}{16}$ длины медианы AM треугольника ABC . Найти объем пирамиды $SABC$.

Геологический факультет (отделение геофизики)

- 1. Найти все действительные решения уравнения
- $$(x+1)\sqrt{16x+17} = (x+1)(8x-23).$$
- 2. В треугольнике ABC угол A прямой, и $AB = 1$, $BC = 2$. Биссектриса угла ABC пересекает сторону AC в точке L . Пусть Q — точка пересечения медиан треугольника ABC . Что больше, длина BL или длина BQ ?
- 3. Решить неравенство $\log_{\sin \frac{\pi}{3}}(x^2 - 3x + 2) \geq 2$.
- 4. Найти все пары действительных чисел x и y , удовлетворяющих системе уравнений
- $$\begin{cases} 3 \sin 3x + \cos y = -4, \\ x + y = \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$
- 5. Согласно расписанию, катер проходит по реке, скорость течения которой 5 км/час, путь из A в D длиной 15 км за 1 час. При этом, выходя из пункта A в 12 часов, он прибывает в пункты B и C , отстоящие от A на 11 и 13 км соответственно, в 12 час 20 минут и в 12 час 40 минут. Известно, что если бы катер двигался из A в D без остановок с постоянной скоростью v (относительно воды), то сумма абсолютных величин отклонений от расписания прибытия в пункты B, C, D не превышала бы уменьшенного на полчаса времени, необходимого катеру для прохождения 5 км со скоростью v в стоячей воде. Какой из пунктов — A или D — находится выше по течению?
- 6. В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = AC = 1$ и косинус угла BAC равен $\frac{4}{5}$. Ребро

SA перпендикулярно ребрам AB и AC , а угол BAC вдвое больше угла BSC . Внутри пирамиды находится прямой круговой цилиндр, образующая которого параллельна BC . Какова наибольшая возможная площадь боковой поверхности такого цилиндра?

Географический факультет

- 1. Решить уравнение $\cos^2 2x - 5 \sin^2 x + 1 = 0$.
- 2. Решить неравенство $\log_2(\sqrt{x^2 - 4x} + 3) > \log_{1/2} \left(\frac{2}{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x+1} + 1} \right) + 1$.
- 3. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке K . Найти площадь треугольника CKB , если $AC = b$ и угол ABC равен β .
- 4. Решить систему
$$\begin{cases} 2|x^2 - 2x - 3| - \log_2 3 = 3 - y - 4, \\ 4|y| - |y - 1| + (y + 3)^2 \leq 8. \end{cases}$$
- 5. Каждое из ребер треугольной пирамиды $ABCD$ имеет длину 1. Точка P на ребре AB , точка Q на ребре BC и точка R на ребре CD взяты так, что $AP = \frac{1}{2}$, $BQ = CR = \frac{1}{3}$. Плоскость PQR пересекает прямую AD в точке S . Найти величину угла между прямыми SP и SQ .

Экономический факультет

(отделение политической экономии)

- 1. Решить уравнение $3^{x+3} \cdot 7^{x+3} = 3^{2x} \cdot 7^{2x}$.
- 2. Найти все x , удовлетворяющие уравнению $\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{ctg} 5x$.
- 3. Решить неравенство $\sqrt{5x^2 + 61x} < 4 \left(x + \frac{1}{2} \right)$.
- 4. Сколько точек с целочисленными координатами находится внутри криволинейной трапеции, образованной осью абсцисс, прямыми $x = 50$, $x = 244$ и графиком функции $y = \log_3(x + 1)$? Точки, лежащие на границе указанной криволинейной трапеции, не учитывать.
- 5. Строительный отряд состоит из 32 бойцов, каждый из которых владеет одной или двумя строительными профессиями: каменщик, бетонщик, плотник. Бойцов, владеющих профессией плотника, в отряде в два раза больше, чем бойцов, владеющих профессией бетонщика, и в n раз меньше, чем бойцов, владеющих профессией каменщика, причем n — целое число и $3 \leq n \leq 20$. Сколько бойцов в отряде владеет только одной профессией, если число бойцов, владеющих двумя профессиями, на два больше, чем бойцов, владеющих профессией плотника?
- 6. Определить, при каких значениях a уравнение $x - \frac{a}{2} = 4|4|x| - a^2|$ имеет ровно три корня. Найти эти корни.

Экономический факультет

(отделение планирования и экономической кибернетики)

- 1. Решить уравнение $x^2 - 24 - 2\sqrt{x^2 - 24} = 15$.
- 2. Найти все x , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{49 - 4x^2} \left(\sin \pi x + 3 \cos \frac{\pi}{2} x \right) = 0.$$
- 3. Решить неравенство $\log_4(x^2 - 5) < \log_4\left(\frac{7}{3}|x| - 3\right)$.
- 4. В треугольнике ABC медианы AE и BD , проведенные к сторонам BC и AC , пересекаются под прямым углом. Длина стороны BC равна a . Найдите длины других сторон треугольника ABC , если $AE^2 + BD^2 = d^2$.
- 5. На покупку тетрадей в клетку и в линейку можно затратить не более 1 руб 40 коп. Тетрадь в клетку стоит 3 коп, тетрадь в линейку — 2 коп. При покупке число тетрадей в клетку не должно отличаться от числа тетрадей в линейку более, чем на 9. Необходимо закупить максимально возможное суммарное количество тетрадей, при этом тетрадей в линейку нужно закупить как можно меньше. Сколько тетрадей в клетку и сколько тетрадей в линейку можно закупить при указанных условиях?
- 6. Для каждого неотрицательного a решить неравенство $16a^3x^4 + 8a^2x^2 + 16x + a + 4 \geq 0$.

Факультет психологии

- 1. Решить уравнение $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} = 5^{2-x} + 9$.
- 2. Решить неравенство $\frac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x} < 1$.
- 3. В треугольниках ABC и $A'B'C'$ длина стороны AB равна длине стороны $A'B'$, длина стороны AC равна длине стороны $A'C'$, угол BAC равен 60° и угол $B'A'C'$ равен 120° . Известно, что отношение длины $B'C'$ к длине BC равно $\sqrt{n}$ (где n — целое число). Найти отношение длины AB к длине AC . При каких значениях n задача имеет хотя бы одно решение?
- 4. В окружность радиуса 7 вписан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Длины сторон AB и BC равны. Площадь треугольника ABD относится к площади треугольника BCD как 2:1. Величина угла ADC равна 120° . Найти длины всех сторон четырехугольника $ABCD$.
- 5. Найти все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2 \cos x + a \sin y = 1, \\ \log_z \sin y = (\log_x a) \cdot \log_a(2 - 3 \cos x), \\ \log_a z + \log_a\left(\frac{1}{2a} - 1\right) = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение относительно x, y и z . При каждом таком значении a найти все решения.

Филологический факультет

(отделение структурной и прикладной лингвистики)

- ▶ 1. Решить уравнение $\log_5(x-1) = \log_5 \frac{x}{1+x}$.
- ▶ 2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} y^2 = 4^x - 8, \\ 2^{x+1} + y + 1 = 0. \end{cases}$$
- ▶ 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 24x - \cos 12x - 3 \sin 8x$ на отрезке $[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}]$.
- ▶ 4. В трапеции $ABCD$ сторона AD является большим основанием. Известно, что $AD = CD = 4\frac{2}{3}$, $\angle BAD = 90^\circ$ и $\angle BCD = 150^\circ$. На основании AD построен треугольник AED так, что точки B и E лежат по одну сторону от прямой AD , причем $AE = DE$. Длина высоты этого треугольника, проведенной из вершины E , равна $1\frac{2}{5}$. Найти площадь общей части трапеции $ABCD$ и треугольника AED .
- ▶ 5. Найти все значения a , при которых уравнение $|1-ax| = 1 + (1-2a)x + ax^2$ имеет ровно одно решение.

1984 год

Механико-математический факультет

- ▶ 1. Решить уравнение $x^2 + 3x + |x+3| = 0$.
- ▶ 2. Среди корней уравнения $\frac{\cos 2\pi x}{1 + \lg \pi x} = 0$ найти тот, который имеет наименьшее расстояние от числа $\sqrt{13}$ на числовой прямой.
- ▶ 3. Из середины D гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC проведен луч, перпендикулярный к гипотенузе и пересекающий один из катетов. На нем отложен отрезок DE , длина которого равна половине длины отрезка AB . Длина отрезка CE равна 1 и совпадает с длиной одного из катетов. Найти площадь треугольника ABC . Представить в виде десятичной дроби приближенное значение этой площади с точностью до 0,01.
- ▶ 4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3 \cdot 2^{y+3x}, \\ \sqrt{3x^2 + 1 + xy} = \sqrt{x+1}. \end{cases}$$
- ▶ 5. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ основание $ABCD$ имеет своей осью симметрии диагональ AC , длина которой равна 9 см, а точка E пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ делит отрезок AC

так, что длина отрезка AE меньше длины отрезка EC . Через середину бокового ребра пирамиды $SABCD$ проведена плоскость, параллельная основанию и пересекающаяся с ребрами SA, SB, SC, SD соответственно в точках A', B', C', D' . Получившийся многогранник $ABCD A'B'C'D'$, являющийся частью пирамиды $SABCD$, пересекается плоскостью α по правильному шестиугольнику, длина стороны которого равна 2 см. Найти площадь треугольника ABD , если плоскость α пересекает отрезки BB' и DD' .

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- ▶ 1. Известно, что $\log_a b = 7$. Найти $\log_b(a^2b)$.
- ▶ 2. Решить уравнение $9 \cos 3x \cos 5x + 7 = 9 \cos 3x \cos x + 12 \cos 4x$.
- ▶ 3. В трапеции $ABCE$ длин оснований AE равна 16, а длина боковой стороны CE равна $8\sqrt{3}$. Окружность, проходящая через точки A, B, C пересекает прямую AE в точке H . Угол AHB равен 60° . Найти длину отрезка BH .
- ▶ 4. Решить неравенство $\sqrt{7 - \log_2 x^2} + \log_2 x^4 > 4$.
- ▶ 5. Найти все действительные решения (x, y, z) системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 + x^2(13 - y - z) + x(2y + 2z - 2yz - 26) + 5yz - 7y - 7z + 30 = 0, \\ x^3 + x^2(17 - y - z) - x(2y + 2z + 2yz - 26) + y + z - 3yz - 2 = 0, \end{cases}$$
 для которых x принадлежит отрезку $[4, 7]$.
- ▶ 6. Многогранник имеет 6 граней: $ABCK, EMPH, ABME, BCPM, SKHP, AKHE$. Все его вершины лежат на сфере радиуса $\sqrt{34}$. Грани $ABCK$ и $EMPH$ лежат в параллельных плоскостях, расстояние между которыми равно 2. Известно, что $AB : CK = EM : PH \neq 1$, площадь грани $EMPH$ равна 5, а объем многогранника равен $\frac{98}{15}$. Найти длину ребра BM .

Физический факультет

- ▶ 1. Решить уравнение $\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{2 - \sin x} = 0$.
- ▶ 2. Решить уравнение $4 \log_{25}(5x) = 5 - \log_5^2 x$.
- ▶ 3. Решить неравенство $2^{x+3} - x^3 \cdot 2^x \leq 16 - 2x^3$.
- ▶ 4. При каких значениях a все решения уравнения $2|x - a| + a - 4 + x = 0$ удовлетворяют неравенству $0 \leq x \leq 4$?
- ▶ 5. Куб целиком находится в правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S так, что одна грань куба принадлежит основанию, одно ребро целиком принадлежит грани SBC , а грани SAB и SAC содержат по одной вершине куба. Известно, что ребро AB в k раз больше высоты пирамиды. Найти отношение объемов пирамиды и куба.

- 6. Две окружности радиусов r и R ($r < R$) внешним образом касаются друг друга. Прямая касается этих окружностей в точках M и N . В точках A и B окружности касаются внешним образом третьей окружности. Прямые AB и MN пересекаются в точке C . Из точки C проведена касательная к третьей окружности (D — точка касания). Найти длину отрезка CD .

Химический факультет

- 1. Найти все x , удовлетворяющие неравенству $\frac{\sqrt{x-\frac{1}{2}}}{\log_3 x^2} \geq 0$.
- 2. Из пункта A в пункт B выходит поезд. В момент прибытия этого поезда в B оттуда выходит другой поезд, который следует в A . Время, которое прошло от выхода первого поезда из A до прибытия туда второго поезда, в $4\frac{1}{6}$ раза превышает время, которое затратили бы поезда до момента встречи, если бы вышли из A и B одновременно навстречу друг другу. Скорости обоих поездов постоянны, причем скорость второго поезда на 20 км/час превышает скорость первого поезда. Чему равна скорость каждого поезда?
- 3. Определить, при каких значениях аргумента x функция $f(x) = x^2(6 \sin 2x - 8 \cos 2x) + x(6 \cos 2x + 8 \sin 2x) + 3 \sin 2x - 4 \cos 2x$ имеет максимумы.
- 4. В правильную треугольную пирамиду $SABC$ с вершиной S , у которой длина бокового ребра в $\sqrt{2}$ раз меньше длины ребра основания, вписана правильная треугольная пирамида $S'A'B'C'$, у которой длины всех ребер равны между собой. При этом вершина S' лежит в плоскости ABC , а вершины A', B', C' лежат на трех апофемах боковых граней пирамиды $SABC$. Доказать, что вершина S' лежит в точке пересечения медиан треугольника ABC и найти отношение площадей полных поверхностей этих пирамид.
- 5. Найти все a , при которых неравенство $\frac{1}{2}|a-2| \cdot |x+a-4| + \left(\frac{a^2-4a+3}{|a-2|} - |a-2| \right) \cdot |x-2| + \frac{1}{2}|a-2| \cdot |x-a| \leq 1$ выполняется ровно для двух различных значений x .

Биологический факультет

- 1. Решить неравенство $\frac{x}{1-x} < x - 6$.
- 2. Решить уравнение $\cos 2x + 2 \cos x + 7 = 2 \sin \left(\frac{7}{2} \pi + x \right) + 4 \sin^2 \frac{x}{2}$.
- 3. Решить уравнение $\sqrt{4 + 2 \log_2 \left(1 - \frac{8x}{(2x+1)^2} \right)} = \log_2 \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right) + 2 \log_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

- 4. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$ со стороной a . Длина диагонали AC ромба равна $1,5a$. Основание высоты пирамиды совпадает с центром ромба и ее длина в 1,5 раза больше длины AC . Через точку A и середину ребра SC проведена секущая плоскость, образующая с плоскостью основания пирамиды угол 45° . Какова площадь сечения пирамиды этой плоскостью и сколько таких плоскостей можно построить?
- 5. Решить систему уравнений
- $$\begin{cases} y^4 - 4y^3 - 16y^2 - 8xy - 4x^2 + 32y + 64 = 0, \\ \sin(5\pi x) - \sqrt{(x(x-6) + 13) \cdot \cos(\pi(y^2 + 2x + \frac{1}{2}))} + \sin(\pi(2y^2 - x)) = 0. \end{cases}$$

Факультет почвоведения

- 1. Площади трех участков земли относятся как 4:3:5. Средняя урожайность всех трех участков одинакова и составляет 28 ц с 1 га. Известно, что с третьего участка собрано на 84 ц зерна больше, чем с первого. Определить, какова площадь каждого из тех участков.
- 2. Решить уравнение $2\sin^2 x = 1 + \sqrt{3} + \cos 2x$.
- 3. Решить неравенство $\log_2 \left| 1 + \frac{1}{x} \right| > 1$.
- 4. В треугольнике ABC угол BAC равен 75° , длина стороны AB равна c , длина стороны AC равна b . На стороне BC выбрана точка M так, что угол BAM равен 30° . Продолжение прямой AM пересекает окружность, описанную около треугольника, в точке N . Найти длину отрезка AN .
- 5. Указать все значения a , для которых уравнение $\sqrt{a} + \sqrt{a + \sin x} = \sin x$ имеет решение.

Геологический факультет (отделение общей геологии)

- 1. Решить уравнение $4^x - 8 \cdot 2^x - 128 = 0$.
- 2. Найти все значения x , удовлетворяющие неравенству $\sqrt{x^2 - 3x + 2} \leq 3x - 3$.
- 3. Найти $\sin \frac{\alpha}{2}$, если $\cos 2\alpha \leq -\frac{7}{8}$ и $\cos \alpha \leq -\frac{1}{4}$.
- 4. В треугольнике ABC длина стороны AC равна 5 см, сумма длин двух других сторон равна 7 см, косинус угла BAC равен $\frac{4}{5}$. Найти площадь треугольника ABC .
- 5. В саду приготовили N ям для посадки деревьев. После того, как посадили имеющиеся яблони, груши и сливы, оказалось, что было использовано менее трети ям, при этом груш было посажено на 6 штук больше, чем яблонь. если бы яблонь посадили в три раза больше, то остались бы не использованы 59 ям. Сколько ям для посадки было подготовлено, если

известно, что на оставшиеся места посадили персиковые деревья и их оказалось в три раза больше, чем слив, и число посаженных деревьев четное?

- 6. В основании пирамиды $SABCD$ лежит равнобокая трапеция $ABCD$, у которой углы при основании AD равны $\frac{3}{8}\pi$, а длины оснований равны $1 + \sqrt{2}$ и 1. Основание H высоты SH пирамиды лежит вне трапеции $ABCD$ и удалено на расстояние 1 от вершины A . Найти радиус описанного около пирамиды шара, если известно, что $SH = \sqrt{2} + 2\sqrt{2}$, а $BH \perp AD$.

Геологический факультет (отделение геофизики)

- 1. Решить уравнение $3 \cdot 9^{x+1} - 6 \cdot 3^x - 1 = 0$.
- 2. Найти все решения неравенства $\sqrt{2x^2 - 6x + 4} < x + 2$.
- 3. Найти $\sin \alpha$, если $\sin 2\alpha \geq \frac{3}{5}$ и $\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{1}{3}$.
- 4. В треугольнике ABC длина стороны BC равна 4 см, сумма длин двух других сторон равна 6 см. Найти площадь треугольника ABC , если косинус угла ACB равен $\frac{5}{12}$.
- 5. Трое мальчиков хотели вместе купить две одинаковые игрушки. Сложив все имеющиеся у них деньги, дети не могли купить даже одну игрушку. Если бы у первого мальчика было вдвое больше денег, то им на покупку двух игрушек не хватило бы 34 коп. Когда третьему мальчику добавили денег в размере в два раза больше, чем у него было, то после покупки игрушек у детей оставалось 6 коп. Сколько стоили игрушки, если первоначально у второго мальчика было на 9 коп больше, чем у первого?
- 6. У пирамиды $SABC$ длины ребер AB и AC равны 1, а $BC = \sqrt{3}$. Длина высоты SH равна 2. Основание H высоты находится на расстоянии 1 от вершины C и $AH \perp AB$. Найти отношение площадей поверхностей вписанного и описанного вокруг пирамиды шаров.

Географический факультет

- 1. Решить уравнение $2 \sin \frac{x}{2} \cos 2x = \sin \frac{x}{2}$.
- 2. В ромбе $ABCD$ со стороной, равной 6 и углом BAD , равным $\frac{\pi}{3}$, на стороне BC взята точка E на расстоянии, равном 2 от точки C . Найти расстояние от точки E до центра ромба.
- 3. Найти наименьшее значение функции $f(x) = x + \ln \frac{1}{x-2}$ при $x > 2$.
- 4. Через середину высоты правильной четырехугольной пирамиды проведено сечение, перпендикулярное боковому ребру. Найти площадь этого сечения, если длина бокового ребра равна 4, а угол между боковыми ребрами, лежащими в одной грани, равен $\frac{\pi}{3}$.

- 5. Найти все действительные значения α , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y(\alpha x + 1) + 13x - \alpha(1 + y) = 0, \\ x - xy + |2 + y| = 0 \end{cases}$ имеет действительные решения.

Экономический факультет
(отделение политической экономии)

- 1. Решить уравнение $\log_2(4x - 2) = 7 - \log_2(2x + 5)$.
- 2. Найти все решения уравнения $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = \sqrt{3}$.
- 3. Решить неравенство $3|x - 2| + |5x - 4| \leq 10$.
- 4. Сорок девять колхозников, работающих с одинаковой производительностью, были разбиты на две бригады, каждая из которых собрала одинаковое количество картофеля. Первая бригада закончила работу на 1 час позже второй. Обе бригады работали с перерывами на отдых, причем вторая бригада отдыхала не менее $\frac{8}{9}$ часа и не более $\frac{8}{6}$ часа. Если бы обе бригады работали без перерывов, то первая бригада могла бы собрать картофеля в $\frac{7}{4}$ раз больше, а вторая — в $\frac{5}{3}$ раза больше. Сколько колхозников в каждой бригаде?
- 5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ вершины A и C противоположны, а длина стороны AB равна 3. Угол ABC равен $\frac{\pi}{4}$, угол BCD равен $\frac{2\pi}{3}$. Найти длину стороны AD , если известно, что площадь четырехугольника равна $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot AD)$.
- 6. Определить все значения параметра a , при которых ровно одно решение неравенства

$$\sqrt{a^3 - 2a^2 - 4a + 8} \cdot x^3 - \sqrt{a^3 - 2a^2} \cdot x^2 + \sqrt{a^4 - 4a^2} \cdot x - a^2 \leq 0$$

удовлетворяет условию $2a \leq x \leq \sqrt{13}a$.

Экономический факультет
(отделение планирования и экономической кибернетики)

- 1. Решить неравенство $\log_8 \frac{6x-1}{2x^2+3} \geq 0$.
- 2. Найти наименьшее значение функции $y = 2|x - 3| + |3x - 2|$.
- 3. Решить уравнение $3 - 12 \sin^2 x - 2 \cos 4x = -\frac{5}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.
- 4. В треугольнике ABC заданы длины двух сторон: $BC = 4$, $AB = 2\sqrt{19}$. Кроме того, известно, что центр окружности, проведенной через середины сторон треугольника, лежит на биссектрисе угла C . Найти AC .
- 5. Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 12-квартирного дома необходимо 70 деталей первого и 100 деталей второго вида. Для 16-квартирного дома требуется 110 и 150, а для дома на 21 квартиру нужно 150 и 200 деталей первого и второго

видов соответственно. Всего имеется 900 деталей первого и 1300 деталей второго вида. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим?

- 6. В основании пирамиды с вершиной S лежит прямоугольник, центр которого находится на высоте пирамиды. Плоскость пересекает боковые ребра пирамиды в точках P, Q, M и N так, что P и M — противоположные вершины четырехугольника $PQMN$. Известно, что $SP = 7$, $SM = \frac{7}{6}$, $SQ + SN = \frac{25}{6}$, $SQ > SN$. Найти SQ и SN .

Факультет психологии

- 1. Вычислить, не используя микрокалькулятор

$$\left(\frac{3 \left(\frac{17}{90} - 0, 125 : 1\frac{1}{8} \right) : 480}{(7 : 1, 8 - 2\frac{1}{3} : 1, 5) : 2\frac{2}{3}} \right)^{-1} : \left(\frac{679 \cdot 10^{-2}}{0, 7} + 0, 3 \right).$$

- 2. Подъем в гору турист прошел за 2 часа. На спуск с горы, который был на 18 км длиннее подъема, турист затратил вдвое больше времени, чем на подъем в гору. Найти общую длину пройденного туристом пути, если каждый километр при спуске турист проходил на 10 минут быстрее, чем на подъеме.
- 3. Решить уравнение $2(\cos x - 1) \sin 2x = 3 \sin x$.
- 4. Две окружности радиусов 8 и 6 пересекаются в точках A и B . Через центры O_1 и O_2 окружностей проведена прямая; C_1 и C_2 — две из четырех точек пересечения этой прямой с окружностями, причем точка C_1 лежит на окружности с центром O_1 , а длина отрезка C_1C_2 больше 20. Найти расстояние между точками O_1 и O_2 , если произведение площадей треугольников C_1O_1A и C_2O_2B равно 336.
- 5. Второй член арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел, равен 2, а сумма квадратов третьего и четвертого ее членов меньше 4. Найти первый член этой прогрессии.
- 6. Найти все натуральные трехзначные числа, каждое из которых обладает следующими двумя свойствами:
- первая цифра числа в 3 раза меньше суммы двух других его цифр;
 - разность между самим числом и числом, получающимся из него перестановкой двух последних его цифр, неотрицательна и делится на 81 без остатка.
- 7. Найти все пары чисел (x, y) удовлетворяющие одновременно двум неравенствам

$$\begin{cases} 4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} \leq 2, \\ x + 3y \geq 2 - \log_4 3. \end{cases}$$

Филологический факультет

(отделение структурной и прикладной лингвистики)

- 1. Решить уравнение $8^x - 4^x = 2^x$.
- 2. Решить уравнение $\sin 3x \sin x + 1 = \cos 2x$.
- 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = -x^2 + 3|x - 1| + 2$ на отрезке $[-2, 2]$.
- 4. В треугольнике ABC длины сторон AB и AC равны 3 и 2 соответственно. На стороне AB выбрана точка M , а на стороне AC — точка N так, что $AM = 2$ см, $AN = 1,5$ см. Найти площадь треугольника AMN , если BC больше, чем MN в $\frac{6}{\sqrt{17}}$ раз.
- 5. При каком значении параметра a система неравенств
$$\begin{cases} y \geq x^2 + 2a, \\ x \geq y^2 + 2a \end{cases}$$
 имеет единственное решение?

1985 год

Механико-математический факультет

- 1. Решить уравнение $6 \sin x - \frac{1}{6} = \sqrt{34 \sin x - \frac{35}{36}}$.
- 2. Решить неравенство $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{|x|-1} \geq \frac{2}{x-1}$.
- 3. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC соответственно в точках D и E . Найти длину высоты треугольника ABC , опущенной из точки A , если длины сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2, а точки A, D, E, C лежат на одной окружности.
- 4. Из трех значений a : $-1, 2$; $-0,67$; $-0,66$ — найти те значения, при которых уравнение $(2^{a+4} + 15(x+a))(1 + 2 \cos(\pi(a + \frac{x}{2}))) = 0$ имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $0 \leq x \leq 1$.
- 5. На плоскости α , проходящей через центр шара радиуса R , задана окружность с центром O_1 и радиусом r_1 , расположенная внутри шара. Все точки этой окружности соединены прямыми с точкой A , принадлежащей шару и удаленной от плоскости α на расстояние R . Множество отличных от A точек пересечения этих прямых с поверхностью шара является окружностью радиуса r_2 , плоскость которой образует угол φ с плоскостью α . Найти расстояние между точками A и O_1 .

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 6^x - 2 \cdot 3^y = 2, \\ 6^x \cdot 3^y = 12. \end{cases}$
- 2. В трапеции $PQRS$ длина основания QR равна 10, длина диагонали QS равна 19, а величина угла QSP равна 30° . Выяснить, что больше, длина основания QR , или длина стороны RS .
- 3. Решить уравнение $4 - \cos(2\pi(13x + 9)^2) = 5 \cdot \sin(\pi(13x + 9)^2)$.
- 4. Решить неравенство $\frac{2 \log_{1-2|x|}(42x^2 - 14|x| + 1)}{\log_{1-5|x|}(x \cdot \frac{5}{6})^2} \leq 1$.
- 5. Найти все тройки чисел (x, y, z) , удовлетворяющие уравнению
$$\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 10z + 6y + \frac{\sqrt{3}}{2}x - 17 + \sqrt{3x^2 - 2\sqrt{3}(\cos \pi y + \cos \pi z)x + 4}} = 0$$
.
- 6. Все ребра тетраэдра $ABCD$ имеют равную длину. На ребрах AB , AC и AD выбраны соответственно точки K, L, M так, что $KB = 15$, $MD = 10$. Известно, что радиус шара, вписанного в тетраэдр $ABCD$ равен $\frac{5}{2}\sqrt{6}$, а объем пирамиды $AKLM$ равен $375\sqrt{2}$. Найти сумму радиусов двух шаров, вписанного в пирамиду и описанного около нее.

Физический факультет

- 1. Решить уравнение $2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \cos 2x$.
- 2. Решить уравнение $\sqrt{x^4 - 2x - 5} = 1 - x$.
- 3. Решить неравенство $\log_{1/9} x + \log_3(9x) < 3$.
- 4. При каждом a решить уравнение $4^x - 2a(a + 1)2^{x-1} + a^3 = 0$.
- 5. Сфера с центром в точке S проходит через вершины основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$. Отношение площади полной поверхности пирамиды к площади поверхности сферы равно a . Найти величину угла ASB и указать все значения, которые может принимать a в условии задачи.
- 6. В остроугольном треугольнике ABC (где $AB > BC$) проведены высоты AM и CN , точка O — центр описанной около треугольника ABC окружности. Известно, что величина угла ABC равна β , а площадь четырехугольника $NOMB$ равна S . Найти длину стороны AC .

Химический факультет

- 1. Решить уравнение $4(\sin 4x - \sin 2x) = \sin x(4 \cos^2 3x + 3)$.
- 2. Решить неравенство $7^x - \frac{1}{8}x^2 < 7^{1-x} \cdot (\sqrt[8]{7})^{x^2} + 6$.
- 3. На координатной плоскости рассматривается прямоугольник $ABCD$, у которого сторона AB лежит на оси ординат, вершина C лежит на параболе $y = x^2 - 4x + 3$, вершина D лежит на параболе $y = -x^2 + 2x - 2$, а абсцисса вершины D принадлежит отрезку $[\frac{4}{5}, \frac{3}{2}]$. Какое значение должна иметь абсцисса вершины D , чтобы площадь прямоугольника $ABCD$ была наибольшей?
- 4. Основанием пирамиды служит ромб, длина стороны которого равна 2 см, а величина острого угла равна $\frac{\pi}{4}$. Шар, радиус которого равен $\sqrt{2}$ см, касается плоскости каждой боковой грани пирамиды в точке, лежащей на стороне основания пирамиды. Доказать, что высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания пирамиды. Найти объем пирамиды.
- 5. Решить систему

$$\begin{cases} |x - y| - \log_2(|x| + y + 1) + 6 = 0, \\ (x - y)^2 - 6(x - y) \log_2(|x| + y + 1) + 5 \log_2^2(|x| + y + 1) = 0. \end{cases}$$

Биологический факультет

- 1. Решить уравнение $\frac{5}{x+1} + \frac{4x-6}{(x+1)(x \cdot 3)} = 3$.
- 2. Найти все корни уравнения $5 \cos 2x + 7 \cos(x + \frac{\pi}{2}) + 1 = 0$, принадлежащие отрезку $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.
- 3. Решить неравенство $\log_{1/2}^2(3x + 1) > \log_{1/2}(3x + 1) + 6$.
- 4. На отрезке AB лежат точки C и D , причем точка C находится между точками A и D . Точка M взята так, что прямые AM и MD перпендикулярны и прямые CM и MB тоже перпендикулярны. Найти площадь треугольника AMB , если известно, что величина угла CMD равна α , а площади треугольников AMD и CMB равны S_1 и S_2 соответственно.
- 5. Сколько корней на отрезке $[0, 1]$ имеет уравнение $8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=1$?

Факультет почвоведения

- 1. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2x + 2^y = -1, \\ -20x + 3,5 \cdot 2^{y+1} = 146. \end{cases}$$

- 2. Решить уравнение $\lg(x+4) = -2\lg\left(\frac{1}{2-x}\right)$.
- 3. Найти все корни уравнения $(1 + \operatorname{tg}^2 x) \sin x - \operatorname{tg}^2 x + 1 = 0$, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x < 0$.
- 4. Продолжение медианы треугольника ABC , проведенной из вершины A , пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке D . Найти длину отрезка BC , если длина каждой из хорд AC и DC равна 1.
- 5. Пусть x_0 — больший из корней уравнения $x^2 + 2(a-b-3)x + a-b-13 = 0$. Найти наибольшее значение x_0 при $a \geq 2$, $b \leq 1$.

Геологический факультет (отделение общей геологии)

- 1. Определить, что больше, $2^{\log_3 5} - 0,1$ или $5^{\log_3 2}$. Результат обосновать.
- 2. Решить уравнение $\frac{|x-2|}{|x-1|-1} = 1$.
- 3. Первый рабочий изготовил 60 деталей на три часа быстрее второго. За сколько часов второй рабочий изготовит 90 деталей, если, работая вместе, они изготовят за 1 час 30 деталей?
- 4. Решить уравнение $5\sin^2 x - 4\sin x \cos x - \cos^2 x = 4$.
- 5. Решить уравнение $\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}$.
- 6. Дан куб $ABCD A' B' C' D'$ с ребром длины 4. На середине ребра BC взята точка M , а на ребре $A' D'$ на расстоянии 1 от вершины A' взята точка N . Найти длину кратчайшего пути между точками M и N по поверхности куба.

Геологический факультет (отделение геофизики)

- 1. Определить, что больше, $2^{\log_7 3} + \sqrt[5]{6}$ или $3^{\log_7 2} + 6^{\frac{1}{3} \log_6 3}$. Результат обосновать.
- 2. Решить неравенство $\frac{|x-3|}{|x-2|-1} \geq 1$.
- 3. Из пунктов A и B , расстояние между которыми равно 120 км, навстречу друг другу движутся два поезда. Если первый поезд выйдет из A на 2 часа раньше, чем второй выйдет из B , то они встретятся на середине пути. За какое время первый поезд проходит расстояние от A до B , если известно, что через час после встречи расстояние между поездами будет равно 80 км?
- 4. Решить уравнение $2\sin x + 7\cos x = \frac{\sqrt{53}}{2}$.
- 5. Решить уравнение $\sqrt{3x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{3x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 4}$.

- 6. Конус с образующей длины 3 вращается вокруг оси — прямой, перпендикулярной высоте и проходящей через вершину. Площадь сечения полученного тела вращения плоскостью, проходящей через ось вращения, равна 6π . Найти угол наклона образующей конуса к его основанию.

Географический факультет

- 1. Решить уравнение $3 \cos x - \cos 2x = 1$.
- 2. Решить неравенство $\log_{3x-1}(2x) > 1$.
- 3. Из двух пунктов A и B , находящихся друг от друга на расстоянии 120 км, по прямолинейным дорогам, сходящимся в пункте C под углом 60° , одновременно выехали грузовик и автобус соответственно со скоростью 40 км/час и 60 км/час. Автобус прибыл в пункт C на 1 час раньше грузовика. Найти время движения автобуса.
- 4. Величины углов A, B, C треугольника ABC составляют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{\pi}{7}$. Биссектрисы этого треугольника пересекаются в точке D . Точки A', B', C' находятся на продолжениях отрезков DA, DB и DC за точки A, B, C соответственно на одинаковом расстоянии от точки D . Доказать, что величины углов A', B', C' треугольника $A'B'C'$ также образуют геометрическую прогрессию. Найти ее разность.
- 5. Найти все числа a , удовлетворяющие условию $-1 < a < 1$, для которых выражение $1 + 2\sqrt{x^2 - 2axy + y^2 - 6y + 10}$ принимает наименьшее значение лишь при одной паре чисел (x, y) .

Экономический факультет

(отделение политической экономики)

- 1. Найти все решения неравенства $\frac{4x-1}{3x+1} \geq 1$.
- 2. Решить уравнение $2 \sin x = 3 \operatorname{ctg} x$.
- 3. Указать все a , при которых уравнение $\log_2 x + \log_a x + \log_4 x = 1$ имеет решения и найти эти решения.
- 4. Найти наименьшее значение функции $y = \frac{2x^2 + x + 1}{3x^2 - x + 2}$.
- 5. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Не позже, чем через 40 минут вслед за ним вышел второй. В пункт B сначала пришел один из пешеходов, а другой достиг B не ранее, чем через час после этого. Если бы пешеходы вышли одновременно, то они прибыли бы в пункт B с интервалом не более, чем в 20 минут. Определить, сколько времени требуется каждому пешеходу на путь от A до B , если скорость одного из них в 1,5 раза больше скорости другого.

- 6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E — пересечение диагоналей. Известно, что площадь каждого из треугольников ABE и DCE равна 1, площадь всего четырехугольника не превосходит 4, и $AD = 3$. Найти сторону BC .

Экономический факультет

(отделение планирования и экономической кибернетики)

- 1. Найти все решения уравнения $\sqrt{\sin x} = \sqrt{1 - 2\sin^2 x}$.
- 2. Решить неравенство $x \log_{1/3} \left(\frac{1}{3} - x \right) \geq |x|$.
- 3. В треугольнике ABC на основании AC взяты точки P и Q так, что $AP < AQ$. Прямые BP и BQ делят медиану AM на три равные части. Известно, что $PQ = 3$. Найти AC .
- 4. В 6 часов утра из пункта A в пункт B по течению реки отправились лодка и катер. Лодка прибыла в пункт B в 16 часов того же дня. Катер, дойдя до пункта B , сразу повернул и на своем пути из B в A встретил лодку не позднее 14 часов, а прибыл в пункт B не ранее 22 часов того же дня. Найти время прибытия катера в пункт B , если его скорость в стоячей воде вдвое больше скорости лодки в стоячей воде.
- 5. Среди всех решений (x, y, z, v) системы
- $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z^2 + v^2 = 9, \\ xv + yz \geq 6 \end{cases}$$

найти такие, при которых выражение $x + z$ принимает наибольшее значение.

Факультет психологии

- 1. Решить уравнение $2\cos^2 x - \sin x = 1$.
- 2. Решить неравенство $4 \cdot 4^x < 7 \cdot 2^x + 2$.
- 3. Алеша, Боря и Вася покупали блокноты и трехкопеечные карандаши. Алеша купил 4 карандаша и 2 блокнота, Боря — 6 карандашей и 1 блокнот, Вася — 3 карандаша и 1 блокнот. Известно, что суммы денег, заплаченные Алешей, Борей и Васей, образуют соответственно первый, второй и третий члены геометрической прогрессии. Сколько стоит блокнот?
- 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = |x^2 + x| + |x^2 - 3x + 2|$ на отрезке $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.
- 5. Радиус окружности равен R . Отрезок AB является диаметром этой окружности. Длина хорды BC равна R . Хорда, длина которой равна длине хорды AC , пересекает отрезок AC в точке D , а отрезок AB в

точке E . Величина угла ADE равна α . Найти площадь треугольника ADE .

- 6. Найти все значения a , при каждом из которых существует единственная пара целых чисел (x, y) , удовлетворяющая уравнению $-15x^2 + 11xy - 2y^2 = 7$ и неравенствам $x < y$, $2a^2x + 3ay < 0$.

Филологический факультет

(отделение структурной и прикладной лингвистики)

- 1. Найти все решения уравнения $2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin x$, удовлетворяющие условию $-5 < x < -3$.
- 2. Коля, Петя, Миша и Ваня ловили рыбу. Оказалось, что количества рыб, пойманных Колей, Петей и Мишей, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Если бы Коля поймал на две рыбы меньше, а Ваня — на 12 рыб меньше, то количество рыб, пойманных Колей, Петей, Мишей и Ваней, образовывали бы в указанном порядке арифметическую прогрессию. Сколько рыб поймал Миша, если известно, что он поймал на 18 рыб меньше Вани?
- 3. Решить неравенство $\log_{1/2}(\sqrt{x+1} - x) < 2$.
- 4. В треугольнике ABC длина высоты BD равна 3, длина медианы BM равна 5. На стороне BC взята точка Q так, что длины отрезков BQ и QC равны соответственно 1 и 5. Найти площадь S треугольника AQC , если известно, что $S > 3$.
- 5. Для каждого значения a решить уравнение

$$4 \cos x \sin a + 2 \sin x \cos a - 3 \cos a = 2\sqrt{7}.$$

1986 год

Механико-математический факультет

- 1. Решить уравнение $2 \cos(\sqrt{x} + \pi) + 1 = 0$.
- 2. Окружность радиуса 1 см касается окружности радиуса 3 см в точке C . Прямая, проходящая через точку C , пересекает окружность меньшего радиуса в точке A , а большего радиуса — в точке B . Найти длину отрезка AC , если длина отрезка AB равна $2\sqrt{5}$ см.
- 3. Решить неравенство $\frac{1}{4} \cdot x^{\frac{1}{2} \log_2 x} \geq 2^{\frac{1}{4} \log_2^2 x}$.
- 4. Путь из села в город идет сначала по грунтовой дороге, а затем по шоссе. Из села в город в 7 часов утра выехал автомобилист, и одновременно с ним из города в село выехал мотоциклист. Мотоциклист двигался по шоссе быстрее, чем по грунтовой дороге в $1\frac{2}{3}$ раза, а автомобилист —

в $1\frac{1}{2}$ раза (движение обоих по шоссе и по грунтовой дороге считать равномерным). Они встретились в 9 часов 15 минут, автомобилист приехал в город в 11 часов, а мотоциклист приехал в село в 12 часов 15 минут. Определить, сможет ли автомобилист приехать в город до 11 часов 15 минут, если он весь путь из села в город будет ехать с первоначальной скоростью.

- 5. Найти все значения a , при каждом из которых для любого значения b система
$$\begin{cases} bx - y - az^2 = 0, \\ (b-6)x + 2by - 4z = 4 \end{cases}$$
 имеет по крайней мере одно решение (x, y, z) .
- 6. В основании пирамиды $SABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$, у которого стороны AD и BC параллельны, длина стороны AB равна 4 см, длина стороны BC равна 8 см, а величина угла ABC равна 60° . Длина ребра SB равна $8\sqrt{2}$ см. Найти объем пирамиды, если известно, что через прямые AD и BC можно провести две плоскости, не совпадающие с основанием пирамиды и пересекающие пирамиду по равным четырехугольникам.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Решить неравенство $\log_3(x+2) + \log_3(x-4) - 1 \leq 0$.
- 2. Найти координаты точки, лежащей на прямой $3x - 5y = 17$ и наименее удаленной от начала координат.
- 3. В академическом собрании сочинений, включающем менее 20 томов, число томов с художественными произведениями кратно числу томов с письмами, которых, в свою очередь, в три раза меньше, чем томов с публицистикой. Если число томов с художественными произведениями увеличить в два раза, то их станет на 14 больше, чем томов с письмами. Сколько томов с публицистикой содержит собрание сочинений?
- 4. В окружности радиуса 4 проведены хорда AB и диаметр AK , образующий с хордой угол $\frac{\pi}{8}$. В точке B проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение диаметра AK в точке C . Найти длину медианы AM треугольника ABC .
- 5. Решить уравнение $\sin 3x - 2 \sin 18x \cdot \sin x = 3\sqrt{2} - \cos 3x + 2 \cos x$.
- 6. Найти значения c и d , при которых наибольшее значение функции
$$y(x) = \left| 4 \cdot \frac{3^x + 3^{-x} - 2}{3^x + 3^{-x} + 2} + 2(c + 2d) \cdot \frac{3^x - 1}{3^x + 1} + 2c + d \right|$$
 на отрезке $[-1, 1]$ является наименьшим.

Физический факультет

- 1. Решить уравнение $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4-x^2}{2}} = 8^x$.

- 2. Решить неравенство $x - 1 > \frac{4x}{3-x}$.
- 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3^y = x, \\ 2 \sin x + \sin 2x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}. \end{cases}$
- 4. Решить уравнение $x \cdot \log_2(x^2) + 1 = 2x + 2 \log_4 x$.
- 5. В треугольной пирамиде $SABC$ на ребре SB взята точка M , делящая отрезок SB в отношении 3:5, считая от точки S . Через точки A и M параллельно медиане BD треугольника ABC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?
- 6. В треугольнике ABC проведены высота AH длины h , медиана AM длины l и биссектриса AN . Точка N — середина отрезка MH . Найти расстояние от вершины A до точки пересечения высот треугольника ABC .

Химический факультет

- 1. Решить уравнение $\log_2(x-3) = 1 - \log_2(x-2)$.
- 2. Четыре одинаковых насоса, работая вместе, наполнили нефтью первый танкер и треть второго танкера (другого объема) за 11 часов. Если бы три насоса наполнили первый танкер, а затем один из них наполнил четверть второго танкера, то работа заняла бы 18 часов. За сколько часов три насоса могут наполнить второй танкер?
- 3. Найти все значения x из интервала $(0, \frac{\pi}{2})$, при которых производная функции $f(x) = \sin x \sin(\frac{\pi}{2} - x) (\sin(\frac{\pi}{2} - x) - \sin x)$ обращается в нуль.
- 4. На стороне AB треугольника ABC взята точка E , а на стороне BC — точка D так, что длина отрезка AE равна 2, а длина отрезка CD равна 1. Прямые AD и CE пересекаются в точке O . Найти площадь четырехугольника $BDOE$, если длина каждой из сторон AB и BC равна 8, а длина стороны AC равна 6.
- 5. Найти все значения a , при которых система $\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{7|y|}, \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

Биологический факультет

- 1. Найти наибольший отрицательный корень уравнения $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0$.
- 2. Решить неравенство $3^x < 1 + 12 \cdot 3^{-x}$.
- 3. Из пункта A по одному и тому же маршруту одновременно выехали грузовик и легковой автомобиль. Скорость легкового автомобиля постоянна и составляет $\frac{6}{5}$ скорости грузовика. Через 30 минут след за ними из того же пункта со скоростью 90 км/час выехал мотоциклист. Найти

скорость легкового автомобиля, если известно, что мотоциклист догнал грузовик на один час раньше, чем легковой автомобиль.

- 4. Дан треугольник ABC , в котором $AB = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $BC = \frac{5\sqrt{5}}{4}$. Точка M лежит на стороне AB , точка O лежит на стороне BC , причем прямые MO и AC параллельны. Отрезок BM в 1,5 раза длиннее отрезка AM . Биссектриса угла BAC пересекает прямую MO в точке P , лежащей между точками M и O , причем радиус окружности, описанной около треугольника AMP , равен $\sqrt{2} + \sqrt{2}$. Найти длину стороны AC .
- 5. Найти все значения a , при каждом из которых система уравнений
- $$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 8, \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105} \end{cases}$$
- имеет хотя бы одно решение.

Факультет почвоведения

- 1. Решить уравнение $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \cos x$.
- 2. Решить неравенство $\log_3(1 - 2x) \geq \log_3(5x - 2)$.
- 3. Два трактора разной мощности, работая одновременно, вспахали поле за 2 часа 40 минут. Если бы первый трактор увеличил скорость вспашки в два раза, а второй — в полтора раза, то поле было бы вспахано за 1 час 36 минут. За какое время вспахал бы поле первый трактор, работая с первоначальной скоростью?
- 4. Найти площадь треугольника, образованного осью ординат и двумя касательными, проведенными из точки $A(-1, 0)$ к графику функции $y = x^2 + 4x + 7$.
- 5. В треугольнике ABC точка D есть середина AB , точка E лежит на стороне BC , причем $BE = \frac{1}{3} \cdot BC$. Отрезки AE и CD пересекаются в точке O . Найти длину стороны AB , если $AE = 5$, $OC = 4$, а угол AOC равен 120° .

Геологический факультет

- 1. Решить уравнение $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin x$.
- 2. Длины сторон AB , BC и AC треугольника ABC в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Найти отношение высоты треугольника ABC , опущенной из вершины A к радиусу вписанной окружности.
- 3. Решить уравнение $\frac{2 \cdot 6^x - 4^x - 15}{6^x - 9^x - 5} = 3$.
- 4. Студенческий строительный отряд оборудовал прямоугольную спортплощадку площадью 0,1 га, установив с противоположных более длинных сторон трибуны, а с двух других — проволочную сетку. Стоимость

установки одного погонного метра трибун и сетки равны соответственно 7 рублей и 3 рубля. На установку трибун и сетки израсходовано 820 рублей. Найти длины сторон спортплощадки.

► 5. Пусть $a > 0$, $b > 0$. Найти решения неравенства $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}} > \frac{1}{x} - \frac{1}{a}$.

► 6. При всех значениях параметра $p \leq 9$ найти решения уравнения

$$3\sqrt{3} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{15} \sin x - \frac{3\pi}{5} \right) \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{7} \sin^2 x + \frac{3\pi}{14} \right) + \\ + \cos^2 \left(\frac{5\pi}{14} - \frac{\pi}{7} \cos(2x) \right) = 6 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{15} \sin x + \frac{2\pi}{5} \right) - p$$

на отрезке $[0, 2\pi]$.

Географический факультет

► 1. Решить неравенство $\frac{x-3}{x^2+2x-5} > \frac{1}{2}$.

► 2. Решить уравнение $\log_x \sqrt{3} - \log_{x^2} 27 = \frac{1}{2}$.

► 3. Три цистерны одинакового объема начинают одновременно заполняться водой, причем в первую поступает 100 литров воды в минуту, во вторую — 60 и в третью — 80. Известно, что в начальный момент первая цистерна пуста, вторая и третья частично заполнены и что все три цистерны будут заполнены одновременно. Во сколько раз количество воды в начальный момент времени во второй цистерне больше, чем в третьей?

► 4. Внутри треугольника ABC взята точка K . Известно, что $AK = 1$, $KC = \sqrt{3}$, а величины углов AKC , ABK и KBC равны 120° , 15° и 15° соответственно. Найти длину отрезка BK .

► 5. Для каждого значения a , удовлетворяющего неравенствам $0 < a < 2$ найти наименьшее значение выражения $x^2 + y^2 - 2a(x + y)$ при условии $\cos(\frac{\pi}{2}xy) = 1$.

Экономический факультет

(отделение политической экономии)

► 1. Решить уравнение $5^{x+1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$.

► 2. Найти все решения системы уравнений $\begin{cases} 3x + 4 \sin y = -11, \\ -2x + 5 \sin y = \frac{7}{2}. \end{cases}$

► 3. Найти все действительные решения уравнения $\sqrt{3x+4} \cdot (9x^2+21x+10) = 0$.

► 4. В прямоугольнике $ABCD$, где $AB = 6$, $AD = 3 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, расположены две окружности. Окружность радиуса 2 с центром в точке K касается сторон AB и AD . Окружность радиуса 1 с центром в точке L касается

стороны CD и первой окружности. Найти площадь треугольника CML , если M — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на прямую, проходящую через точки K и L .

- 5. Линию, связывающую города A и B , обслуживают самолеты трех типов. Каждый самолет первого, второго и третьего типов может принять на борт соответственно 230, 110 и 40 пассажиров, а также 27, 12 и 5 контейнеров. Все самолеты линии могут принять на борт одновременно 760 пассажиров и 88 контейнеров. Найти число действующих на линии самолетов каждого типа, зная, что их общее число не превосходит 8.
- 6. В пирамиде $SABC$ ребра SC , BC и AC равны соответственно $\frac{\sqrt{93}}{6}$, 3 и 4. Известно, что угол ABC тупой, ребро SC перпендикулярно к плоскости основания ABC , а радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен $\frac{8}{\sqrt{13}}$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину S , точку пересечения медиан треугольника ABC и центр окружности, вписанной в этот треугольник.

Экономический факультет

(отделение планирования и экономической кибернетики)

- 1. Решить уравнение $2^{|x+1|} = (\sqrt{2})^{-2x+3}$.
- 2. Найти все решения системы уравнений
$$\begin{cases} 6 \sin x + 7 \log_y 3 = -10, \\ -5 \sin x + 2 \log_y 3 = 0,5. \end{cases}$$
- 3. Решить неравенство $\sqrt{-25x^2 + 15x - 2} \cdot (8x^2 - 6x + 1) \geq 0$.
- 4. В окружность радиуса $2\sqrt{7}$ вписана трапеция $ABCD$, причем ее основание AD является диаметром, а угол BAD равен $\frac{\pi}{3}$. Хорда CE пересекает диаметр AD в точке P такой, что $AP : PD = 1 : 3$. Найти площадь треугольника BPE .
- 5. В течение нескольких дней двое рабочих изготавливали специальные детали, причем ежедневная выработка деталей у каждого рабочего была постоянной. В итоге за все эти дни второй рабочий изготовил на k деталей больше, чем первый, где число k удовлетворяет неравенствам $127 \leq k \leq 132$. Если бы первый рабочий увеличил ежедневную выработку в 2 раза, то за то же количество дней он изготовил бы на 77 деталей больше, чем второй. Сколько дней рабочие изготавливали детали? Какова была ежедневная выработка каждого из них?
- 6. В наклонной треугольной призме $PQRP_1Q_1R_1$ площадь боковой грани PP_1R_1R равна 64 см^2 , а косинусы двугранных углов при ребрах PP_1 и QQ_1 равны соответственно $\frac{\sqrt{10}}{4}$ и $\frac{1}{4}$. В эту призму помещена треугольная призма $DEFD_1E_1F_1$ так, что вершины D, E, F лежат на отрезках PQ, QR, RP , а вершины D_1, E_1, F_1 — на отрезках P_1Q_1, Q_1R_1, R_1P_1 соответственно. Известно, что призма $DEFD_1E_1F_1$ имеет наименьшую пло-

щадь боковой поверхности среди всех так расположенных призм. Найти площадь боковой поверхности призмы $DEFD_1E_1F_1$.

Факультет психологии

- 1. Найти $\operatorname{tg}^2 2\alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{11}}$.
- 2. Решить уравнение $\sqrt{35-5x} = 9-2x$.
- 3. Решить неравенство $\frac{6-\lg(x^4)}{3+2\lg(x^2)} < 2$.
- 4. В три сосуда налито по 1 кг различных растворов поваренной соли. Если смешать 200 г первого раствора и 100 г второго раствора, то в полученной смеси будет содержаться столько же соли, сколько ее содержится в 100 г третьего раствора. Количества соли в трех растворах, взятые в порядке номеров растворов, образуют геометрическую прогрессию. Сколько граммов второго раствора нужно взять, чтобы в них содержалось столько же соли, сколько ее содержится в 100 г третьего раствора?
- 5. В треугольник ABC вписана окружность. Касательная к этой окружности, параллельная стороне BC , пересекает сторону AB в точке D и сторону AC в точке E . Периметры треугольников ABC и ADE равны соответственно 40 и 30 см, величина угла ABC равна α . Найти радиус окружности.
- 6. Найти наибольшее из значений, которые принимает выражение $x + 3y$, если x и y удовлетворяют неравенству $x^2 + xy + 4y^2 \leq 3$.

Филологический факультет

(отделение структурной и прикладной лингвистики)

- 1. Решить неравенство $x - 3 + \frac{4}{x+1} > 0$.
- 2. Решить уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = \cos x$.
- 3. Из заготовки, имеющей форму круглого цилиндра с диаметром основания 20 см и высотой h вытачивается шар с диаметром h . При каком значении h объем удаляемой части заготовки максимален?
- 4. В трапеции $ABCD$ сторона AB параллельна CD . Диагонали BD и AC трапеции пересекаются в точке O , причем треугольник BOC является равносторонним. Найти длину стороны BC , если $AB = 5$ см и $CD = 3$ см.
- 5. Имеются два ящика с яблоками, причем в первом ящике 15 яблок, а во втором — 16 яблок. Разрешается проводить в любом порядке и в любом количестве следующие операции:
 - а) увеличить на 2 число яблок в первом ящике и одновременно увеличить на 1 их число во втором;

- б) увеличить на 1 число яблок в первом ящике и одновременно увеличить на 2 их число во втором;
- в) уменьшить на 1 число яблок в первом ящике и одновременно увеличить на 2 их число во втором;
- г) уменьшить на 2 число яблок в первом ящике и одновременно уменьшить на 1 их число во втором.

Можно ли, совершая такие действия, добиться того, чтобы одновременно в первом ящике оказалось 50 яблок, а во втором — 25 яблок? Ответ обосновать.

Философский факультет

- 1. Решить систему $\begin{cases} 2x + 5y = -4, \\ 5x + 11y = 3. \end{cases}$
- 2. Найти площадь ромба $ABCD$, если тангенс угла ABC равен $\sqrt{15}$, а длина диагонали AC равна 4 см.
- 3. Решить уравнение $2 \cos^2 x + 3 \sin x = 0$.
- 4. Решить неравенство $\frac{1}{\log_2 x - 4} > \frac{1}{\log_2 x}$.
- 5. Найти все пары целых чисел x и y , удовлетворяющих системе $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 12x + 20y + 65 < 0, \\ 4x + 2y > 3. \end{cases}$

1987 год

Механико-математический факультет

- 1. Решить уравнение $\cos\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{1}{2}$.
- 2. Решить неравенство $\log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}(x^2 + 4x + 11 - 4\sqrt{3}) < 2$.
- 3. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 4 см, причем $AC = BC$. На прямой AB взята точка D , удаленная от прямых AC и BC на расстояние 11 см и 3 см соответственно. Найти косинус угла DBC .
- 4. Два поезда выехали одновременно в одном направлении из городов A и B , расположенных на расстоянии 60 км друг от друга, и одновременно прибыли на станцию C . Если бы один из них увеличил свою скорость на 25 км/час, а другой — на 20 км/час, то они также прибыли бы одновременно на станцию C , но на 2 часа раньше. Найти скорости поездов.

- 5. Найти все пары значений a и b , для которых система

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a(x + y) = x - y + a, \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0 \end{cases}$$

имеет не менее пяти решений (x, y) .

- 6. Сфера касается ребер AS, BS, BC и AC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K, L, M и N соответственно. Найти длину отрезка KL , если $MN = 7$ см, $NK = 5$ см, $LN = 2\sqrt{29}$ см и $KL = LM$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x} + 3y = 9, \\ x - 1 = (\sqrt{x} + 1)y. \end{cases}$
- 2. Существуют ли действительные значения a , для которых $a^2 - 4a + \sqrt{3} = -a\sqrt{2}$? Если такие значения существуют, то сколько их?
- 3. Решить неравенство $\log_{(x+1)^2} 8 + 3\log_4(x+1) \geq 9\frac{1}{4}$.
- 4. Решить уравнение $(2 + 3\cos 2x)(\sqrt{2}\cos 2x + 3\sin x + 3 - 2\sin x + 1) = 0$.
- 5. С завода на стройку нужно перевезти 24 больших и 510 маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомашинами, каждая из которых вмещает в себя 44 маленьких блока и имеет грузоподъемность 10 тонн. Вес маленького блока — 0,2 тонны, большой блок весит 3,6 тонны и занимает место 14 маленьких. Найти минимальное число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков.
- 6. В пирамиде $ABCD$ проведено сечение $KMLN$ так, что точка K лежит на ребре AD , точка M — на ребре DC , точка N — на ребре AB , точка L — на ребре BC , и O — точка пересечения диагоналей KL и MN четырехугольника $KMLN$. Сечение $KMLN$ делит пирамиду на две части. Найти отношение объемов этих частей, если известны следующие соотношения между длинами отрезков:
 $4 \cdot OL = 3 \cdot OK$, $25 \cdot ON = 24 \cdot OM$, $DK \cdot NA - KA \cdot BN = KA \cdot NA$.

Физический факультет

- 1. Решить неравенство $\frac{1}{2x} \geq \frac{1}{1-x}$.
- 2. Решить уравнение $4^{\sin x} + 2^{5-2\sin x} = 18$.
- 3. Известно, что $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{4\pi}{3}$. Найти $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.
- 4. Найти область определения функции $y = \sqrt{\log_{1/2}(3x^2 - 2x)}$.
- 5. Внутри прямоугольного треугольника ABC (угол B прямой) взята точка D так, что площади треугольников ABD и BDC соответственно в три и четыре раза меньше площади треугольника ABC . Длины отрезков AD и DC равны соответственно a и c . Найти длину отрезка BD .

- 6. Шар, радиус которого равен 2, вписан в правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ с вершиной S . Вторым шар радиуса 1 касается первого шара, основания пирамиды и боковых граней BSC и CSD . Найти объем пирамиды и величину двугранного угла при боковом ребре SC .

Химический факультет

- 1. Решить уравнение $(1 + 2 \sin x) \sin x = \sin 2x + \cos x$.
- 2. Решить неравенство $4 \log_2 x + \log_2 \left(\frac{x^2}{8(x-1)} \right) \leq 4 - \log_2(x-1) - \log_2^2 x$.
- 3. Стороны треугольника лежат на осях координат и на касательной к графику функции $y = x^2 + 2x + 1$ в точке, абсцисса a которой удовлетворяет условию $-\frac{1}{2} \leq a \leq 0$. Найти значение a , при котором площадь треугольника будет наибольшей.
- 4. Основанием четырехугольной пирамиды $FABCD$ является квадрат $ABCD$. На ребре AF взята точка E такая, что отрезок CE перпендикулярен ребру AF . Проекция O точки E на основание пирамиды лежит на отрезке AC и делит его в отношении $AO : OC = \gamma$. Найти разность объемов пирамид $FABCD$ и $EABD$, если известно, что угол ADF равен 90° , а $AB = a$.
- 5. Найти все значения p , при каждом из которых множество решений неравенства $(p - x^2)(p + x - 2) < 0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leq 1$.

Биологический факультет

- 1. Решить уравнение $7 \sin \left(2x - \frac{5\pi}{2} \right) + 9 \cos x + 1 = 0$.
- 2. Из пункта A по реке отправляется плот. Одновременно навстречу ему отправляется катер из пункта B , расположенного ниже по течению, чем пункт A . Встретив плот, катер сразу поворачивает и идет вниз по течению. Найти, какую часть пути от A до B пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт B , если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки.
- 3. Решить неравенство $\frac{3 \log_{0,5} x}{2 - \log_{0,5} x} \geq 2 \log_{0,5} x + 1$.
- 4. Площадь трапеции $ABCD$ равна 30. Точка P — середина боковой стороны AB . Точка R на боковой стороне CD выбрана так, что $2 \cdot CD = 3 \cdot RD$. Прямые AR и PD пересекаются в точке Q . Найти площадь треугольника APQ , если $AD = 2 \cdot BC$.
- 5. Найти все значения a , при которых система
- $$\begin{cases} 9x^2 - 6xy + y^2 + 6x - 13y + 3 = 0, \\ 13x^2 + 6xy + 10y^2 + 16x + 2y - 4ax - 6ay + a^2 - 2a + 3 = 0 \end{cases}$$
- имеет хотя бы одно решение.

Факультет почвоведения

- 1. Решить уравнение $5 \sin 2x = \sin 9x - \sin 5x$.
- 2. Решить неравенство $\sqrt{2x+3} \geq x$.
- 3. Один турист преодолевает расстояние 20 км на 2,5 часа быстрее, чем другой. Если бы первый турист уменьшил свою скорость на 2 км/час, а второй увеличил свою скорость в 1,5 раза, то они затратили бы на тот же путь одинаковое время. Найти скорость второго туриста.
- 4. Окружность радиуса 2 касается внешним образом другой окружности в точке A . Общая касательная к обеим окружностям, проведенная через точку A , пересекается с другой их общей касательной в точке B . Найти радиус второй окружности, если $AB = 4$.
- 5. Найти такое значение x из промежутка $-1 \leq x \leq 2$, что точка с абсциссой x и ординатой $y = \sqrt{4 - 2x - \frac{1}{2}x^2} + \frac{1}{3}x^3$ удалена на наименьшее расстояние от начала координат.

Геологический факультет

- 1. Найти диагональ ромба, если его сторона равна стороне равностороннего треугольника с площадью $25\sqrt{3}$ см², а другая диагональ равна 16 см.
- 2. Решить уравнение $2 \sin^2 x - 3 \cos x = 0$.
- 3. Решить неравенство $\frac{1}{x-1} \geq -2$.
- 4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x + y = 30, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3. \end{cases}$
- 5. Двое рабочих изготовили по 60 одинаковых деталей. Первые 30 деталей каждый из них делал с постоянной производительностью, которая у второго рабочего была на 20% выше. Затем первый рабочий стал делать больше на 2 детали в час, а второй — на 3 детали в час. Первый рабочий затратил на выполнение всего задания не менее 5 часов 30 минут, а второй — не более 4 часов 30 минут. Сколько деталей в час делал второй рабочий при выполнении первой половины задания?
- 6. На продолжении ребра ST за точку T правильной четырехугольной пирамиды $SPQRT$ с вершиной S взята точка B так, что расстояние от этой точки до плоскости SPQ равно $\frac{9\sqrt{7}}{2}$ см. Найти длину отрезка BT , если $QR = 12$ см, а $SR = 10$ см.

Географический факультет

- ▶ 1. Решить уравнение $7^x - 14 \cdot 7^{-x} = 3^{\log_3 2} + 3$.
- ▶ 2. Решить неравенство $y^2 + 3|y| < 10$.
- ▶ 3. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность радиуса $2\sqrt{5}$ см, отсекающая от прямой BC отрезок $4\sqrt{5}$ см и касающаяся прямой AC в точке A . Из точки B проведен перпендикуляр к прямой BC до пересечения с прямой AC в точке F . Найти площадь треугольника ABC , если $BF = 2$ см.
- ▶ 4. Найти все решения системы $\begin{cases} \sin(2x + y) = 0, \\ \cos(x + y) = 1, \end{cases}$ удовлетворяющие условиям $-\pi \leq x \leq \pi$, $-2\pi \leq y \leq -\pi$.
- ▶ 5. Найти все натуральные значения b , при каждом из которых выражение $\frac{1}{x + y + 3}$ имеет смысл для всех пар чисел (x, y) , где $x < 0$ и $y < 0$, для которых выражение $\lg(xy - b)$ также имеет смысл.

Экономический факультет
(отделение политической экономии)

- ▶ 1. Решить уравнение $\cos 2x + 3\sqrt{2} \sin x - 3 = 0$.
- ▶ 2. В магазине продано 12 тонн орехов трех сортов по цене соответственно 2 руб., 4 руб., и 6 руб. за 1 кг на общую сумму 42 тыс. руб. Известно, что количества тонн проданных орехов соответственно первого, второго и третьего сортов образуют арифметическую прогрессию. Сколько тонн каждого сорта орехов продано в магазине?
- ▶ 3. Решить неравенство $\frac{|2-x|-x}{|x-3|-1} \leq 2$.
- ▶ 4. Решить неравенство $\frac{1}{2} \log_{x-1}(x^2 - 8x + 16) + \log_{4-x}(-x^2 + 5x - 4) > 3$.
- ▶ 5. В треугольнике ABC точка K на стороне AB и точка M на стороне AC расположены так, что $AK : KB = 3 : 2$ и $AM : MC = 4 : 5$. Найти отношение, в котором прямая, проходящая через точку K параллельно стороне BC , делит отрезок BM .

Экономический факультет
(отделение планирования и экономической кибернетики)

- ▶ 1. Решить уравнение $(2 \sin x - 1) \sqrt{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 0$.
- ▶ 2. В магазине продано 10,5 тонн орехов трех сортов по цене соответственно 2 руб., 4 руб., и 6 руб. за 1 кг на общую сумму 33 тыс. руб. Известно,

что количества тонн проданных орехов соответственно первого, второго и третьего сортов образуют геометрическую прогрессию. Сколько тонн каждого сорта орехов продано в магазине?

- 3. Решить неравенство $\frac{12-x-x}{|x-3|-1} \leq 2$.
- 4. Решить неравенство $\frac{1}{2} \log_{x-1}(x^2 - 8x + 16) + \log_{4-x}(-x^2 + 5x - 4) > 3$.
- 5. В треугольнике ABC точка K на стороне AB и точка M на стороне AC расположены так, что $AK : KB = 2 : 3$ и $AM : MC = 4 : 5$. Найти отношение, в котором точка пересечения прямых KC и BM делит отрезок BM .
- 6. Найти все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

Факультет психологии

- 1. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии на $3/2$ больше, чем сумма ее первых трех членов. Пятый член прогрессии равен ее третьему члену, умноженному на 4. Найти ее четвертый член, если известно, что знаменатель прогрессии положителен.
- 2. Решить уравнение $\log_2(x^2 - 2x - 1) - \log_2(x - \frac{1}{2}) = 1$.
- 3. Бригада маляров белила потолки в классе и в актовом зале школы, причем площадь потолка в актовом зале в три раза больше, чем площадь потолка в классе. В той части бригады, которая работала в актовом зале, было на 6 маляров больше, чем в той части, которая работала в классе. Когда побелка всего потолка в актовом зале закончилась, та часть бригады, которая была в классе, еще работала. Какое наибольшее число маляров могло быть в бригаде, если все они начали работать одновременно и работали с одинаковой производительностью?
- 4. Решить уравнение $\sqrt{\frac{3}{4} - \cos x} = \sqrt{\frac{3}{4} - \cos 3x}$.
- 5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Площади треугольников BOC , COD , AOD равны соответственно 20 м^2 , 40 м^2 , 60 м^2 . Найти угол BAO , если известно, что $AB = 15 \text{ м}$, $AO = 8 \text{ м}$, а угол BOA больше 31° .
- 6. Доказать, что все решения неравенства $\frac{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^2-1}}{x + 2\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^4-2x^2+1}} > 2$ удовлетворяют неравенству $x + 2\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^4-2x^2+1} > 1 + 2\sqrt[3]{x^2-1}$.

Филологический факультет

(отделение структурной и прикладной лингвистики)

- 1. Решить уравнение $2 \cos 2x + 4 \cos x = \sin^2 x$.

► 2. Решить уравнение $\log_{5-x^2}(2x^2 - 8x - 2) = 1 + \log_{5-x^2} 2$.

► 3. Решить неравенство

$$\sqrt{2x^2 + 15x - 17} > x + 3.$$

► 4. Медианы AM и BE треугольника ABC пересекаются в точке O . Точки O, M, E, C лежат на одной окружности. Найти AB , если $BE = AM = 3$ см.

► 5. Решить неравенство

$$\frac{9}{3x+2} > \frac{1 + \log_3(x+6)}{x}.$$

1988 год

Механико-математический факультет

► 1. Решить уравнение $\sqrt{1 - \cos 2x} = \sin 2x$.

► 2. Решить неравенство $\log_{5x-4x^2} 4^{-x} > 0$.

► 3. В параллелограмме $PQRS$ биссектриса угла при вершине P , равного 80° , пересекает сторону RS в точке L . Найти радиус окружности, касающейся отрезка PQ и лучей QR и PL , если известно, что $PQ = 7$.

► 4. Угол между скрещивающимися прямыми AB и CD равен $\arccos \frac{\sqrt{35}}{10}$. Точки E и F являются серединами отрезков AB и CD соответственно, а прямая EF перпендикулярна прямым AB и CD . Найти угол ACB , если известно, что $AB = 2\sqrt{5}$, $CD = 2\sqrt{7}$ и $EF = \sqrt{13}$.

► 5. Два мотоциклиста стартовали раздельно в одной точке стадиона в гонке на 30 кругов, причем второй начал движение, когда первый прошел полкруга. Один из зрителей вышел со стадиона, когда мотоциклисты были рядом. Когда через 4 мин он вернулся, мотоциклисты снова были рядом. Если бы первый мотоциклист после 14 кругов увеличил скорость в 4 раза, а второй мотоциклист после 12 кругов — в два раза, то они финишировали бы одновременно. Определить, с какой разницей во времени финишировали мотоциклисты, если пришедший первым проезжал за минуту более 5 кругов.

► 6. Найти все значения a , при которых система

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{z^2}, \\ \cos x \cos y = -\frac{(x-y)^2}{(a-\pi)^2}, \\ \sin(x-y) = \frac{2(x+y)}{(a-\pi)z} \end{cases}$$

имеет одно решение, удовлетворяющее условиям $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ и $z > 0$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Найти сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма третьего, седьмого, четырнадцатого и восемнадцатого ее членов равна 10.
- 2. Решить уравнение $\cos 7x + \cos x = 2 \cos 3x (\sin 2x - 1)$.
- 3. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC является хордой окружности радиуса 10. Вершина C лежит на диаметре окружности, который параллелен гипотенузе. Угол CAB составляет 75° . Найти площадь треугольника ABC .
- 4. Решить неравенство $8^x \geq 6 \cdot 9^{|x-1|}$.
- 5. Найти все значения параметра a , при которых уравнение

$$((2x + a)\sqrt{22a - 4a^2 - 24} - 2(x^2 + x) \lg a) \lg \left(\frac{36a - 9a^2}{35} \right) = 0$$

имеет по крайней мере два корня, один из которых неотрицателен, а другой не превосходит -1 .

- 6. Сфера с центром в точке O пересечена плоскостью P . Внутри сферы расположены три шара, два из которых одного радиуса, а третий — меньшего радиуса. Каждый из шаров касается двух других шаров, плоскости P и сферы. Известно, что синус угла между плоскостью, проходящей через центры шаров и плоскостью P равен $\frac{1}{\sqrt{5}}$, а косинус угла между радиусами меньшего и большего шаров, проведенными в точки касания их со сферой, равен $\frac{4}{5}$. Расстояние от центра меньшего шара до точки O равно 15. Найти расстояние от точки O до плоскости P , если известно, что оно больше 14.

Физический факультет

- 1. Решить уравнение $\cos 2x + 8 \sin x = 3$.
- 2. В прямоугольном треугольнике величина острого угла равна α , а радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен R . Найти длину высоты треугольника, опущенной на гипотенузу.
- 3. Решить уравнение $\sqrt{4 - 6x - x^2} = x + 4$.
- 4. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке M такой, что $DM : MC = 2 : 1$. Известно, что величина угла CAM равна α . Найти величину угла BAD .
- 5. При каких значениях a система
$$\begin{cases} axy + x - y + \frac{3}{2} = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$
 имеет единственное решение?

- 6. В треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) угол ACB прямой, $AC = 3$, $BC = 4$, $SC = \sqrt{38}$. Боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию ABC . В пирамиду вписан цилиндр, площадь боковой поверхности которого равна $\frac{8\pi}{3}$. Нижнее основание цилиндра находится в плоскости основания пирамиды, а окружность верхнего основания имеет ровно по одной точке с каждой из боковых граней пирамиды. Найти радиус основания цилиндра.

Химический факультет

- 1. Решить уравнение $\log_5(x-8)^2 = 2 + 2\log_5(x-2)$.
- 2. Решить уравнение $\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}} \cos x - 1} + \sin x = 0$.
- 3. Найти точку графика функции $y = x^2 + \frac{1}{2}$, ближайшую к точке $(\frac{1}{4}, 1)$.
- 4. В треугольник ABC с длиной стороны BC , равной 9, вписана окружность, касающаяся стороны BC в точке D . Известно, что $AD = DC$ и косинус угла BCA равен $2/3$. Найти длину стороны AC .
- 5. Найти все значения параметра a , при которых системы уравнений
- $$\begin{cases} x + 2y = 2 - a, \\ -x + ay = a - 2a^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 - 6a = 0 \end{cases}$$
- равносильны.

Биологический факультет

- 1. Найти наименьший положительный корень уравнения $4 \sin 3x \sin x + 2 \cos 2x + 1 = 0$.
- 2. Решить неравенство $2 \log_{\sqrt{2}} 2 + \log_{\sqrt{2}} \left(2^{x^2-1} - \frac{1}{4} \right) < \log_{\sqrt{2}} 31$.
- 3. Для наполнения бассейна были одновременно включены две трубы с постоянной интенсивностью подачи воды. Они наполнили бассейн за 1 час 12 мин. В одиночку одна из труб наполняет бассейн на 1 час быстрее другой. Найти время, за которое наполнила бы бассейн каждая из труб в одиночку.
- 4. Площадь треугольника ABC равна $2\sqrt{3} - 3$, а угол BAC равен 60° . Радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC равен 1. Найти углы ABC и ACB данного треугольника.
- 5. Решить систему
- $$\begin{cases} \left(2 \cos \frac{\pi y}{2} - \sqrt{3} \sin \frac{\pi(x-2y-1)}{3} \right) \cdot (\log_2 \sqrt{3-x^2-y^2+2y} - \sqrt{2}) = 0, \\ \sqrt{3} \cos \frac{\pi y}{2} + \sin \frac{\pi(x-2y)}{3} = \sqrt{3} \cos \frac{\pi(x-2y)}{3}. \end{cases}$$

Факультет почвоведения

- 1. Решить уравнение $3 \cos x + 2 \operatorname{tg} x = 0$.
- 2. Диаметр AB окружности продолжили за точку B и на продолжении отметили точку C . Из точки C провели секущую под углом к AC в 7° , пересекающую окружность в точках D и E , считая от точки C . Известно, что $DC = 3$ см, а угол DAC равен 30° . Найти диаметр окружности.
- 3. Решить уравнение $3 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0$.
- 4. Два вида удобрений — A и B — отличаются весовым содержанием азота, калия и фосфора. В удобрении A азота содержится в 3 раза, а фосфора в 2 раза больше по весу, чем калия. В удобрении B соответственно азота в $5/3$ раза больше, а фосфора в 1,5 раза меньше, чем калия. Можно ли за счет смешивания удобрений A и B приготовить удобрение, в котором азота в 2 раза, а фосфора в 3 раза больше, чем калия?
- 5. При каких значениях параметра p система

$$\begin{cases} x^2 + 2px + 3p^2 + 3p + 3 \leq 3 \sin y - 4 \cos y, \\ 0 \leq y \leq 2\pi \end{cases}$$
 имеет единственное решение?

Геологический факультет

- 1. Решить уравнение $(x - 2) \left(|x| + \sqrt{3} - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 0$.
- 2. Найти все решения неравенства $(x^2 + 8x + 15)\sqrt{x+4} \geq 0$.
- 3. Решить уравнение $(2x^2 - 5x + 2)(\log_{2x}(18x) + 1) = 0$.
- 4. Точка O лежит на отрезке AB так, что $AO = 13$, $OB = 7$. С центром в O проведена окружность радиуса 5. Из A и B к ней проведены касательные, пересекающиеся в точке M , причем точки касания лежат по одну сторону от прямой AB . Найти радиус окружности, описанной вокруг треугольника AMB .
- 5. Путь из A в B проходит первые 80 км по шоссе, а оставшиеся 120 км — по грунтовой дороге. Первую часть пути автобус проезжает на 2 часа быстрее, чем вторую.

Автобус совершил более четырех рейсов по маршруту из A в B и обратно. На это, включая стоянки в конечных пунктах, ушло менее одной недели (т.е. менее 168 часов). За время, которое он провел при этом в движении, автобус мог бы проехать 2100 км, если бы двигался со скоростью, средней арифметической между скоростями движения по шоссе и грунтовой дороге. Найти скорости движения автобуса по шоссе и по грунтовой дороге.

- 6. Найти все действительные значения параметра a , при каждом из которых область значений функции $y = \frac{\sin x + 2(1-a)}{a - \cos^2 x}$ содержит отрезок $[1, 2]$.

Географический факультет

- 1. Найти область определения функции $y = \log_x(x^2 + 3x + 2)$.
- 2. Решить неравенство $3^x - 3^{\frac{1}{2} - x} > \sqrt{3} - 1$.
- 3. Из пункта A в пункт C , находящийся на расстоянии 20 км от A , выехал грузовик. Одновременно с ним из пункта B , расположенного между A и C на расстоянии 15 км от A , в пункт C вышел пешеход, а из C навстречу им выехал автобус. За какое время грузовик догнал пешехода, если известно, что это произошло через полчаса после встречи грузовика с автобусом, а пешеход до встречи с автобусом находился в пути втрое меньше времени, чем грузовик до своей встречи с автобусом?
- 4. Треугольная пирамида $ABCD$ пересекается с плоскостью P по четырехугольнику $EFGH$ так, что вершины E и F лежат на ребрах AB и AC и длина отрезка EF равна 1 см. Известно, что плоскость P параллельна противоположным ребрам AD и BC , которые равны соответственно 4 см и 2 см. Найти периметр четырехугольника.
- 5. Доказать, что при всех $x > 0$ выполняется неравенство $x^2 + \pi x + \frac{15}{2}\pi \sin x > 0$.

Экономический факультет

(отделение политической экономии)

- 1. Какое из чисел больше, $\sqrt[3]{4} + \sqrt{2}$ или 3? Ответ должен быть обоснован.
- 2. Решить неравенство $x + \sqrt{x^2 + x - 6} > -1$.
- 3. Решить уравнение $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cos 2x$.
- 4. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением $|y - \frac{1}{2}x^2| + |y + \frac{1}{2}x^2| \leq 2 + x$.
- 5. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D так, что длина отрезка AD равна 3, косинус угла BDC равен $13/20$, а сумма углов ABC и ADB равна π . Найти периметр треугольника ABC , если длина стороны BC равна 2.
- 6. Найти все значения параметра a , при которых неравенство $|3\sin^2 x + 2a \sin x \cos x + \cos^2 x + a| \leq 3$ выполняется для любых значений x .

Экономический факультет

(отделение планирования и экономической кибернетики)

- ▶ 1. Какое из чисел больше, $\sqrt[3]{4} + \sqrt{2}$ или 3? Ответ должен быть обоснован.
- ▶ 2. Решить уравнение $\sqrt{3} \sin 2x + 2 \sin^2 x - 1 = 2 \cos x$.
- ▶ 3. Решить неравенство $\frac{\sqrt{x^2+x-6}+3x+13}{x+5} > 1$.
- ▶ 4. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением $|y - \frac{1}{2}x^2| + |y + \frac{1}{2}x^2| \leq 2 + x$.
- ▶ 5. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D так, что длина отрезка AD равна 3, косинус угла BDC равен $13/20$, а сумма углов ABC и ADB равна π . Найти периметр треугольника ABC , если длина стороны BC равна 2.
- ▶ 6. Найти все значения параметра a , при которых любой корень уравнения $a(2a - 1) \sin^3 x + 3 \cos^3 x - 2a^2 \sin x = 0$

является корнем уравнения

$$\log_{1/2}(3 \operatorname{tg} x - 1) - \log_2(3 \operatorname{tg} x + 1) - \log_{1/\sqrt{2}}(5 - \operatorname{tg} x) = 1$$

и наоборот, любой корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Факультет психологии

- ▶ 1. Найти все решения уравнения $1 - \sin \frac{x}{2} = \cos x$.
- ▶ 2. Найти все решения уравнения $32^{3(x^3-8)} = 8^{19(2x-x^2)}$.
- ▶ 3. Найти все значения x , при которых выполнено неравенство $2x - 11 < 2\sqrt{36 - x^2}$.
- ▶ 4. Из городов A и B навстречу друг другу одновременно вышли два товарных поезда. Они двигались без остановок, встретились через 24 часа после начала движения и продолжали свой путь, причем первый поезд прибыл в пункт B на 20 часов позднее, чем второй поезд прибыл в A . Сколько времени был в пути первый поезд?
- ▶ 5. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC выбраны соответственно точки B_1 и C_1 , так, что $AB_1 : AB = 1 : 3$ и $AC_1 : AC = 1 : 2$. Через точки A, B_1 и C_1 проведена окружность. Через точку B_1 проведена прямая, пересекающая отрезок AC_1 в точке D , а окружность — в точке E . Найти площадь треугольника B_1C_1E , если $AC_1 = 4$, $AD = 1$, $DE = 2$, а площадь треугольника ABC равна 12.
- ▶ 6. Найти наибольшее значение величины a , при котором неравенство

$$a\sqrt{a}(x^2 - 2x + 1) + \frac{\sqrt{a}}{x^2 - 2x + 1} \leq \sqrt[4]{a^3} \left| \sin \frac{\pi}{2} x \right|$$

имеет хотя бы одно решение.

Филологический факультет

(отделение структурной и прикладной лингвистики)

- 1. Вычислить $\frac{\log_3 24}{\log_7 23} - \frac{\log_3 216}{\log_8 3}$.
- 2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 3|x+1| + 2|y-2| = 20, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$$
- 3. Найти все решения уравнения $\sin 4x + 2 \cos^2 x = 1$, удовлетворяющие условию $|x| < 1$.
- 4. Окружность, проходящая через точку D и касающаяся сторон AB и BC равнобедренной трапеции $ABCD$, пересекает стороны AD и CD соответственно в точках M и N . Известно, что $AM : DM = 1 : 3$ и $CN : DN = 4 : 3$. Найти длину основания BC , если $AB = 7$, и $AD = 6$.
- 5. Через некоторое время после начала работы первая бригада собрала на 2 автомобиля больше, чем вторая. Затем вторая бригада увеличила производительность труда в 1,1 раза и, собрав на втором этапе работы целое число автомобилей n , догнала первую, работавшую все время с постоянной производительностью. Найти наименьшее возможное целое число n .

1989 год

Механико-математический факультет

- 1. Решить уравнение. $1 + 2|\sin x| = 2 \cos 2x$.
- 2. Решить неравенство. $\frac{x-1-\sqrt{\frac{1}{5}+x-x^2}}{\lg(4x+1)-\lg 5} \geq 0$.
- 3. В параллелограмме $ABCD$ длина диагонали BD равна 2, угол C равен 45° , причем прямая CD касается окружности, описанной около треугольника ABD . Найти площадь параллелограмма $ABCD$.
- 4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \log_y x - 2 \log_x y = 1, \\ x^2 + 2y^2 = 3. \end{cases}$$
- 5. Отрезок EF параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $ABCD$, причем $EF = 2$, $AB = 4$. Все стороны прямоугольника $ABCD$ и отрезки AE, BE, CF, DF, EF касаются некоторого шара. Найти объем этого шара.
- 6. Найти наибольшее из значений z , для которых существуют числа x, y , удовлетворяющие уравнению $2x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 4$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Можно ли разместить равносторонний треугольник со стороной 3 внутри круга радиуса $\sqrt[4]{10}$?
- 2. Решить уравнение $8\sqrt{12+16x-16x^2}+4x-4x^2=33$.
- 3. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Вслед за ним через 2 часа из пункта A выехал велосипедист, а еще через 30 минут — мотоциклист. Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались равномерно и без остановок. Через некоторое время после выезда мотоциклиста оказалось, что к этому моменту все трое преодолели одинаковую часть пути от A до B . На сколько минут раньше пешехода в пункт B прибыл велосипедист, если пешеход прибыл в пункт B на 1 час позже мотоциклиста?
- 4. Решить неравенство $1 \leq |\cos x|^{\sqrt{2x-3} \cdot \log |\cos x| \left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)} \right)}$.
- 5. Найти все значения параметра a , при которых уравнение
$$\log_{\frac{1}{\pi}} \left(\frac{a^2 + 4\pi^2 + 4}{4x - x^2 - 2(a - 2\pi)|x - 2| + 4\pi a} \right) - \sqrt{(x - 5a + 10\pi - 34)(|\pi - x| - a + \pi + 2)} = 0$$
 имеет по крайней мере одно целочисленное решение.
- 6. В пирамиде $SABC$ основание H высоты SH лежит на медиане CM основания ABC . Точка O , являющаяся серединой высоты SH , находится на одинаковом расстоянии от точки S , точки E , лежащей на ребре SA , и точки F , лежащей на ребре SB . Известно, что $SH = 8$, $AB = 16\sqrt{2}$, $EF = 8\sqrt{\frac{2}{5}}$, угол SMC не превосходит 30° , а расстояние между серединами ребер AB и SC равно $4\sqrt{13}$. Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду $SABC$.

Физический факультет

- 1. Решить уравнение $\cos x - \cos 3x = \sqrt{7} \sin 2x$.
- 2. В треугольнике известны длина a одной из сторон и величины α и β прилежающих к ней углов. Найти площадь треугольника.
- 3. Решить уравнение $\frac{1}{2} \log_2 x^2 + \log_2 (x - 6) = 4$.
- 4. В правильной треугольной пирамиде отношение бокового ребра к высоте пирамиды равно 2. Найти отношение радиуса вписанного в пирамиду шара к стороне основания пирамиды.
- 5. При каких значениях p уравнение $4(x - \sqrt{p \cdot 4^p})x + 4(4^p - 1) + p = 0$ имеет корни и каковы знаки корней при различных значениях p ?

- 6. Продолжение общей хорды AB двух пересекающихся окружностей радиусов R и r пересекает их общую касательную в точке C (где A лежит между B и C , а M и N — точки касания). Найти:
- 1) радиус окружности, проходящей через точки A, M и N ,
 - 2) отношение расстояний от точки C до прямых AM и AN .

Химический факультет

- 1. Решить неравенство $\frac{3x}{x-1} > 2$.
- 2. Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \dots$ является арифметической прогрессией. Известно, что $a_1 + a_5 + a_{15} = 3$. Найти $a_5 + a_9$.
- 3. Решить уравнение $\log_2(3 \sin x - \cos x) + \log_2(\cos x) = 0$.
- 4. Параллелограммы $ABCD$ и $A'BCD'$ имеют общую сторону BC и расположены симметрично относительно прямой BC (точка A' симметрична точке A , точка D' симметрична точке D). Диагональ BD первого параллелограмма и сторона BA' второго параллелограмма лежат на одной прямой. Угол между диагоналями AC и $A'C$ двух параллелограммов равен 45° . Площадь пятиугольника $ABCD'A'$ равна $15\sqrt{2}$ м². Найти длины сторон параллелограмма $ABCD$.
- 5. Решить уравнение $(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3})+3x(2+\sqrt{9x^2+3})=0$.

Биологический факультет

- 1. Решить уравнение $\log_{49}(2x^2+x-5)+\log_{1/7}(1+x)=0$.
- 2. Найти наименьшее значение функции $f(x)=\frac{1}{2x^3-9x^2+12x+1}$ на отрезке $0 \leq x \leq 3$.
- 3. Решить уравнение $\sin x(3 \sin 2x \cdot \sin^3 x + 12 \sin 2x \cdot \sin x - 16 \cos x) + 2 \sin 4x = 0$.
- 4. В окружность радиуса 2 вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Из точки K , лежащей на продолжении стороны AF так, что $KA < KF$ и $KA = \sqrt{11} - 1$, проведена секущая KH , пересекающая окружность в точках N и H . Известно, что внешняя часть секущей KN равна 2 ($KN = 2$), а угол NFH тупой. Найти угол NKF .
- 5. Числа x, y, z таковы, что $x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $2x + y - z$?

Факультет почвоведения

- 1. Решить уравнение $\sin 2x \cos 2x - \sin x \cos x = 0$.
- 2. Из пункта A в пункт B автомобиль доехал за 5 часов, двигаясь в пределах населенных пунктов со скоростью 60 км/час, а по шоссе вне населенных

пунктов — со скоростью 80 км/час. Обратный путь из B в A занял 4 часа 36 минут. При этом в пределах населенных пунктов автомобиль двигался со скоростью 50 км/час, а по шоссе — 90 км/час. Каково расстояние между пунктами A и B .

- 3. Решить неравенство $\log_{x+2}(2x^2 + x) \leq 2$.
- 4. В прямоугольном треугольнике ABC длина катета AB равна 4, а длина катета AC равна 3. Точка D делит гипотенузу BC пополам. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольник ADC и в треугольник ABD .
- 5. Решить неравенство $(x^2 - 4x + 3) \log_{1/\sqrt{2}}(\cos^2 \pi x + \cos x + 2 \sin^2 \frac{x}{2}) \geq 2$.

Геологический факультет

- 1. Определить, какое из чисел больше, $2 \log_{1/2} \frac{1}{5}$ или $3 \log_8 26$.
- 2. Решить неравенство $x \leq \frac{2}{x-1}$.
- 3. Найти все решения уравнения $\frac{|\sin x|}{\sin x} = 1 - \cos 2x$ на отрезке $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.
- 4. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD , при этом величины углов ADC и CDB относятся как 7:5. Найти длину AD , если известно, что $BC = 1$, а угол BAC равен $\frac{\pi}{6}$.
- 5. В баке находится 100 литров смеси кислоты с водой. Из бака отлили часть смеси и добавили равное по объему количество воды, которое на 10 литров превышает первоначальное количество кислоты в смеси. Затем снова отлили такое же количество смеси, как в первый раз, в результате чего количество кислоты в баке уменьшилось в четыре раза по сравнению с количеством ее в исходной смеси. Определить количество воды в исходной смеси.
- 6. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $(a^2 - 6a + 9)(2 + 2 \sin x - \cos^2 x) + (12a - 18 - 2a^2)(1 + \sin x) + a + 3 = 0$ не имеет решений.

Географический факультет

- 1. Решить уравнение $\sin(x - \frac{\pi}{3}) = \cos(2x - \frac{2\pi}{3})$.
- 2. Из пункта A в пункт B , находящийся в 12 км от A , по горной дороге со скоростью 6 км/час поднимается в гору пешеход. Одновременно с ним из пункта A в пункт B выехал автобус. Доехав до пункта B менее, чем за 1 час, автобус поехал обратно навстречу пешеходу и встретил его через 12 минут после начала движения из пункта B . Найти скорость автобуса на подъеме, если известно, что она в два раза меньше его скорости на спуске.
- 3. Решить неравенство $\log_{10-x^2}(\frac{16}{5}x - x^2) < 1$.

- 4. Даны четыре точки A, B, C, D , не лежащие в одной плоскости. Сфера касается прямых AB и AD в точке A , и прямых BC и CD в точке C . Найти площадь сферы, если известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$.
- 5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD . Известно, что $AD = 2$, $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$ и расстояние между точкой пересечения биссектрис треугольника ABD и точкой пересечения биссектрис треугольника ACD равно $\sqrt{2}$. Найти длину стороны BC .

Экономический факультет

- 1. Найти область определения функции $y = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{-x^2 + x + 20}}$.
- 2. Вычислить $\frac{\log_5 30}{\log_{30} 5} - \frac{\log_5 150}{\log_6 5}$.
- 3. Решить уравнение $||3 - x| - x + 1| + x = 6$.
- 4. Найти все решения уравнения $\operatorname{tg}(4 \sin x) = \sqrt{3}$, удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.
- 5. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC , пересекает сторону AB в точке D и сторону BC в точке E . Найти величину угла CDB , если $AD = 5$, $AC = 2\sqrt{7}$, $BE = 4$, $BD : CE = 3 : 2$.
- 6. Решить в целых числах уравнение $9x^2y^2 + 6xy^2 - 9x^2y + 2x^2 + y^2 - 18xy + 7x - 5y + 6 = 0$.

Факультет психологии

- 1. Решить неравенство $x + 2 < \frac{1}{x+4}$.
- 2. Решить уравнение $|\cos^2 \frac{x}{2} - \frac{2}{5}| = 5 \cos x + 1$.
- 3. Найти все решения системы уравнений $\begin{cases} \log_x 25 + 2y = 2, \\ -(\log_x 0, 2)^3 + y = 1. \end{cases}$
- 4. В четырехугольнике $ABCD$ расположены две непересекающиеся окружности так, что одна из них касается сторон AB, BC и CD , а другая — сторон AB, AD и CD . Прямая MN пересекает стороны AB и CD соответственно в точках M и N и касается обеих окружностей. Найти расстояние между центрами окружностей, если периметр четырехугольника $MBCN$ равен $2p$, сторона BC равна a и разность радиусов окружностей равна r .
- 5. При каждом значении параметра a найти все решения неравенства $x + 2a - 2\sqrt{3ax + a^2} > 0$.

Филологический факультет

(отделение структурной и прикладной лингвистики)

- 1. Решить уравнение $2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) + 1 = \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$.
- 2. Решить неравенство $\sqrt{2x^2 + x} > 1 + 2x$.
- 3. Решить уравнение $\log_{2x+2}(2x^2 - 8x + 6) = 2$.
- 4. В круге с центром O хорда AB пересекает радиус OC в точке D , причем угол CDA равен $\frac{2\pi}{3}$. Найти радиус окружности, касающейся отрезков AD , DC и дуги AC , если $AC = 2$ см, $OD = \sqrt{3}$ см.
- 5. Найти все значения a , при каждом из которых существует единственная тройка чисел (x, y, z) , удовлетворяющая равенствам $x + y + z = x^2 + 4y^2$ и $x + 2y + 3z = a$.

Философский факультет

- 1. Решить неравенство $\frac{x^2 - 5x + 6}{1 - x} < 0$.
- 2. Решить уравнение $\log_3(\sqrt{12 + x} - 2) = \frac{1}{2} \log_3(x + 2)$.
- 3. Обнаружив в 64 метрах от себя уползающую черепаху, Ахиллес начал ее преследовать. Сократив расстояние до черепахи в 8 раз и осознав свое превосходство, он прекратил погоню. Какой путь проделал Ахиллес с начала погони, если его скорость в 15 раз больше скорости черепахи, причем движение Ахиллеса и черепахи происходило по одной прямой?
- 4. Найти наибольшее значение функции $y(x) = x^3 - \frac{4}{3}|x|$ на отрезке $[-1, 1, +1, 1]$.
- 5. Найти все пары значений (α, β) , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} (\alpha + \beta)x + 26y = 2, \\ 8x + (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)y = 4 \end{cases}$$
 имеет бесконечно много решений.

1990 год

Механико-математический факультет

- 1. В треугольнике ABC сторона BC равна 6, сторона AC равна 5, а угол при вершине B равен 30° . Найти площадь треугольника, если расстояние от вершины A до прямой BC меньше, чем $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

- ▶ 2. Решить уравнение $2^{|x-2|\sin x} = (\sqrt{2})^{|x|\sin x|}$.
- ▶ 3. Решить неравенство $\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{1+x} \leq x$.
- ▶ 4. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $x^2 - 2a \sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственное решение.
- ▶ 5. Найти все тройки целых чисел (x, y, z) , удовлетворяющие неравенству $\log_2(2x+3y-6z+3) + \log_2(3x-5y+2z-2) + \log_2(2y+4z-5x+2) > z^2 - 9z + 17$.
- ▶ 6. В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной $2\sqrt{3}$, и $SA = SB = SC = \sqrt{7}$. В трехгранный угол при вершине C вписана сфера S_1 . Сфера S_2 , радиус которой вдвое больше, чем у сферы S_1 , касается сферы S_1 , плоскостей SAC и ABC . При этом отрезок прямой SB , заключенный внутри сферы S_2 , имеет длину $\frac{8}{\sqrt{7}}$. Найти радиус сферы S_2 .

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- ▶ 1. Решить неравенство $\log_{x^2+4} 8 < 1$.
- ▶ 2. Числа $a_1, a_2, \dots, a_{21}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма членов этой прогрессии с нечетными номерами на 15 больше суммы членов с четными номерами. Найти a_{12} , если $a_{20} = 3a_9$.
- ▶ 3. Решить уравнение $3 \cdot 64^{2\sin^2(x+\frac{\pi}{4})} - 392 \cdot 8^{\sin 2x} + 16 = 0$.
- ▶ 4. Решить неравенство $\sqrt{9v^2 - 48v - 21} + \sqrt{9v^2 - 51v - 15} \leq |3v - 6|$.
- ▶ 5. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен $\frac{\sqrt{15}}{3}$. Окружность радиуса $\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$ касается лучей, образующих угол ACB , и вписанной в треугольник ABC окружности. Найти тангенс угла ABC , если площадь треугольника ABC равна $3\sqrt{15}$, а наибольшей из его сторон является сторона AC .
- ▶ 6. Найти все значения параметра a , при которых для любых значений параметра b неравенство

$$\left| \log_6 \left(\frac{x}{36} \right) + \left(\frac{10a + 3b + 31}{5} \right) x^2 - 9b^2 - 9b - 1 \right| \leq \log_6 \left(\frac{36}{x} \right) + \left(\frac{10a + 3b + 41}{5} \right) x^2 - (6b + 2)x + 9b^2 + 15b + 3$$
 имеет хотя бы одно решение.

Физический факультет

- ▶ 1. Решить уравнение $x^2 - 6|x| - 2 = 0$.
- ▶ 2. В равнобедренном треугольнике медиана к боковой стороне имеет длину l и образует с основанием угол β . Найти площадь треугольника.
- ▶ 3. Решить уравнение $\sin x \sin 5x = \cos 4x$.

- 4. На стороне BC треугольника BCD взята точка A так, что $BA = AC$, $\angle CDB = \alpha$, $\angle BCD = \beta$, $BD = b$. Пусть CE высота треугольника BCD . Окружность проходит через точку A и касается стороны BD в точке E . Найти радиус этой окружности.
- 5. Определить, при каких k уравнение $\log_{\sqrt{2-x}}(4x+k) = 4$ имеет решения и найти все эти решения.
- 6. В правильной треугольной пирамиде $SPQR$ отношение высоты QT основания PQR к апофеме пирамиды равно k . Конус с вершиной Q и образующей QT касается своей боковой поверхностью основания PQR и боковых граней PSQ и RSQ пирамиды. Найти: 1) отношение площади боковой поверхности конуса к площади основания пирамиды; 2) в каких пределах может изменяться это отношение при изменении k ; 3) при каких k основание конуса имеет точки, находящиеся вне пирамиды?

Химический факультет

- 1. Решить уравнение $4^x + 3 \cdot 2^{x+2} = 64$.
- 2. Решить уравнение $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = \frac{5}{4} - 2 \cos 2x$.
- 3. Вычислить площадь и периметр треугольника, образованного осями координат и касательной, проведенной к графику функции $y = a \sin x$ ($a > 0$) в точке $x_0 = -\frac{4\pi}{3}$.
- 4. Два насоса, работая вместе, наполняют бассейн водой за 10 часов. Половину бассейна первый из них может наполнить за время, на 7,5 часов меньшее, чем второй. Первый насос включили в 6 часов, второй — в 8 часов. В 12 часов в бассейне было 400 м^3 воды. Какова емкость бассейна?
- 5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 6$ и $BC = 9$. Высота пирамиды проходит через точку O пересечения диагоналей AC и BD основания и равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Точки E и F лежат на ребрах AB и AD соответственно, причем $AE = 4$, $AF = 6$. Найти площадь многоугольника, полученного при пересечении пирамиды с плоскостью, проходящей через точки E и F и параллельной ребру AS .

Биологический факультет

- 1. Решить уравнение $3 \cos 2x = 4 - 11 \cos x$.
- 2. Решить неравенство $9^{2x+0,5} - 10 \cdot 27^{\frac{2}{3}x} > \frac{11}{3}$.
- 3. Из пунктов A и B , расстояние между которыми 300 км, одновременно навстречу друг другу выехали грузовой и легковой автомобили. Через 4 часа после начала движения они встретились. После встречи легковой автомобиль, едущий из A в B , увеличил свою скорость на 15 км/час, а

грузовик увеличил свою скорость на 30 км/час. Определить первоначальную скорость легкового автомобиля, если известно, что он прибыл в пункт B на 1 час раньше, чем грузовик прибыл в пункт A .

- 4. Из точки M на окружности проведены три хорды: $MN = 1$, $MP = 6$, $MQ = 2$. При этом углы NMP и PMQ равны. Найти радиус окружности.
- 5. Найти все значения a, b, x, y, z , при которых выполняются соотношения

$$\begin{cases} 1 + \operatorname{tg}(bz) \sin^2(xy) + \cos(2xy) \leq (\cos x + \sin(ay)) |\sin(2xy)|, \\ 2 + 2\sqrt{\operatorname{tg}(bz)} \cos(b(y+x)) + \cos(2b(y+x)) = 0. \end{cases}$$

Факультет почвоведения

- 1. Решить уравнение $2 - 3^{x-2} = 3^{x-1}$.
- 2. Трактористы A и B вспахали поле. В первый день они вспахали $1/3$ поля, причем A работал 2 часа, а B — на 1 час больше. Оставшуюся часть поля они вспахали на другой день, при этом A работал 5 часов, а B — 4,5 часа. За сколько часов работы тракторист B мог бы вспахать это поле один?
- 3. В треугольнике ABC сторона AB равна 4 см, угол A равен 30° , угол B равен 130° . На стороне AB как на диаметре построен круг. Найти площадь части круга, лежащей внутри треугольника.
- 4. Найти наименьшее значение функции $y = 1 + 4 \sin x - 2x$ на отрезке $[0, \pi]$.
- 5. Найти все значения x , при которых наибольшее из чисел $2x + 1$ и $x + 2$ больше -1 .
- 6. Решить неравенство $\log_2(x+2) > 1 - x$.

Геологический факультет

- 1. Решить уравнение $\frac{x}{|x|} + x = x^2 + 1$.
- 2. Найти площадь треугольника OAB , образованного на плоскости отрезками прямых OA, OB, AB , где O — начало координат, A — точка пересечения прямых $y = 2x$ и $y = -x + 3$, а B — точка пересечения прямой $y = -x + 3$ и оси Ox .
- 3. Решить уравнение $\operatorname{tg} x(1 - 2 \sin x) - 2 \cos x = -\sqrt{3}$.
- 4. Решить неравенство $\frac{\log_{1/3} \left(\frac{1}{x^7} \right) + 2}{\log_9 x^6} \geq \frac{5}{\log_x 3} + 2$.
- 5. Найти все пары действительных чисел a и b , при которых уравнение

$$(3x - a^2 + ab - b^2)^2 + (2x^2 - a^2 - ab)^2 + x^2 + 9 = 6x$$
 имеет хотя бы одно решение x .

- 6. Окружность, проведенная через вершины B и C треугольника ABC , пересекает сторону AB в точке D , а сторону AC — в точке E . Площадь круга, ограниченного этой окружностью, в 12 раз меньше площади круга, описанного около треугольника ADE . Отношение площади треугольника ADE к площади четырехугольника $BDEC$ равно $\frac{25}{11}$. Угол DBE равен 60° . Найти угол ADC .

Географический факультет

- 1. Решить уравнение $\cos^2 6x - \sin^2 3x - 1 = 0$.
- 2. Произведение первого и пятого членов геометрической прогрессии равно 12. Частное от деления второго члена на четвертый равно 3. Найти второй член прогрессии.
- 3. Решить неравенство $\frac{2^{2+\sqrt{x-1}} - 24}{2^{1+\sqrt{x-1}} - 8} > 1$.
- 4. На сторонах AB, BC и AD параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки K, M и L таким образом, что $AK : KB = 2 : 1$, $BM : MC = 1 : 1$, $AL : LD = 1 : 3$. Найти отношение площадей треугольников KBL и BML .
- 5. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $(a+1)x^2 + (|a+2| - |a+10|)x + a = 5$ имеет два различных положительных корня.

Экономический факультет

- 1. Содержит ли область значений функции $y = 2x^2 - 4\sqrt{5}x + 8 + \log_2 12$ отрезок $[\sqrt{2}, 7]$? Ответ обосновать.
- 2. Решить уравнение $5\sqrt{1 + |x^2 - 1|} = 3 + |5x + 3|$.
- 3. Окружность с центром в точке O , лежащей на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC , касается его катетов AB и BC . Найти длину AC , если известно, что $AM = \frac{20}{9}$, $AN : MN = 6 : 1$, где M — точка касания AB с окружностью, а N — точка пересечения окружности с AC , расположенная между точками A и O .
- 4. Натуральные числа k, l, m , взятые в указанном порядке, образуют возрастающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой является целым числом. Числа 2835 и 2646 делятся без остатка на l и m соответственно. Найти числа k, l и m , если известно, что при указанных условиях сумма $k + l + m$ максимальна.
- 5. Найти все корни уравнения $\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi x\right)} \cdot \sin(\pi x) - \cos(\pi x) = 2$, расположенные на отрезке $[-3, 2]$.

- 6. Найти все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} (2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x - 5 = a - 2y + y^2, \\ x^2 + (2 - a - a^2)y^2 = 0, \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Факультет психологии

- 1. Решить уравнение $4 \sin^2 \left(2 \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right) - 2(\sqrt{5} - \sqrt{3}) \cos(2x - \pi) + \sqrt{15} - 4 = 0$.
- 2. Решить неравенство $\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{x}-1} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{x}} < \frac{1}{3}$.
- 3. Решить неравенство $\left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{8} - \frac{15}{88-32x} \right)^2 \leq 1$.
- 4. В трапеции $ABCD$ основание AD равно 16 м, сумма диагоналей AC и BD равна 36 м, угол CAD равен 60° . Отношение площадей треугольников AOD и BOC , где O — точка пересечения диагоналей, равно 4. Найти площадь трапеции.
- 5. Считая известным, что при любом $a > 0$ уравнение $2x^3 + x^2 - x - a - 1 = 0$ имеет единственный положительный корень x_0 (зависящий от a), найти все $a > 0$, при которых $12x_0^3 - 7x_0 > 6a + 1$.

Филологический факультет

(отделение структурной и прикладной лингвистики)

- 1. Решить уравнение $\sqrt{10} \cos x - \sqrt{4 \cos x - \cos 2x} = 0$.
- 2. Решить неравенство $\log_{x-2}(3x - x^2) \leq 2$.
- 3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены медиана CM и высота CH . Найти отношение $AH : AM$, если $CM : CH = 5 : 4$ и точка H находится между точками A и M .
- 4. От двух сплавов массой 7 кг и 3 кг с разным процентным содержанием магния отрезали по куску одинаковой массы. Затем, кусок, отрезанный от первого сплава, сплавляли с остатком второго сплава, а кусок, отрезанный от второго сплава, сплавляли с остатком первого сплава. Определить массу каждого из отрезанных кусков, если новые сплавы получились с одинаковым процентным содержанием магния.
- 5. Известно, что основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ служит квадрат $ABCD$, а высота пирамиды совпадает с ребром SA . Найти высоту пирамиды, если радиус вписанного в пирамиду шара равен 3, а сторона квадрата $ABCD$ равна 15.

1991 год

Механико-математический факультет

- ▶ 1. Решить уравнение $\sqrt{4 \cos 2x - 2 \sin 2x} = 2 \cos x$.
- ▶ 2. Решить неравенство $\frac{\log_3(1 - \frac{3}{2}x)}{\log_9(2x)} \geq 1$.
- ▶ 3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенствами $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4x - 4y - 6, \\ x \geq 1. \end{cases}$
- ▶ 4. Из вершины тупого угла A треугольника ABC опущена высота AD . Из точки D радиусом, равным AD , описана окружность, пересекающая стороны треугольника AB и AC в точках M и N соответственно. Вычислить длину стороны AC , если заданы длины отрезков $AB = c$, $AM = n$ и $AN = m$.
- ▶ 5. Найти все пары чисел p и q , при которых неравенство $|x^2 + px + q| > 2$ не имеет решений на отрезке $[1, 5]$.
- ▶ 6. В основании призмы $ABCDEF$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной $\sqrt{3}$. Боковые ребра AD, BE, CF перпендикулярны основанию. Сфера радиуса $\frac{7}{2}$ касается плоскости ABC и продолжений отрезков AE, BF, CD за точки A, B и C соответственно. Найти длину боковых ребер призмы.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- ▶ 1. Решить уравнение $\sqrt{x+4} + x - 2 = 0$.
- ▶ 2. Решить уравнение $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\sin x\right) = 1$.
- ▶ 3. Решить неравенство $49^{\log_x 5} - 7^{\log_x 5} - 2 \geq 0$.
- ▶ 4. Три круга с центрами в точках P, Q и R попарно касаются друг друга внешним образом в точках A, B и C . Известно, что величина угла PQR равна $2 \arcsin \frac{1}{3}$, а сумма радиусов всех трех кругов равна $12\sqrt{2}$. Определить, какую наибольшую длину может иметь окружность, проходящая через точки A, B и C .
- ▶ 5. Проверить справедливость неравенства $y \leq 3,17$, где y — наименьшее на интервале $(0, 1)$ значение функции
$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(x+0,003)^{0,45}} + \frac{3}{(1-x)^{0,48}} \right) + \frac{1}{2} \left| \frac{1}{(x+0,003)^{0,45}} - \frac{3}{(1-x)^{0,48}} \right|.$$
- ▶ 6. Сфера радиуса R касается всех граней восьмигранника. Две грани — основания — расположены в плоскостях α и β , а остальные шесть граней

— боковые грани — представляют или равные между собой трапеции или равные между собой равнобедренные треугольники. Боковые грани таковы, что каждая боковая сторона треугольника является одновременно боковой стороной трапеции, а каждая боковая сторона трапеции является одновременно либо боковой стороной другой трапеции, либо боковой стороной одного из треугольников. Основания всех трапеций, имеющие длину $\sqrt{13}$, расположены в плоскости β и образуют многоугольник площади 12, а все другие основания трапеций и все основания треугольников расположены в плоскости α . Площадь поверхности сферы относится к суммарной площади боковых граней как π относится к 5. Известно, что $3 < R < 4$. Найти R .

Физический факультет

- 1. Решить уравнение $8 - 7 \sin 2x = 12 \sin^2 x$.
- 2. В конус вписан шар. Площадь поверхности шара равна площади основания конуса. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания.
- 3. Решить неравенство $\log_{49}(x+3) - \log_7(x+2) < 0$.
- 4. В треугольнике ABC угол C тупой, D — точка пересечения прямой DB , перпендикулярной к AB , и прямой DC , перпендикулярной к AC . Высота треугольника ADC , проведенная из вершины C , пересекает AB в точке M . Известно, что $AM = a$, $MB = b$. Найти AC .
- 5. При каких значениях a все корни уравнения $3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a-4) = 0$ удовлетворяют условию $|x| < 1$?
- 6. В основании пирамиды $TABCD$ лежит трапеция $ABCD$, в которой $BC \parallel AD$ и $AD : BC = 2$. Через вершину T пирамиды проведена плоскость, параллельная прямой BC и пересекающая отрезок AB в точке M такой, что $AM : MB = 2$. Площадь получившегося сечения равна S , а расстояние от ребра BC до плоскости сечения равно d . Найти:
 - 1) в каком отношении плоскость сечения делит объем пирамиды;
 - 2) объем пирамиды.

Химический факультет

- 1. Найти максимум и минимум функции $f(x) = \frac{3x+1}{(3x+1)^2+1}$.
- 2. Решить неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|} > \left(\frac{1}{4}\right)^{|x+1|}$.
- 3. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \sqrt{y+3} = 3, \\ 2xy - y + 6x - 3 = 4. \end{cases}$$
- 4. Решить уравнение $\cos^4 x = \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{2} \cos^2 x \cos 8x$.

- 5. Две окружности разных радиусов касаются в точке A одной и той же прямой и расположены по разные стороны от нее. Отрезок AB — диаметр меньшей окружности. Из точки B проведены две прямые, касающиеся большей окружности в точках M и N . Прямая, проходящая через точки M и A , пересекает меньшую окружность в точке K . Известно, что длина отрезка MK равна $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ см, а угол BMA равен 15° . Найти площадь фигуры, ограниченной отрезками касательных BM, BN и той дугой MN большей окружности, которая не содержит точку A .

Биологический факультет

- 1. Решить уравнение $4\sqrt{x+1,5} - 13 \cdot 2^{\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}} + 20 = 0$.
- 2. Решить уравнение $\sin 2x + \sin 3x + \cos 5x = 1$.
- 3. Время, затрачиваемое велосипедистом на прохождение каждого очередного километра пути, на одну и ту же величину больше, чем время, затраченное им на прохождение предыдущего километра. Известно, что на прохождение второго и четвертого километров после старта он затратил в сумме 3 мин 20 сек. За какое время велосипедист проехал первые 5 км после старта?
- 4. Высота трапеции $ABCD$ равна 7, а длины оснований AD и BC равны соответственно 8 и 6. Через точку E , лежащую на стороне CD , проведена прямая BE , которая делит диагональ AC в точке O в отношении $AO : OC = 3 : 2$. Найти площадь треугольника OEC .
- 5. Найти все значения параметра a , при которых система
- $$\begin{cases} z \cos(x - y) + (2 + xy) \sin(x + y) - z = 0, \\ x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = a + 2x, \\ (x + y + a \sin^2 z)((1 - a) \ln(1 - xy) + 1) = 0 \end{cases}$$
- имеет единственное решение.

Факультет почвоведения

- 1. Решить уравнение $25^x + 24 \cdot 5^{x-1} - 1 = 0$.
- 2. Три сенокосилки имеют разную производительность. Первая и вторая сенокосилки, работая вместе, скашивают некоторое поле за 10 часов, а вторая и третья, работая вместе, скашивают то же поле за 8 часов. Если бы работали три сенокосилки, то они скосили бы это поле за 5 часов. За какое время скосит это поле каждая сенокосилка?
- 3. Решить уравнение $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x = |\cos x|$.
- 4. В трапеции $ABCD$ длина основания AD равна 4, длина основания BC равна 3, длины сторон AB и CD равны. Точки M и N лежат на

диагонали BD , причем точка M расположена между точками B и N , а отрезки AM и CN перпендикулярны диагонали BD . Найти длину отрезка CN , если $BM : DN = 2 : 3$.

- 5. Для каждого отрицательного числа a найти наименьшее значение функции $y = \frac{1}{3}(x-a)^3 - \frac{1}{2}(x-a)^2$ на промежутке $0 \leq x \leq 1$.

Геологический факультет

- 1. Решить уравнение $\sin 7x \cos x = \sin 6x$.
- 2. Решить уравнение $|x^2 - 2x - 1| - x + 1 = 0$.
- 3. Решить неравенство $\frac{1}{\sqrt{x+2}} \geq \frac{2}{4-\sqrt{x}}$.
- 4. Решить уравнение $3^{2(\log_5 x)^2} + 1 = 4 \cdot 3^{(\log_5 x)^2}$.
- 5. Четыре точки окружности следуют в порядке A, B, C, D . Продолжения хорды AB за точку B и хорды CD за точку C пересекаются в точке E , причем угол EAD равен 60° . Угол ABD в три раза больше угла BAC . Доказать, что AD — диаметр окружности.
- 6. При всех значениях параметра a решить уравнение $|x+2| + a|x-4| = 6$.

Географический факультет

- 1. Решить уравнение $2 \cos^2 x - 7 \cos x = 2 \sin^2 x$.
- 2. Решить неравенство $\frac{1}{4} \log_2(x-2) - \frac{1}{2} \leq \log_{1/4} \sqrt{x-5}$.
- 3. Числа a_1, a_2, a_3 образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел составляют геометрическую прогрессию. Найти a_1, a_2, a_3 , если известно, что $a_1 + a_2 + a_3 = 21$.
- 4. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC взята точка E так, что длина AE составляет треть длины AC , а на стороне AD взята точка F так, что AF составляет четверть длины AD . Найти площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что площадь четырехугольника $ABGE$ (где G — точка пересечения прямой FE со стороной BC) равна 8.
- 5. Найти все действительные значения a , при которых система уравнений
- $$\begin{cases} 8xy - 25 = 0, \\ x^2 = y + 2x \end{cases}$$
- имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Экономический факультет

- 1. Решить уравнение $\sin(3\pi \cdot 2^x) = \cos(\pi \cdot 2^x) - \sin(\pi \cdot 2^x)$.
- 2. Решить неравенство $\log_{1/7} \log_3 \frac{|-x+1|+|x+1|}{2x+1} \geq 0$.

- ▶ 3. Окружность, диаметр которой равен $\sqrt{10}$, проходит через соседние вершины A и B прямоугольника $ABCD$. Длина касательной, проведенной из точки C к окружности, равна 3, и $AB = 1$. Найти все возможные значения, которые может принимать длина стороны BC .
- ▶ 4. Определить наименьшее значение функции

$$F(r) = (r - 2) \cdot (4 + (r - 1)(r - 4)) \cdot (r - 3), \quad r \in \mathbf{R}.$$
- ▶ 5. Найти площадь плоской фигуры, состоящей из точек, координаты которых удовлетворяют условию $(x^2 + y^2 - x - y)(x^2 + y^2 - 1) \leq 0$.
- ▶ 6. Указать все значения параметра q , при которых уравнение $\sin^2 x + (q - 2)^2 \sin x + q(q - 2)(q - 3) = 0$ имеет на отрезке $[0, 2\pi]$ ровно три корня.

Факультет психологии

- ▶ 1. Решить неравенство $\lg(x + 4) > -2 \lg \frac{1}{2-x}$.
- ▶ 2. Решить уравнение $(\cos x - 1)(\sin x - \frac{1}{2} \cos 2x - 1) = \sin^2 x$.
- ▶ 3. Решить систему
$$\begin{cases} \log_3 x - 2^y + y = 3, \\ y \cdot 2^y + 2^y \cdot \log_3 x = 4. \end{cases}$$
- ▶ 4. Точки K, L, M делят стороны выпуклого четырехугольника $ABCD$ в отношении $AK : BK = CL : BL = CM : DM = 1 : 2$. Радиус описанной около треугольника KLM окружности равен $\frac{5}{2}$. Известно, что $KL = 4$, $LM = 3$ и $KM < KL$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.
- ▶ 5. При каждом значении параметра $a \geq \frac{1}{2\pi}$ найти все корни уравнения

$$\cos \left(\frac{2x + a}{2x^2 + 2ax + \frac{5}{2}a^2} \right) = \cos \left(\frac{2x - a}{2x^2 - 2ax + \frac{5}{2}a^2} \right).$$

Филологический факультет

(отделение структурной и прикладной лингвистики)

- ▶ 1. Представить число 1991 в виде произведения простых чисел.
- ▶ 2. Решить уравнение $\log_2(5 \cdot 2^x + 3) = 2x + 1$.
- ▶ 3. Решить неравенство $\frac{|x+1|+|x-2|}{x+199} < 1$.
- ▶ 4. Решить уравнение $\frac{2}{\pi} \sin x + \cos(19\pi) = \cos x$.
- ▶ 5. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC . Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E . Найти расстояние от точки E до прямой CD , если $AD = 4$ см, а $BC = 3$ см.
- ▶ 6. Найти все значения p , для которых неравенство $\log_{x-p}(x^2) < 2$ выполняется хотя бы для одного числа x такого, что $|x| < 0,01$.

Институт стран Азии и Африки
(социально-экономический факультет)

- ▶ 1. Решить уравнение $\sqrt{3x-5} - \sqrt{4-x} = 1$.
- ▶ 2. В равнобедренную трапецию с боковой стороной, равной 9 см, вписана окружность радиуса 4 см. Найти площадь трапеции.
- ▶ 3. Решить уравнение $\cos^2(45^\circ + x) = \cos^2(45^\circ - x) + \sqrt{5} \cos x$.
- ▶ 4. При перемножении двух натуральных чисел, разность которых равна 10, была допущена ошибка: цифра сотен в произведении увеличена на 2. При делении полученного (неверного) произведения на меньший из множителей получилось в частном 50 и в остатке 25. Найти множители.
- ▶ 5. Решить неравенство $\log_{\log_{1/2} x}(\log_{1/7} x) > 0$.
- ▶ 6. При каких значениях параметра a система уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - |x| = a \end{cases}$$
 имеет ровно два решения?

1992 год

Механико-математический факультет

- ▶ 1. Решить уравнение $6 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right| = 1$.
- ▶ 2. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке E . На прямой AC взята точка M , причем $\angle DME = 80^\circ$, $\angle ABD = 60^\circ$, $\angle CBD = 70^\circ$. Где расположена точка M : на диагонали, или на ее продолжении? Ответ обосновать.
- ▶ 3. Даны числа a и b такие, что $a = \log_y x$, $b = \log_z x$. Найти $\log_{\sqrt[3]{\frac{yz}{x^2}}}\left(\frac{yz}{x^3}\right)^2$.
- ▶ 4. Мастер делает за 1 час целое число деталей, большее 5, а ученик — на 2 детали меньше. Один мастер выполняет заказ за целое число часов, а два ученика вместе — на 1 час быстрее. Из какого количества деталей состоит заказ?
- ▶ 5. На прямой l в пространстве последовательно расположены точки A, B и C такие, что $AB = 10$ и $BC = 22$. Найти расстояние между прямыми l и m , если расстояния от точек A, B и C до прямой m равны 12, 13 и 20 соответственно.
- ▶ 6. Найти все значения x , удовлетворяющие неравенству $(a+2)x^3 - (1+2a)x^2 - 6x + (a^2 + 4a - 5) > 0$ хотя бы при одном значении a , принадлежащем отрезку $[-2, 1]$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- ▶ 1. Какое из двух чисел больше, $\sqrt[3]{\frac{1990}{1991}}$ или $\sqrt[3]{\frac{1991}{1992}}$?
- ▶ 2. Решить уравнение $\sqrt{1 + \cos 4x} \cdot \sin x = 2 \sin \frac{\pi}{4}$.
- ▶ 3. Решить неравенство $\log_2(11 - x) + \log_2(x + 1) \leq \log_2((x + 1)(x^2 + 5x - 5))$.
- ▶ 4. Из города A в город B выехал автомобиль. Спустя некоторое время из B в A выехал мотоцикл. Скорости автомобиля и мотоцикла на всем пути постоянные, и они движутся по одному шоссе. Автомобиль до встречи с мотоциклом находился в пути 7 часов 30 минут, а мотоцикл до встречи ехал 3 часа. Мотоцикл прибыл в A в 23 часа, а автомобиль прибыл в B в 16 часов 30 минут. Найти время отправления мотоцикла из города B .
- ▶ 5. Две окружности пересекаются в точках A и K . Их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок AK . Точки B и C лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AB , касается одной окружности в точке A . Прямая, содержащая отрезок AC касается другой окружности также в точке A . Длина отрезка BK равна 1, длина отрезка CK равна 4, а тангенс угла CAB равен $\frac{1}{\sqrt{15}}$. Найти площадь треугольника ABC .
- ▶ 6. Найти все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\frac{4}{3}(x^2 - ax) - \frac{\pi}{3} < \sin(x^2 - ax) + \cos\left(2x^2 - 2ax + \frac{\pi}{4}\right)$$
 выполняется для всех x из отрезка $[\pi, 2\pi]$.

Физический факультет

- ▶ 1. Решить неравенство $1 - 2x^2 > 2x$.
- ▶ 2. Решить уравнение $5 - 3 \cos 2x = 8 \sin x$.
- ▶ 3. Решить уравнение $2 \log_2 x^3 - 1 = \frac{1}{2} \log_2 x$.
- ▶ 4. Площадь треугольника ABC равна S , угол BAC равен α и $AC = b$. Найти BC .
- ▶ 5. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если известно, что пятый и девятый члены дают в сумме 40, а сумма седьмого и тринадцатого членов равна 58.
- ▶ 6. Через центр окружности, описанной около треугольника ABC , проведены прямые, перпендикулярные сторонам AC и BC . Эти прямые пересекают высоту CH треугольника или ее продолжение в точках P и Q . Известно, что $CP = p$, $CQ = q$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

- 7. Известно, что некоторая нечетная функция при $x > 0$ определяется формулой $f(x) = \log_3 \left(\frac{x}{3}\right)$. Найти, какой формулой определяется функция $f(x)$ при $x < 0$. Решить уравнение $f(x) = 3$.
- 8. Три шара радиуса R касаются друг друга и каждый из них касается боковой поверхности конуса. Шары находятся вне конуса. Высота конуса перпендикулярна плоскости α , содержащей центры шаров. Угол между высотой конуса и его образующей равен φ . Найти расстояние от вершины конуса до плоскости α .

Химический факультет

- 1. Решить уравнение $x + \log_2(2^x - 31) = 5$.
- 2. Решить неравенство $\sqrt{\sin x} > \sqrt{-\cos x}$.
- 3. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 2 и 6 от вершины A . Найти радиус окружности, проходящей через точки M и N , и касающейся прямой AB . Угол BAC равен 30° .
- 4. Даны три сплава. Состав первого сплава: 60% алюминия и 40% хрома. Состав второго сплава: 10% хрома и 90% титана. Состав третьего сплава: 20% алюминия, 50% хрома и 30% титана. Из них нужно приготовить новый сплав, содержащий 45% титана. Какие значения может принимать процентное содержание хрома в этом новом сплаве?
- 5. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $5 \cdot |x - 3a| + |x - a^2| + 4x = a$ 1) имеет бесконечно много решений; 2) не имеет решений.

Биологический факультет и факультет фундаментальной медицины

- 1. Найти все решения уравнения $1 - 4 \sin^2 \left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.
- 2. Решить уравнение $\log_5 \left(\frac{x-9}{x-5}\right) + \log_5(x^2 - 17x + 60) = 1 + \log_5 2$.
- 3. Прямоугольный треугольник ABC имеет периметр 54 см, причем длина катета AC больше, чем 10 см. Окружность радиуса 6 см, центр которой лежит на катете BC , касается прямых AB и AC . Найти площадь треугольника ABC .
- 4. Найти все пары целых чисел (m, n) , удовлетворяющие одновременно двум неравенствам
$$\begin{cases} m^2 + n^2 < 16m - 22n - 171, \\ 30m - n^2 > 252 + 14n + m^2. \end{cases}$$
- 5. Найти наименьшее значение величины $\frac{1}{c} \cdot \left(\frac{3a}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{b}{\sqrt{1-t^2}} \right)$, где a, b, c, t, u

положительные числа, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{cases} at + bu \leq c, \\ a^2 + 2bcu \geq b^2 + c^2, \\ b^2 \cdot \frac{t^2 - u^2}{t^2 - 1} + c^2 \leq 2bcu. \end{cases}$$

Факультет почвоведения

- ▶ 1. Решить уравнение $2(\sin 6x - \sin 4x \sin 2x) = \cos 6x + \cos 2x$.
- ▶ 2. Шофер грузовика, занятого на строительстве, при постоянной продолжительности рабочего дня перевозит грузы трех типов: щебень, песок и кирпич, соответственно по-разному расходуя горючее. В первый день половину рабочего дня он возил щебень, а половину — песок; во второй день $1/7$ времени возил щебень, $4/7$ времени — песок и $2/7$ времени — кирпич; в третий день $1/4$ времени — щебень, $3/8$ времени — песок и столько же времени — кирпич. На сколько процентов израсходует шофер дневной норматив горючего, возя целый день щебень, если в первый день он израсходовал его на 95%, во второй — на $101\frac{3}{7}\%$, а в третий — на $101,25\%$.
- ▶ 3. Решить уравнение $\frac{4^x \cdot 2^{x+2} + 3}{2^{x/2} - 1} + 2^{x/2} + 1 = 0$.
- ▶ 4. Две окружности с центрами M и N , лежащими на стороне AB треугольника ABC , касаются друг друга и пересекают стороны AC и BC в точках A, P и B, Q соответственно, причем $AM = PM = 2$, $BN = QN = 5$. Найти радиус описанной около треугольника ABC окружности, если известно, что отношение площади треугольника AQN к площади треугольника MPB равно $15\sqrt{3}$ и $AP = QB \cdot \frac{2}{5} \cdot \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{3}}$.
- ▶ 5. При каких значениях параметра a все числа из отрезка $-1 \leq x \leq 3$ удовлетворяют неравенству $2ax + 2\sqrt{2x+3} - 2x + 3a - 5 < 0$?

Геологический факультет

- ▶ 1. Пятый член арифметической прогрессии равен 22, а сумма седьмого и девятого равна 32. Найти сумму первых двадцати трех членов этой арифметической прогрессии.
- ▶ 2. Решить неравенство $\sqrt{6x+5} - 3x \leq 2$.
- ▶ 3. Решить уравнение $|3\log_x x^4 + 7\log_7 2 \cdot \log_2 x^2| = -\log_x 49$.
- ▶ 4. Решить уравнение $\cos x \cos 3x - 9\cos^2 x + 5 = 14\sin x \sin 3x - 30\sin^2 x$.
- ▶ 5. В окружность с центром O вписана трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, $AD = 7$, $BC = 3$ и угол BCD равен 120° . Хорда BM окружности пересекает отрезок AD в точке N такой, что $ND = 2$. Найти площадь треугольника BOM .

- 6. Найти все тройки чисел (x, y, z) , удовлетворяющие уравнению $x^2 + 1 - 2x \sin(\pi y) + \sqrt{yz - 2z^2 - 64} = (41 - yz)(\cos(2\pi y) + \cos(\pi z))^2$.

Географический факультет

- 1. Решить уравнение $\cos 2x + \sin x = 1$.
- 2. Найти три числа a, b и c , если известно, что их сумма равна 1, а квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет единственное решение $x = -1$.
- 3. Решить неравенство $(\log_x 2 - 1) \log_2(2x) \leq \frac{3}{2}$.
- 4. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найти стороны треугольника ABC .
- 5. Найти все значения параметра c , при которых уравнение $|x^2 - 1| + |x^2 - x - 2| = x^2 + 3x + c$ имеет ровно три различных решения.

Экономический факультет

- 1. Вычислить $\log_{9/5} |\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)| + \log_{9/5} |\cos(3\alpha - \frac{\pi}{4})|$, если известно, что $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$.
- 2. Решить неравенство $(x^2 - 8x + 15) \cdot (2^{x-3} + 2^{3-x} - 2)^{-1} \cdot \sqrt{x-1} \leq 0$.
- 3. Цех получил заказ на изготовление 2000 деталей типа A и 14000 деталей типа B . Каждый из 146 рабочих цеха затрачивает на изготовление одной детали типа A время, за которое он мог бы изготовить 2 детали типа B . Каким образом следует разделить рабочих цеха на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно, и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?
- 4. В треугольной пирамиде $ABCD$ плоские углы BAC , BAD и CAD при вершине A равны $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$ соответственно. Определить угол между гранями BAD и CAD .
- 5. Продолжения сторон AD и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M , а продолжения сторон AB и CD — в точке O . Отрезок MO перпендикулярен биссектрисе угла AOD . Найти отношение площадей треугольников AOD и BOC , если $OA = 6$, $OD = 4$, $CD = 1$.
- 6. Найти все значения параметра p , при каждом из которых число целочисленных решений неравенства $x^2 + 5(x+1) + 3|x-p| + p \leq 0$ максимально.

Факультет психологии

- 1. Решить неравенство $3 \sin 2\pi x \geq \sqrt{2} \sin 4\pi x + 3 \cos 2\pi x + \sqrt{32}$.
- 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x+y} \cdot 3^y \cdot 6^{x+y} \cdot 9^x = 144, \\ \log_{0,2x+0,1y}(27^x \cdot 9^y + 4^{x+y}) \log_5(0,2x + 0,1y) = 2. \end{cases}$$
- 3. Точки K, L, M, N, P расположены последовательно на окружности радиуса $2\sqrt{2}$. Найти площадь треугольника KLM , если $LM \parallel KN$, $KM \parallel NP$, $MN \parallel LP$, а угол LOM равен 45° , где O — точка пересечения хорд LN и MP .
- 4. При каких значениях параметров a и b можно найти два различных вещественных корня уравнения $x^3 - 5x^2 + 7x = a$, которые будут также корнями уравнения $x^3 - 8x + b = 0$?
- 5. В тетраэдре $ABCD$ на ребре AB взята точка K , на ребре AC — точка L , на ребре BD — точка N , на ребре CD — точка M . Точки E и G есть середины ребер AD и BC соответственно. Прямые EG, KM и LN пересекаются в одной точке. Найти площадь четырехугольника $KLMN$, если $AK : KB = 5$, $AD = 9$, $BC = 9$, а угол между скрещивающимися прямыми AD и BC равен 45° .

Филологический факультет

(отделение структурной и прикладной лингвистики)

- 1. Решить уравнение $\frac{(\sqrt{3} \cos x + \sin x)^2}{\sqrt{3} + 2 \sin 2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 2. Решить неравенство $\log_x(20x + 3x^2 - x^3) \geq 3$.
- 3. В ромбе $ABCD$ угол при вершине A равен $\frac{\pi}{3}$. Точка N делит сторону AB в отношении $AN : NB = 2 : 1$. Определить тангенс угла DNC .
- 4. Расстояние между городами A и B равно 80 км. Из A в B выехала машина, а через 20 минут — мотоциклист, скорость которого равна 90 км/час. Мотоциклист догнал машину в пункте C и повернул обратно. Когда машина прибыла в B , мотоциклист проехал половину пути от C до A . Найти расстояние от C до A .
- 5. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} ax^2 + 4ax - y + 7a + 1 = 0, \\ ay^2 - x - 2ay + 4a - 2 = 0 \end{cases}$$
 имеет единственное решение?

Институт стран Азии и Африки (социально-экономический факультет)

- ▶ 1. Решить уравнение $2^{x+5} + 2^3 \cdot 2^{x-1} - 2^2 = 0$.
- ▶ 2. Решить уравнение $3 \sin^2 x - 3 \cos 2x - 12 \sin x + 7 = 0$.
- ▶ 3. Решить неравенство $\frac{|x-5|-1}{2|x-6|-4} \leq 1$.
- ▶ 4. Дан треугольник со сторонами 4, 8, 9. Найти длину биссектрисы, проведенной к большей стороне.
- ▶ 5. Решить неравенство $\log_{1/2} |\cos x| \cdot \log_5 (x^2 - 9) < 0$.
- ▶ 6. При каких значениях параметра a сумма s квадратов корней уравнения $x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$ является наибольшей? Чему равна эта сумма?

1993 год

Механико-математический факультет

- ▶ 1. Решите неравенство $\frac{\sqrt[4]{15}}{\log_{x+1} 11} \geq \frac{\log_{11} (x-1)}{\log_{123} 11}$.
- ▶ 2. Найдите все значения a , при которых уравнение $4^x + (a^2 + 5) \cdot 2^x + 9 - a^2 = 0$ не имеет решений.
- ▶ 3. Решите систему

$$\begin{cases} (\cos y + \sin x - 1)(\operatorname{tg}^2(x - \pi/3) + \operatorname{tg}^2(y + \pi/6)) = 0, \\ (\sin x - \cos y)(2 - \sin 2y + \sin y) = 0. \end{cases}$$
- ▶ 4. Две окружности с центрами A и B и радиусами соответственно 2 и 1 касаются друг друга. Точка C лежит на прямой, касающейся каждой из окружностей, и находится на расстоянии $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ от середины отрезка AB . Найдите площадь S треугольника ABC , если известно, что $S > 2$.
- ▶ 5. Сфера радиуса R делит каждое из ребер SA , SC , AB и BC треугольной пирамиды $SABC$ на три равные части и проходит через середины ребер AC и SB . Найдите длину высоты пирамиды, опущенной из вершины S .
- ▶ 6. Из пункта A в пункт B с постоянными скоростями выехали два мотоциклиста, а из B в A одновременно с ними выехал третий мотоциклист с постоянной скоростью 60 км/ч. Через 45 мин расстояние между первым и вторым мотоциклистами было в два раза больше, чем между первым и третьим. Через 1 ч после старта расстояние между первым и вторым мотоциклистами было равно расстоянию между первым и третьим, а расстояние, которое осталось проехать третьему мотоциклисту до A , было равно расстоянию между первым и вторым мотоциклистами через

1 ч 30 мин после старта, а также было равно $2/5$ расстояния между первым и третьим мотоциклистами через 1 ч 30 мин после старта. Найдите расстояние между пунктами A и B .

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- ▶ 1. Решите неравенство $\log_{\sqrt{8-2\sqrt{7}+1}\dots\sqrt{3}}(4x-x^2-2) \geq 0$.
- ▶ 2. На отрезке $0 \leq x \leq \pi$ найдите все значения x , удовлетворяющие уравнению $\sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{1+2\cos^2 x} - \sqrt{3} \sin 2x$.
- ▶ 3. Решите неравенство $|3^x - 4| + |x^2 - 4x + 3| \leq 3^x + 4x - x^2 - 7$.
- ▶ 4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC точка D делит сторону BC в отношении $2 : 1$, считая от вершины B , а точка E — середина стороны AB . Известно, что медиана CQ треугольника CED равна $\frac{\sqrt{23}}{2}$, и $DE = \frac{\sqrt{23}}{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .
- ▶ 5. Точка $M(x; y)$, декартовы координаты которой удовлетворяют условиям $a^2x - y = 2a^2 - 2b$, $x - by = 2a - 2a^2$, лежит на прямой $y = 2 - x$. При каких действительных a и b эта точка наиболее близко расположена к точке $N(3; -1)$?
- ▶ 6. Найдите все действительные значения a , при которых область определения функции $y = \frac{1}{3 \cos x - 2 \cos^3 x - \sqrt{2}a}$ совпадает с областью определения функции $y = \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x - a} - \frac{\sqrt{2}}{3 \cos x - 2 \cos^3 x - 2a}$.

Физический факультет

- ▶ 1. Решите неравенство $\frac{2x-1}{2^x-1} < 0$.
- ▶ 2. Решите уравнение $\cos 5x = \cos(5+x)$.
- ▶ 3. Решите уравнение $\sqrt{\log_2 x} = 2 \log_2 \sqrt{x} - 1$.
- ▶ 4. В окружность радиуса R вписан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) с углом BAC , равным α . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .
- ▶ 5. Решите неравенство $\frac{|x+3|+x}{x+2} > 1$.
- ▶ 6. Окружность касается сторон угла с вершиной O в точках A и B . На этой окружности внутри треугольника AOB взята точка C . Расстояния от точки C до прямых OA и OB равны соответственно a и b . Найдите расстояние от точки C до хорды AB .
- ▶ 7. Уравнение $ax^2 + bx + 2 = 0$, где $a < 0$, имеет одним из своих корней число $x = 3$. Найдите действительные корни уравнения $ax^4 + bx^2 + 2 = 0$.
- ▶ 8. На плоскости лежат два шара радиуса r и цилиндр радиуса R ($R > r$). Шары касаются друг друга и боковой поверхности цилиндра. Цилиндр

касается плоскости по своей образующей. Найдите радиус шара, большего, чем данные, касающегося обоих данных шаров, цилиндра и плоскости.

Химический факультет

- ▶ 1. Решите неравенство $\frac{4}{x^2-1} \geq 1$.
- ▶ 2. Решите уравнение $(\log_2 x)^2 + 3 \log_{1/2} x + 2 = 0$.
- ▶ 3. Решите уравнение $\cos x = 1 + \cos 2x$.
- ▶ 4. В квадрат площадью 18 вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит одна вершина прямоугольника. Длины сторон прямоугольника относятся как 1 : 2. Найдите площадь прямоугольника.
- ▶ 5. Найдите число решений уравнения $2^{x+1} + 2^{1-x} = 1 - 4x - x^2$ и дайте обоснование ответа.

Биологический факультет

- ▶ 1. Решите уравнение $\cos 2x + 2 \cos x - 3 = 0$.
- ▶ 2. Решите уравнение $\log_2(9^x + 2 \cdot 3^x - 5) = 1 + 2 \log_4(3^{x+1} - 4)$.
- ▶ 3. Решите неравенство $5\sqrt{1 - \frac{1}{z}} > \frac{7z-1}{z}$.
- ▶ 4. Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1. Известно, что сумма вторых членов прогрессий равна 3, а сумма пятых равна 161. Найдите сумму шестых членов прогрессий.
- ▶ 5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины диагоналей, равна длине отрезка, соединяющего середины сторон AD и BC . Найдите величину угла, образованного продолжением сторон AB и CD .
- ▶ 6. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y + 2 = (3 - x)^3, \\ (2z - y)(y + 2) = 9 + 4y, \\ x^2 + z^2 = 4x, \end{cases}$$
 удовлетворяющие условию $z \geq 0$.

Факультет почвоведения

- ▶ 1. Разделите число 128 на четыре части так, чтобы первая часть отonosилась ко второй как 2 : 3, вторая к третьей — как 3 : 5, а третья к четвертой — как 5 : 6.
- ▶ 2. Решите уравнение $\sin^3 x - \cos^3 x + \sin x - \cos x = 0$.
- ▶ 3. Решите неравенство $\log_{9x^2+1} 37 > 1$.

- 4. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию и пересекающая боковые стороны в точках E и F . Длина отрезка EF равна 2. Найдите длины оснований, если их отношение равно 4.

- 5. Найдите все действительные числа a , при которых неравенство

$$x + \frac{7a^2 + a - 2}{x + a - 1} \leq 7a - 1$$

не имеет положительных решений x .

Геологический факультет

- 1. Найдите численные значения выражения $\left(\frac{8a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{4\sqrt{a} + 2\sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right) \cdot \left(\frac{4\sqrt{a} + 2\sqrt{b}}{4a - b}\right)^2$.
- 2. Решите уравнение $\sqrt{1 - \cos^2 x} + 6 \cos 2x = 0$.
- 3. Для рытья котлована выделили два экскаватора. После того, как первый проработал 2 часа, его сменил второй, который за три часа закончил работу. Всю работу один второй экскаватор выполнил бы на 4 часа быстрее, чем один первый экскаватор. За какое время выкопят котлован оба экскаватора, работая вместе?
- 4. Решите неравенство $\frac{1}{2} \log_{\text{tg}(\pi/9)} x^2 \geq \log_{\text{tg}(\pi/9)} \sqrt{2x + 3}$.
- 5. На стороне AB треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Прямая DE делит площадь треугольника ABC пополам и образует с прямой AB угол 15° . Найдите углы треугольника ABC .
- 6. Найдите все действительные значения параметра k , при которых ровно одна точка графика функции

$$y = 2x + (\lg k) \sqrt{\cos(2k\pi x) + 2 \cos(k\pi x) - 3} + 1.$$

лежит в области $(2x - 7)^2 + 4(y - 3)^2 \leq 25$.

Географический факультет

- 1. Решите уравнение $\sqrt{13 - 2x} = 5 - x$.
- 2. Решите уравнение $\sin x = \cos^2 x + \frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sin(\pi/6)} \right)$.
- 3. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\frac{4x - x^2 - 4}{x^2 + x - 2}}$.
- 4. В треугольник со сторонами $AB = 4$, $BC = 2$, $AC = 3$ вписана окружность. Найдите площадь треугольника AMN , где M , N — точки касания этой окружности со сторонами AB и AC соответственно.
- 5. При каких значениях параметра a четыре корня уравнения

$$x^4 + (a - 5)x^2 + (a + 2)^2 = 0$$

являются последовательными членами арифметической прогрессии?

Экономический факультет

- ▶ 1. Решите неравенство $\log_{5^x-4} 27 < 3$.
- ▶ 2. Решите уравнение $\frac{\sin 3x}{\cos(x-\pi/6)} = -1$.
- ▶ 3. Решите неравенство $|x+3| \leq 6-3\sqrt{1-x}$.
- ▶ 4. Найдите периметр фигуры, заданной на координатной плоскости условиями

$$\begin{cases} 2|x-2| \arcsin((y+1)^2) \leq \pi(2-x), \\ 2|y+1| + x \geq 0. \end{cases}$$
- ▶ 5. За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5 %, затем 12 %, потом $11\frac{1}{9}$ % и, наконец, 12,5 % в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на $104\frac{1}{6}$ %. Определите срок хранения вклада.
- ▶ 6. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найдите площадь треугольника.

Факультет психологии

- ▶ 1. Решите уравнение $3^{\frac{x+2}{3x-4}} - 7 = 2 \cdot 3^{\frac{5x-10}{3x-4}}$.
- ▶ 2. Решите неравенство $\sqrt{1-x} - \sqrt{x} > \frac{1}{\sqrt{3}}$.
- ▶ 3. Найдите все решения уравнения $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2(x + \frac{\pi}{12}) + \sin 3x = \cos 3x - \sqrt{2}$ на отрезке $[-2\pi; 2\pi]$.
- ▶ 4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CC_1 и AA_1 . Известно, что $AC = 1$ и $\angle C_1CA_1 = \alpha$. Найдите площадь круга, описанного около треугольника C_1BA_1 .
- ▶ 5. Обозначим x_1 и x_2 корни квадратного трехчлена $(a-1)x^2 - (2a+1)x + 2+5a$. 1) Найдите все a , при которых $x_1 > 1$ и $x_2 > 1$. 2) Найдите все b , для каждого из которых величина $(x_1-b)(x_2-b)$ принимает постоянное значение при всех a , при которых она определена.

Институт стран Азии и Африки

- ▶ 1. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x^2-5x+8}}{3-x} \geq 1$.
- ▶ 2. Сумма третьего и пятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найдите сумму первых семи членов этой прогрессии.

- ▶ 3. На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая основание этого треугольника в точке D . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, если $AD = \sqrt{3}$, а $\angle ABC = 120^\circ$.
- ▶ 4. Решите уравнение $\log_x(3x - 2) - 2 = \sqrt{\log_x^2(3x - 2) + 4 \log_x \left(\frac{x}{3x - 2} \right)}$.
- ▶ 5. Решите уравнение $\sin^2 x + 3x^2 \cos x + 3x^2 = 0$.
- ▶ 6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $x^2 + 2|x - a| \geq a^2$ справедливо для всех действительных x .

1994 год

Механико-математический факультет

- ▶ 1. Решите уравнение $\frac{4 \sin x - 2 \cos 2x - 1}{\cos 2x + \sqrt{3} \cos x - 2} = 0$.
- ▶ 2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^x + 2y = 1, \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1} \end{cases}$.
- ▶ 3. Решите неравенство $\log_{2-5x} 3 + \frac{1}{\log_2(2-5x)} \leq \frac{1}{\log_6(6x^2 - 6x + 1)}$.
- ▶ 4. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали AC и BD пересекаются в точке E . Вокруг треугольника ECB описана окружность, а касательная к этой окружности, проведенная в точке E , пересекает прямую AD в точке F таким образом, что точки A , D и F лежат последовательно на этой прямой. Известно, что $AF = a$, $AD = b$. Найдите EF .
- ▶ 5. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Сфера касается ребер AD , DD_1 , CD и прямой BC_1 . Найдите радиус сферы, если длины ребер куба равны 1.
- ▶ 6. При каждом значении параметра a решите уравнение $2x^2 + 2ax - a^2 = \sqrt{4x + 2a + 3a^2}$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- ▶ 1. Решите уравнение $12 \sin 5x = \cos 10x + 7$.
- ▶ 2. Решите неравенство $\sqrt{x - 3} \leq 3 - |x - 6|$.
- ▶ 3. Найдите все отрицательные значения u , при которых выполнено неравенство $\frac{1}{\log_3 \cos u} + \frac{1}{\log_3 \left(\frac{\cos u}{3} \right)} \geq 0$.
- ▶ 4. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 21, длина биссектрисы BD равна $8\sqrt{7}$, а длина отрезка DC равна 8. Найдите периметр треугольника ABC .
- ▶ 5. В начальный момент лечения пациенту была произведена первая инъекция 6 единиц некоторого лекарства, а во время каждой последующей инъекции ему вводится 4 единицы того же лекарства. За время между инъекциями количество лекарства в организме уменьшается в 5 раз.

Какое количество лекарства будет содержаться в организме пациента сразу после 30-й инъекции?

- 6. Все высоты пирамиды $ABCD$, грани которой являются остроугольными треугольниками, равны между собой. Известно, что $AB = 9$, $BC = 13$, а угол ADC равен 60° . Найдите длину ребра BD .

Физический факультет

- 1. Решите неравенство $\frac{2x-1}{\log_2 x} < 0$.
- 2. Решите уравнение $5 \cos x + 2 \sin x = 3$.
- 3. Решите уравнение $5^{x-1} + 5 \cdot (0,2)^{x-2} = 26$.
- 4. В равнобедренном треугольнике высоты, опущенные на основание и боковую сторону, равны соответственно m и n . Найдите стороны треугольника.
- 5. Решите уравнение $\log_{5^{1/2}}^2(4x) + \log_2(x^2/8) = 8$.
- 6. В окружности пересекающиеся хорды AB и CD перпендикулярны, $AD = m$, $BC = n$. Найдите диаметр окружности.
- 7. Найдите все значения a , для каждого из которых система неравенств
$$\begin{cases} -x^2 + 12x - a \geq 0, \\ x \leq 2 \end{cases}$$
 выполняется хотя бы при одном значении x .
- 8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) угол между боковым ребром и плоскостью основания равен α , сторона основания равна a , SH — высота пирамиды. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку H параллельно ребрам SA и BC .

Химический факультет

- 1. Решите уравнение $\log_5(x+1) + \log_5(x+5) = 1$.
- 2. Решите неравенство $2x > |x| + 1$.
- 3. Решите уравнение $\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x - \sin x - 1}$.
- 4. Прямоугольные треугольники ABC и ABD имеют общую гипотенузу $AB = 5$. Точки C и D расположены по разные стороны от прямой, проходящей через точки A и B , $BC = BD = 3$. Точка E лежит на AC , $EC = 1$. Точка F лежит на AD , $FD = 2$. Найдите площадь пятиугольника $ECBDF$.
- 5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + 2x \sin y + 1 = 0, \\ 8|x|y(x^2 + y^2) + \pi^3 + 4\pi = 0. \end{cases}$$

Биологический факультет

- 1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x^2 - xy + 4y^2 = 48. \end{cases}$
- 2. Какое из двух чисел больше: $\sqrt{11}$ или $9^{\frac{1}{2} \log_3(1+\frac{1}{9}) + \frac{3}{2} \log_8 2}$? Ответ обосновать.
- 3. Найдите все решения уравнения $3 \operatorname{tg}^2(\pi x - \pi/8) = 1$, удовлетворяющие условию $\frac{3}{2} < x < 3$.
- 4. В трапеции $ABCD$ даны длины оснований $AD = 4$, $BC = 1$ и углы A и D при основании, равные соответственно $\operatorname{arctg} 2$ и $\operatorname{arctg} 3$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник CBE , где E — точка пересечения диагоналей трапеции.
- 5. Найдите все такие значения величины x , при которых неравенство $(4 - 2a)x^2 + (13a - 27)x + (33 - 13a) > 0$ выполняется для всех a , удовлетворяющих условию $1 < a < 3$.

Факультет почвоведения

- 1. Решите уравнение $\sin^3 x - \sin^2 x = \sin^2 x \cos^2 x$.
- 2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + y = 13, \\ 2^{2x+1} + 3y = 35. \end{cases}$
- 3. Решите неравенство $\lg(x+5) \geq -2 \lg\left(\frac{1}{3-x}\right)$.
- 4. Найдите все значения параметров a и b , при которых система неравенств $\begin{cases} a + \sin bx \leq 1, \\ x^2 + ax + 1 \leq 0 \end{cases}$ имеет единственное решение.
- 5. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P . Длина отрезка, соединяющего вершину C с точкой M , являющейся серединой отрезка AD , равна $5/4$. Расстояние от точки P до отрезка BC равно $1/2$ и $AP = 1$. Найдите длину отрезка AD , если известно, что вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

Геологический факультет

- 1. Какое из чисел больше: $2\sqrt{17}$ или $8, (24)$?
- 2. Упростите до целого числа выражение $3 \frac{\sqrt{8+2\sqrt{7}}}{\sqrt{8-2\sqrt{7}}} - \frac{\sqrt{3+\sqrt{7}}}{\sqrt{3-\sqrt{7}}} \sqrt{2}$.
- 3. Решите уравнение $y^2 + 2\sqrt{y^2 + 3y - 4} - 4 + 3y = 0$.
- 4. Решите уравнение $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$.
- 5. Решите неравенство $\sqrt{4z - 3 - z^2} \neq 0$.

- 6. Решите неравенство $4 \cos x - \sin 2x > 0$.
- 7. Технология изготовления дискет состоит из четырех этапов. На каждом из них увеличивается содержание кремния на определенное количество процентов по отношению к результату предыдущего этапа: на первом этапе — на 25 %, на втором этапе — на 20 %, на третьем этапе — на 10 %, на четвертом этапе — на 8 %. На сколько процентов в результате увеличится содержание кремния?
- 8. Четырехугольник $ABCD$ таков, что в него можно вписать и около него можно описать окружности. Диаметр описанной окружности совпадает с диагональю AC . Докажите, что модули разностей длин его противоположных сторон равны.
- 9. Четыре бригады разрабатывали месторождение горючих сланцев в течение трех лет, работая с постоянной для каждой бригады производительностью. На втором году в течение четырех месяцев работа не производилась, а все остальное время работала только одна из бригад. Отношение времен работы первой, второй, третьей и четвертой бригад и количества выработанной продукции соответственно равны:
- | | | |
|---------------|---------------|-------------|
| в первый год | 4 : 1 : 2 : 5 | и 10 млн т; |
| во второй год | 2 : 3 : 2 : 1 | и 7 млн т; |
| в третий год | 5 : 2 : 1 : 4 | и 14 млн т. |
- Сколько миллионов тонн сланцев выработали бы за 4 месяца четыре бригады, работая все вместе?
- 10. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в нем через вершину B проведена диагональ. Найдите отношение площади сечения этого куба плоскостью, перпендикулярной указанной диагонали и проходящей через ее середину, к площади его полной поверхности.

Географический факультет

- 1. Решите уравнение $\sin 2x = \sqrt{2} \sin x$.
- 2. Сумма первых двадцати членов арифметической прогрессии (a_n) в пять раз меньше суммы первых двадцати пяти членов арифметической прогрессии (b_n) . Найдите отношение разности прогрессии (a_n) к разности прогрессии (b_n) , если известно, что эти разности отличны от нуля и $4a_{12} = b_{19}$.
- 3. Решите неравенство $\log_x(2 - x - x^2) > 0$.
- 4. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N . Найдите длину отрезка CN , если длины катетов равны 1 и 4.
- 5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $a + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{1 + 2ax - a^2 - x^2}$ имеет ровно одно решение.

Экономический факультет

- 1. Найдите все целочисленные решения системы $\begin{cases} 7875x^3 = 1701y^3, \\ |x| \leq 5. \end{cases}$
- 2. Найдите область значений функции $y = -\sqrt{-3x^2 + 12x - 3}$.
- 3. Решите уравнение $\log_3((x+10)\cos x) = \log_3\left(\frac{x+10}{\cos x}\right)$.
- 4. Составьте уравнение окружности наименьшего радиуса, внутри которой помещается множество, заданное на координатной плоскости условием $|2y + 3x - 2| + |3x + 6| < 6$.
- 5. Предприятие производит телевизоры и является прибыльным. Известно, что при изготовлении n телевизоров в месяц расходы предприятия на выпуск одного телевизора составляют не менее $40500/n + 270 - |90 - 40500/n|$ тыс. руб., а цена реализации каждого телевизора при этом не превосходит $540 - 3n/10$ тыс. руб. Определите ежемесячный объем производства, при котором может быть получена наибольшая из возможных в данных условиях ежемесячная прибыль.
- 6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезок CM , соединяющий вершину C с точкой M , расположенной на стороне AD , пересекает диагональ BD в точке K . Известно, что $CK : KM = 2 : 1$, $CD : DK = 5 : 3$ и $\angle ABD + \angle ACD = 180^\circ$. Найдите отношение стороны AB к диагонали AC .

Факультет психологии

- 1. Верно ли неравенство $3 \log_2 5 < \sqrt{9 \log_2 5 + 28}$ (таблицами и калькулятором не пользоваться)?
- 2. Известно, что $x = 1$, $y = -1$ — одно из решений системы
$$\begin{cases} 2ax + by = \sqrt{3} \operatorname{tg}\left(\frac{111\pi}{6}\right), \\ ax^2 + by^2 = 2. \end{cases}$$

Найдите все решения данной системы.

- 3. В тупоугольном треугольнике ABC на стороне AB длины 14 выбрана точка L , равноудаленная от прямых AC и BC , а на отрезке AL — точка K , равноудаленная от вершин A и B . Найдите синус угла ACB , если $KL = 1$, а $\angle CAB = 45^\circ$.
- 4. Длины боковых ребер SA и SB четырехугольной пирамиды $SABCD$ относятся как $\sqrt{7} : \sqrt{11}$. Через точки A, B, D проведена сфера, пересекающая боковые ребра SA, SB, SD в точках A_1, B_1, D_1 соответственно, причем $AA_1 : A_1S = 1 : 3$. Через точки B, C, D, D_1 проведена еще одна сфера, пересекающая боковое ребро SB в точке E . Найдите отношение длин отрезков SE и BB_1 .

- 5. Абитуриенты сдавали экзамены в течение трех дней в одних и тех же аудиториях. Число экзаменовавшихся в каждый день абитуриентов в каждой аудитории было равно числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их можно было провести за два дня, используя каждый день одни и те же аудитории, причем каждый день в каждой аудитории абитуриентов удалось бы рассадить по рядам так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равным числу используемых аудиторий. Найдите минимальное возможное число абитуриентов, которое могло бы быть проэкзаменовано при этих условиях.

Институт стран Азии и Африки

- 1. Биржа запланировала провести торги в июле и августе. Если объем торгов в июле оставить на запланированном уровне, а план на август повысить в три раза, то суммарный объем торгов, проводимых в течение этих двух месяцев, возрастет в два раза. Найдите отношение объемов торгов, запланированных на июль и на август, и выясните, во сколько раз надо увеличить план на июль, оставляя неизменным план на август, чтобы суммарный объем торгов, проводимых за эти два месяца, возрос в три раза.
- 2. Решите уравнение $2^{x \log_2 7} \cdot 7^{x^2+x} = 1$.
- 3. Окружность, центр которой лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC , касается двух катетов AC и BC соответственно в точках E и D . Найдите величину угла ABC , если известно, что $AE = 1$, $BD = 3$.
- 4. Решите неравенство $2 \sin x - 1 \leq \sqrt{6 \sin^2 x - 6 \sin x - 12}$.
- 5. Решите неравенство $|x - 4^{1+\sqrt{3-x}}| \leq \frac{5}{3}x - 4 \cdot 4^{\sqrt{3-x}}$.
- 6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a^2 x^2 + 2a(\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{x - 2} = 2\sqrt{2} - 3$ имеет решение.

1995 год

Механико-математический факультет

- 1. Найти наибольшее целое число k , удовлетворяющее неравенству $4 \cdot 3^{2k+1} + 3^k < 1$.
- 2. Решить неравенство $\frac{2}{\frac{2}{\log_2 x} - 1} > -3$.
- 3. Решить уравнение $\sqrt{\sin 3x} \cdot \operatorname{tg} \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = 0$.

- 4. В окружность радиуса R вписан четырехугольник $ABCD$, P — точка пересечения его диагоналей, $AB = CD = 5$, $AD > BC$. Высота, опущенная из точки B на сторону AD , равна 3, а площадь треугольника ADP равна $25/2$. Найти длины сторон AD , BC и радиус окружности R .
- 5. Три параллельные прямые касаются в точках A , B и C сферы радиуса 4 с центром в точке O . Найти угол BAC , если известно, что площадь треугольника OBC равна 4, а площадь треугольника ABC больше 16.
- 6. Найти все значения параметра α из отрезка $[0, 2\pi]$, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z(x + y + z) - \sin \alpha = 0, \\ (x + 1) \sin^2 \frac{\alpha}{2} + y^2 \sqrt{x} + \alpha^2 \sqrt{z} + \sin \frac{3}{2} \alpha = 0 \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Найти все целые числа n и m , для которых $2nm + n = 14$ и $nm \geq 9$.
- 2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x + 3xy + y = 3 + 10\sqrt{2}, \\ x^2 + y^2 = 11. \end{cases}$$
- 3. В треугольнике ABC медианы AM и CL перпендикулярны, $BC = a$, $AC = b$. Найти площадь треугольника ABM .
- 4. Решить неравенство

$$\log_{\cos x} \cos^2 x \geq \log_{\cos x - \frac{1}{2}} \left(\cos^2 x - \cos x - x^2 - 14x - \frac{51}{4} \right).$$
- 5. Строительной организации необходимо построить некоторое количество одинаковых домов общей площадью 2500 м^2 . Стоимость одного дома площадью $a \text{ м}^2$ складывается из стоимости материалов $p_1 a^{3/2}$ тыс. р., стоимости строительных работ $p_2 a$ тыс. р. и стоимости отделочных работ $p_3 a^{1/2}$ тыс. р. Числа p_1 , p_2 , p_3 являются последовательными членами геометрической прогрессии, их сумма равна 21, а их произведение равно 64. Если построить 63 дома, то затраты на материалы будут меньше, чем затраты на строительные и отделочные работы. Сколько следует построить домов, чтобы общие затраты были минимальными?
- 6. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с параллельными гранями $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ длина ребра равна 1. Точки K и N являются серединами ребер DC и BC соответственно. Точка M лежит на ребре CC_1 и $MC = \frac{3}{4}$. Найти максимальное значение радиусов сфер, проходящих через точки M , N , K и касающихся плоскости $BB_1 DD_1$.

Физический факультет

- 1. Решить уравнение $\sin 7x - \sin x = \cos 4x$.
- 2. Решить уравнение $9^{x+1} + 3^{x+2} - 18 = 0$.

- ▶ 3. Решить уравнение $2|x + 1| = 2 - x$.
- ▶ 4. В треугольнике даны два угла α и β и радиус R описанной окружности. Найти высоту, опущенную из вершины третьего угла треугольника.
- ▶ 5. Решить неравенство $4^{\log_2 x} + x^2 < 8$.
- ▶ 6. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна R , а двугранный угол при боковом ребре равен α . Найти объем пирамиды.
- ▶ 7. Для всех значений a решить неравенство $3^{\sqrt{x+1}} > 2^{a-1}$.
- ▶ 8. В окружности проведены диаметр MN и хорда AB , параллельная диаметру MN . Касательная к окружности в точке M пересекает прямые NA и NB соответственно в точках P и Q . Известно, что $MP = p$, $MQ = q$. Найти MN .

Химический факультет

- ▶ 1. Решить неравенство $\frac{3x}{x^2+2} \geq 1$.
- ▶ 2. Решить уравнение $\log_2 x + \log_2(x + 1) = 1$.
- ▶ 3. Решить тригонометрическое уравнение $\cos 2x = 2(\cos x + \sin x)$.
- ▶ 4. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найти площадь трапеции, если ее средняя линия равна 5.
- ▶ 5. Найти множество пар действительных чисел (x, y) , удовлетворяющих системе $\begin{cases} 2^{-x}y^4 - 2y^2 + 2^x \leq 0, \\ 8x - y^4 + 2^x - 1 = 0. \end{cases}$

Биологический факультет

- ▶ 1. Решить уравнение $4(\log_4 x)^2 = \log_2 \frac{x^5}{16}$.
- ▶ 2. Решить уравнение $|x - 1| + |2x - 3| = 2$.
- ▶ 3. Найти все корни уравнения $\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, удовлетворяющие условию $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.
- ▶ 4. Саша и Сережа дважды обменивались марками, причем каждый раз $\frac{1}{7}$ количества марок, имевшихся (на момент обмена) у Саши, обменивалась на половину количества марок, имевшихся у Сережи. Сколько марок было у Саши и сколько у Сережи до первого обмена, если после первого обмена у Саши было 945 марок, а после второго обмена у Сережи — 220?
- ▶ 5. Вершины B, C, D четырехугольника $ABCD$ расположены на окружности с центром O , которая пересекает сторону AB в точке F , а сторону AD — в точке E . Известно, что угол BAD прямой, длина хорды EF равна длине хорды FB и длины хорд BC, CD, ED равны между собой. Найти угол ABO .

- 6. Найти все значения параметра a , при которых уравнение

$$(x^2 - 6|x| - a)^2 + 12(x^2 - 6|x| - a) + 37 = \cos \frac{18\pi}{a}$$

имеет ровно два корня.

Факультет почвоведения

- 1. Первый член арифметической прогрессии в два раза больше первого члена геометрической прогрессии и в пять раз больше второго члена геометрической прогрессии. Четвертый член арифметической прогрессии составляет 50 % от второго ее члена. Найти первый член арифметической прогрессии, если известно, что второй ее член больше третьего члена геометрической прогрессии на 36.
- 2. Решить уравнение $5^{2x} = 115 \cdot 5^{x-1} + 50$.
- 3. Решить неравенство $4x + 7 \leq \frac{2}{x}$.
- 4. Две окружности, радиусы которых относятся как $9 - 4\sqrt{3}$, касаются друг друга внутренним образом. Проведены две хорды большей окружности, равные по длине и касающиеся меньшей окружности. Одна из этих хорд перпендикулярна отрезку, соединяющему центры окружностей, а другая нет. Найти угол между этими хордами.
- 5. При каких значениях параметра b система уравнений

$$\begin{cases} 4y = 4b + 3 - x^2 + 2x, \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$$

имеет два действительных решения?

Геологический факультет

- 1. Решить уравнение $\sqrt{5x-6} + x = 4$.
- 2. Решить неравенство $x^2 - 6 \geq |x|$.
- 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3 \sqrt{x-y} = 0, \\ 2y^2 + y = 21 + 2xy. \end{cases}$
- 4. Решить неравенство $\frac{3^x - 2}{x^2 - 6x + 5} \leq 0$.
- 5. Решить уравнение $(2\sqrt{3} \sin(\pi x + 3\pi) - \operatorname{tg}(\pi x - \frac{\pi}{2})) \log_2(4 - x^2) = 0$.
- 6. Имеются два слитка, содержащих медь. Масса второго слитка на 3 кг больше, чем масса первого слитка. Процентное содержание меди в первом слитке — 10 %, во втором — 40 %. После сплавления этих двух слитков получился слиток, процентное содержание меди в котором — 30 %. Определить массу полученного слитка.
- 7. Около треугольника ABC описана окружность. Продолжение биссектрисы CK треугольника ABC пересекает эту окружность в точке L ,

причем CL — диаметр данной окружности. Найти отношение длин отрезков BL и AC , если синус угла BAC равен $\frac{1}{4}$.

- 8. Найти все значения параметра a , при которых неравенство $9^x < 20 \cdot 3^x + a$ не имеет ни одного целочисленного решения.

Географический факультет

- 1. Решить уравнение $2 \cos(\pi(x-1)) = \sqrt{3}$.
- 2. Теплоход затратил 5 ч. на путь вниз по течению реки от пункта A до пункта B . На обратный путь против течения он затратил 8 ч. 20 мин. Найти скорость теплохода, если путь от A до B равен 100 км.
- 3. Решить уравнение $\sqrt{2-x^2} = |x| - 1$.
- 4. Вокруг четырехугольника $ABCD$ с взаимно перпендикулярными диагоналями AC и BD описана окружность радиуса 2. Найти длину стороны CD , если $AB = 3$.
- 5. Сколько корней на отрезке $[-\pi, \pi]$ имеет уравнение $x^2 + a = 3b \cos x$, если параметр b есть наименьшее возможное значение суммы квадратов корней квадратного трехчлена $x^2 - x\sqrt{5-3c^2} + \frac{3}{2} - c^2$?

Экономический факультет (отделение экономики)

- 1. Решить неравенство $2x - 5 < 2\sqrt{x^2 - x - 6}$.
- 2. Решить уравнение $2|\sin x| + \log_{\operatorname{tg} x} \left(-\frac{|\cos x|}{\sin x} \right) = 0$.
- 3. В трапеции $KLMN$ известны боковые стороны $KL = 36$, $MN = 34$, верхнее основание $LM = 10$ и $\cos(\angle KLM) = -\frac{1}{3}$. Найти диагональ LN .
- 4. В банк помещен вклад в размере 3900 тыс. р. под 50 % годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725 %. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял ко вкладу?
- 5. Найти все $x \in [-3, 1]$, для которых неравенство $x(\pi(x+1) - 4 \operatorname{arctg}(3m^2 + 12m + 11)) > 0$ выполняется при любых целых m .
- 6. Найти наименьшее значение выражения $a^2 + (b-1)^2$ среди тех a и b , для которых уравнение $||x-4|-2| - ax + 4a - b = 0$ имеет ровно три различных корня. Указать, при каких a и b достигается это наименьшее значение.

Экономический факультет (отделение менеджмента)

- 1. Решить уравнение $\sqrt{x+3} = 9-x$.
- 2. Решить уравнение $\frac{\sin 3x}{2 \cos 2x+1} = 0$.
- 3. Решить неравенство $\log_{\frac{3x-1}{3x+1}} \left(x - \frac{1}{3}\right) \geq 1$.
- 4. В первый год разработки месторождения было добыто 100 тыс. т железной руды. В течение нескольких следующих лет годовая добыча руды увеличивалась на 25 % по сравнению с каждым предыдущим годом, а затем на протяжении последующих 3 лет поддерживалась на достигнутом уровне. Общий объем добытой руды за все время добычи составил 850 тыс. т. Сколько лет разрабатывалось месторождение?
- 5. В треугольнике ABC сторона $AB = 6$, $\angle BAC = 30^\circ$, радиус описанной окружности равен 5. Найти сторону AC .
- 6. Найти все значения параметра p , при которых уравнение $x - 2 = \sqrt{-2(p+2)x + 2}$ имеет единственное решение.

Факультет психологии

- 1. Решить уравнение $|2x - 15| = 22 - |2x + 7|$.
- 2. Решить неравенство $\frac{\sqrt{(x-5)(x+5)}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1} \geq 0$.
- 3. Решить уравнение $\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2 + \cos x} = 0$.
- 4. В треугольнике ABC проведены биссектриссы BL и AE углов ABC и BAC соответственно, которые пересекаются в точке O . Известно, что $|AB| = |BL|$, периметр треугольника равен 28, $|BO| = 2|OL|$. Найти $|AB|$.
- 5. Найти все значения параметра a , при которых неравенство $\cos x - 2\sqrt{x^2 + 9} \leq -\frac{x^2+9}{a+\cos x} - a$ имеет единственное решение.

Институт стран Азии и Африки

- 1. Найти x , если известно, что числа -1 , $x + 2$, $\sin(\arcsin x)$, взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессию.
- 2. Решить уравнение $\log_2(x^2 - 4x + 3) - \log_2(x - 1) \log_2(x - 3) = 1$.
- 3. На счет, который вкладчик имел в начале первого квартала, начисляется в конце этого квартала r_1 процентов, а на тот счет, который вкладчик имел в конце второго квартала, начисляется в конце этого квартала r_2 процентов, причем $r_1 + r_2 = 150$. Вкладчик положил на счет в начале

первого квартала некоторую сумму и снял в конце того же квартала половину этой суммы. При каком значении r_1 счет вкладчика в конце второго квартала окажется максимально возможным?

- 4. Сторона AB треугольника ABC равна 3, $|BC| = 2|AC|$, E — точка пересечения продолжения биссектрисы CD данного треугольника с описанной около него окружностью, $|DE| = 1$. Найти длину AC .
- 5. Решить неравенство $\sqrt{4x - x^2} - 3 (\sqrt{2} \cos x - \sqrt{1 + \cos 2x}) \geq 0$.
- 6. Найти все значения параметра a , при которых неравенство $x^2 + 4x + 6a|x + 2| + 9a^2 \leq 0$ имеет не более одного решения.

1996 год

Механико-математический факультет

- 1. Решить уравнение

$$\frac{7}{\cos^2 x} - \frac{7\sqrt{7}}{\cos x} + 10 = 0.$$

- 2. Решить неравенство

$$\sqrt{8 \cdot 16^x - \frac{1}{2} \cdot 9^x} \leq 3 \cdot 4^x - 3^x.$$

- 3. В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, точка R лежит на отрезке BC и $BR = RC$. Описанная около треугольника BRO окружность пересекает AB в точке T . Найти площадь треугольника ABC , если $\angle BOR = 30^\circ$, $RT = 8$, $BT = 6$.

- 4. Решить систему

$$\begin{cases} \log_3 18 \sin x - \log_3 3y + |\log_3 \cos x - \log_3 3y| = 1, \\ \frac{1}{4}(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{1}{3y^2} \leq 1. \end{cases}$$

- 5. В треугольной пирамиде $AKLM$ выполнено $AK = AL = AM$, $KL = LM = MK$, $\operatorname{tg}(\angle AKM) = \frac{7}{\sqrt{3}}$. Сфера радиуса $2\sqrt{3}$ касается луча LA , касается плоскости AKM и касается плоскости KLM в точке, лежащей на луче LM . Найти наибольшее возможное значение длины отрезка LM .
- 6. При каких значениях параметра a уравнение $(x^2 - x + a^2 + 1)^2 = 4a^2(5x^2 - x + 1)$ имеет ровно 3 различных решения?

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Числа a , b , c и d являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что $a + d = 10$, $a \cdot d = 7$. Найти $b^3 + c^3$.

- 2. Первый раствор содержит 20% азотной кислоты и 80% воды, второй — 60% азотной кислоты и 40% воды. Первая смесь была получена из 15 литров первого раствора и некоторого количества второго раствора. Смешав то же самое количество второго раствора с 5 литрами первого, получили вторую смесь. Сколько литров второго раствора было использовано для приготовления первой смеси, если известно, что процентное содержание воды во второй смеси в два раза больше процентного содержания кислоты в первой.
- 3. При всех значениях параметра a решить уравнение
- $$25^x - (a - 1)5^x + 2a + 3 = 0,$$
- и указать при каких a оно имеет единственное решение.
- 4. Решить неравенство
- $$\arccos(3x) + \arcsin(x + 1) \leq 7\pi/6.$$
- 5. Решить систему уравнений
- $$\begin{cases} x^2 + y^2 - 14x - 10y + 58 = 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 16x - 12y + 100} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 20y + 104} = 2\sqrt{29}. \end{cases}$$
- 6. Две окружности пересекаются в точках A и B . Хорда CD первой окружности имеет с хордой EF второй окружности общую точку M . Длина отрезка AB в три раза больше длины отрезка CM , которая, в свою очередь, в два раза меньше длины отрезка MD и в шесть раз меньше длины отрезка MF . Какие значения может принимать длина отрезка AM , если известно, что длина BM равна 2, а длина AB в девять раз больше длины отрезка EM ?

Физический факультет

- 1. Решить уравнение
- $$\cos 3x - \sin\left(7x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin 2x.$$
- 2. Решить неравенство
- $$\frac{x - 1}{x\sqrt{4 + 3x - x^2}} > 0.$$
- 3. Решить уравнение
- $$6^{\frac{x}{2}} - 3 \cdot 6^{1 - \frac{x}{2}} = 3 \cdot 6^{-\frac{x}{2}}.$$
- 4. Через точку L окружности проведены касательная и хорда LM длины 5. Хорда MN параллельна касательной и равна 6. Найти радиус окружности.
- 5. Решить систему уравнений
- $$\begin{cases} \log_2(3y^2 - x^2) = 3, \\ 8 \log_{16}(-x) + \log_2 y^2 = 4. \end{cases}$$
- 6. В прямоугольном параллелепипеде диагональ, равная d , образует с боковыми гранями углы β и γ . Найти объем параллелепипеда.

- 7. В равнобедренном треугольнике BCD ($BC = CD$) проведена биссектриса BE . Известно, что $CE = c$, $DE = d$. Найти BE .
- 8. Для каждого значения a найти число решений уравнения $a \operatorname{ctg} x - 1 = \cos 2x$, принадлежащих отрезку $0 \leq x \leq 2\pi$.

Химический факультет

- 1. Решить уравнение $\cos 4x + \sin x \sin 3x = 0$.
- 2. Решить неравенство $\sqrt{x+5} > 7-x$.
- 3. Решить систему
$$\begin{cases} 5(\log_y x + \log_x y) = 26, \\ xy = 64, \\ y < x. \end{cases}$$
- 4. В треугольнике ABC точка D лежит на AC , причем $AD = 2DC$. Точка E лежит на BC . Площадь треугольника ABD равна 3, площадь треугольника AED равна 1. Отрезки AE и BD пересекаются в точке O . Найти отношение площадей треугольников ABO и OED .
- 5. Решить уравнение $|1 + \cos(\pi\sqrt{x})| + |x^2 - 15x + 44| = 15x - x^2 - \cos(\pi\sqrt{x}) - 45$.

Биологический факультет

- 1. Решить уравнение $\sqrt{3} \cdot \sin x + \sin 2x = 0$.
- 2. Решить уравнение $(x-3)^2 - 5 \cdot |x-3| = 24$.
- 3. Найти все значения x , удовлетворяющие неравенству $2 + \log_{\frac{1}{2}}(\log_3(7-x)) < 0$.
- 4. Плоское сечение SAB , проходящее через вершину S прямого кругового конуса, имеет площадь 60 (см²). Точки A и B , лежащие на окружности основания конуса, делят ее длину в отношении $1 : 5$. Найти объем конуса, если угол SAB равен $\arccos(\frac{2}{\sqrt{29}})$.
- 5. Найти все пары натуральных чисел (p, q) , удовлетворяющие одновременно двум неравенствам
$$\begin{cases} 18 \cdot q > 2 \cdot p + 2 \cdot q^2 + 27, \\ 7 \cdot p + 10 \leq 4 \cdot q. \end{cases}$$

Факультет почвоведения

- 1. Докажите, что число $\left((\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{27})^2 + 7\right) \cdot \left((\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{27})^2 - 7\right)$ целое, и найдите это число.
- 2. Решите неравенство $3x^4 + 4 < 13x^2$.
- 3. Решите уравнение $x^{2 \log_4 x} = \frac{8}{x^2}$.
- 4. Найдите все решения уравнения $\sqrt{x + \sin x} = \sqrt{x - \sin 2x}$, удовлетворяющие неравенству $-2\pi < x < 2\pi$.
- 5. В треугольнике ABC $AB = 3$, $AC = 3\sqrt{7}$, $\angle ABC = 60^\circ$. Биссектриса угла ABC продолжена до пересечения в точке D с окружностью, описанной вокруг треугольника. Найдите длину отрезка BD .
- 6. Определите, при каких значениях a решения неравенства $\sqrt{x+a} \geq x$ образуют на числовой прямой отрезок длины $2|a|$.

Геологический факультет

- 1. Решить уравнение $\sqrt{4x-4} = x-9$.
- 2. Определить, какие из чисел $-3, -1, 1, 3$ являются решениями неравенства $\left|\frac{1}{3} - \log_6 2\right| \cdot x \leq \frac{1}{3} - \log_6 2$.
- 3. Найти все решения уравнения $\frac{\sin 4x + \sin 6x}{2x^2 - 5\pi x + 2\pi^2} = \frac{\sin 8x + \sin 10x}{2x^2 - 5\pi x + 2\pi^2}$, принадлежащие интервалу $(0; \pi)$.
- 4. Решить неравенство $\frac{1}{\log_2(-x)} < \frac{1}{\log_4(-2x)}$.
- 5. Решить систему уравнений $\begin{cases} y^2 + xy = 42x, \\ 6x^2 + 6xy = 7y. \end{cases}$
- 6. В двух банках в конце года на каждый счет начисляется прибыль: в первом банке — 50% к текущей сумме на счете, во втором — 75% к текущей сумме на счете. Вкладчик в начале года часть имеющихся у него денег положил в первый банк, а остальные деньги — во второй банк, с таким расчетом, чтобы через два года суммарное количество

денег на обоих счетах утроилось. Какую долю денег вкладчик положил в первый банк?

- 7. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям и имеет длину 6 см. Длина основания AD равна 8 см, а длина отрезка DO , где O — точка пересечения диагоналей трапеции, равна 6 см. Найти площадь треугольника COD .
- 8. Найти все действительные значения параметра b , при которых для любого действительного a уравнение
- $$\cos(a + ab + ax) + 4 \cos a^2 x = 5b^2$$
- имеет хотя бы одно решение.

Географический факультет

- 1. Решить уравнение
- $$\sqrt{28 + 6x} - x = 2.$$
- 2. $f(x)$ — периодическая функция с периодом $T = \sqrt{2}$. Найти значение $f(\sqrt{8})$, если известно, что $3f^2(0) + 7f(\sqrt{72}) + 4 = 0$ и $f^2(-\sqrt{2}) + 3f(\sqrt{8}) + \frac{20}{9} = 0$.
- 3. Решить уравнение

$$\log_{(-\sin x)} \left(\cos^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x + 1 \right) = 0.$$

- 4. Углы треугольника ABC удовлетворяют равенству
- $$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1.$$

Найти площадь этого треугольника, если известны радиусы вписанной $r = \sqrt{3}$ и описанной $R = 3\sqrt{2}$ окружностей.

- 5. Даны два вектора
- $$\vec{u} = \{-p(q+2); -2p-3; p(q+2)\} \quad \text{и} \quad \vec{v} = \{-q-2; p+2; q+2\}$$
- 1) Найти все значения параметров p и q , при которых эти векторы будут коллинеарны, но не равны.
- 2) В случае $p = q$ найти все значения параметра q , при которых эти векторы взаимно перпендикулярны.

Экономический факультет (отделение экономики)

- 1. Решить систему
- $$\begin{cases} |-x| - \sqrt[3]{y+3} = 1, \\ (-x\sqrt{-x})^2 - y = 10. \end{cases}$$
- 2. Решить неравенство
- $$\frac{\log_7(19 - 16x|x|) - \log_{49}(1 - 4x)^2}{3 - 4x - |4x - 3|} \leq 0.$$

- 3. Решить уравнение

$$\left(\operatorname{tg} \frac{19\pi}{3} - \operatorname{tg} x\right) \cdot \sqrt{6 \cdot \cos \frac{15\pi}{4} \cdot \cos \frac{x}{2} - \cos x - 3} = 0.$$

- 4. В контейнер упакованы комплектующие изделия трех типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс. руб. и 12 кг для первого типа, 500 тыс. руб. и 16 кг для второго типа, 600 тыс. руб. и 15 кг для третьего типа. Общий вес комплектующих равен 326 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере комплектующих изделий.
- 5. В треугольнике ABC с основанием $AC = 8$ проведена биссектриса BL . Известно, что площади треугольников ABL и BLC относятся как 3 : 1. Найти биссектрису BL , при которой высота, опущенная из вершины B на основание AC , будет наибольшей.
- 6. Найти все значения параметра a , при которых фигура, заданная на координатной плоскости условием

$$|y| \leq (\sqrt{a - |x|})^2 + \arcsin(\sin(a - |x|)),$$

представляет собой четырнадцатиугольник.

Экономический факультет (отделение менеджмента)

- 1. Решить неравенство

$$\log_4(3 - 3x)^2 \geq \log_2(x^2 - 1).$$

- 2. Решить систему

$$\begin{cases} x + 3^y = 2, \\ x^3 + 27^y = 26. \end{cases}$$

- 3. В контейнер упакованы изделия двух типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс. руб. и 12 кг для первого типа и 600 тыс. руб. и 15 кг для второго типа. Общий вес изделий равен 321 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере изделий.
- 4. Решить уравнение $\sqrt[4]{12} \cdot \sin x = \sqrt{\sin 2x}$.
- 5. Через точку A , находящуюся вне окружности на расстоянии 7 от ее центра, проведена прямая, пересекающая окружность в точках B и C . Найти радиус окружности, если известно, что $AB = 3$, $BC = 5$.
- 6. При каких значениях параметра p площадь фигуры, заданной на координатной плоскости уравнением $|2x + y| + |x - y + 3| \leq p$, будет равна 24?

Факультет психологии

- 1. Решить уравнение $\sqrt{2x^2 - 21x + 4} = 2 - 11x$.
- 2. Решить неравенство $2 < \log_3(x - 3)^4 \leq 8$.
- 3. Найти область определения функции и ответ обосновать:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{-6 \sin^2 2x - 2 \sin 2x \cdot \cos 2x + 8 - \sqrt{3}}}.$$

- 4. В угол с вершиной A величиной в 60° вписана окружность с центром в точке O . Через точку K этой окружности проведена к ней касательная, пересекающая сторону угла в точках B и C . Отрезок BC пересекается с отрезком AO в точке M . Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , если $\frac{AM}{MO} = \frac{2}{3}$ и $BC = 7$.
- 5. Пусть t_1 и t_2 — действительные корни квадратного уравнения

$$t^2 - (5b - 2)t - 3b^2 - 7b + 1 = 0.$$

Найти все значения параметра b , при каждом из которых для любого значения параметра a функция $f(x) = \cos(ax) \cdot \cos((t_1^3 + t_2^3) \cdot \pi x)$ является периодической.

Институт стран Азии и Африки

- 1. Решить неравенство
- $$4 \cdot 9^x - 5 \cdot 3^{x+1} - 4 \geq 0.$$
- 2. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условиями

$$\begin{cases} y \geq |x| - 1, \\ y \leq -2|x| + 5. \end{cases}$$
 - 3. Найти область определения функции $y = \frac{\sqrt{40+3x-x^2} \cdot \log_5(x^2-9)}{2 \sin x - \sqrt{3}}$.
 - 4. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{x+3} - x + 3) \geq -2 + \log_{\frac{1}{4}} \frac{3}{8}$.
 - 5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжение стороны AB за точку B пересекается с продолжением стороны CD в точке E . Найти угол ADE , если $CD = 2BE$, $AB : EC = 7 : 2$ и косинус угла AED равен $\frac{7}{8}$.
 - 6. При каких значениях параметра a неравенство

$$\log_{\frac{-2a-13}{6}} \left(\frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x - a - 4}{5} \right) > 0$$

выполняется для любых значений x ?

1997 год

Механико-математический факультет

- 1. Решить уравнение $(2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1) \cdot \sqrt{\operatorname{tg} x} = 0$.
- 2. Решить неравенство $(1 - \frac{x}{2}) \log_{13-3 \cdot 2^x} 4 \leq 1$.
- 3. Из пункта A в пункт B со скоростью 80 км/ч выехал автомобиль, а через некоторое время с постоянной скоростью выехал второй. После остановки на 20 мин в пункте B второй автомобиль поехал с той же скоростью назад, через 48 км встретил первый автомобиль, шедший навстречу, и был на расстоянии 120 км от B в момент прибытия в B первого автомобиля. Найти расстояние от A до места первой встречи автомобилей, если $AB = 480$ км.
- 4. В треугольнике ABC длина AB равна 3, $\angle ACB = \arcsin \frac{3}{5}$. Хорда KN окружности, описанной около треугольника ABC , пересекает отрезки AC и BC в точках M и L соответственно. Известно, что $\angle ABC = \angle CML$, площадь четырехугольника $ABLM$ равна 2, а длина LM равна 1. Найти высоту треугольника KNC , опущенную из вершины C , и его площадь.
- 5. Для всех значений параметра a решить уравнение

$$\left| x^4 + \frac{2a-1}{3}x^2 + \frac{2a^2+a+2}{12} \right| = \frac{a}{2} \left| x^2 + \frac{a}{3} - \frac{1}{6} \right| + \frac{a+1}{6}.$$
- 6. Вокруг пирамиды $ABCD$ описана сфера. Вторая сфера радиуса 1 касается первой внутренним образом в точке D , а также касается плоскости ABC . Известно, что $AD = 3$, $\cos \angle BAC = \frac{4}{5}$, $\cos \angle BAD = \cos \angle CAD = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Найти объем пирамиды $ABCD$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Пункты A , B и C расположены на реке в указанном порядке вниз по течению. Расстояние между A и B равно 4 км, а между B и C — 14 км. В 12⁰⁰ из пункта B отплыла лодка и направилась в пункт A . Достигнув пункта A , она сразу же повернула назад и в 14⁰⁰ прибыла в пункт C . Скорость течения реки равна 5 км/ч. Найдите скорость лодки в стоячей воде.
- 2. Решите неравенство $\log_{1/(1-x^2)} 2 < \log_{2x^2} \frac{1}{2}$.
- 3. Решите уравнение $3 + |\sin x - 3 \cos x| = 3 \sin x + \cos x$.

- 4. Найдите все решения системы уравнений
- $$\begin{cases} 4^x + 5 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = 2, \\ 2 \cdot 9^y + 2^x + 2 \cdot 3^y = 1. \end{cases}$$
- 5. Внутри треугольника ABC выбрана точка O так, что радиусы описанных около треугольников AOC и AOB окружностей равны, соответственно, 5 и 4. Известно, что расстояние между центрами этих окружностей равно 6, $AB = 6$, $AC = 7$. Найдите OC .
- 6. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение
- $$\sqrt{x^3 - 24x^2 + 118x + 7} = 5\sqrt{7x - x^2} + \sqrt{a^2 - 11a + 18}$$
- имеет единственное решение.

Физический факультет

- 1. Решите уравнение $\cos 6x + 4 \cos 2x = 0$.
- 2. Решите уравнение $\frac{7 \cdot 4^{x-2}}{4^x - 3 \cdot 5^x} = 1 + 3 \left(\frac{5}{4}\right)^x$.
- 3. Решите неравенство $\sqrt{\log_5(x+2)} > \log_{1/5} \left(\frac{5}{x+2}\right)$.
- 4. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC , пересекает сторону BC в точке M , а сторону AC — в точке N . Площадь треугольника MCN в два раза больше площади трапеции $ABMN$. Найдите $CM : MB$.
- 5. Решите систему уравнений $\begin{cases} y + |x + 1| = 1, \\ |y - x| = 5. \end{cases}$
- 6. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 7, 8, 9. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60° . Найдите высоту пирамиды.
- 7. При любых значениях a решите неравенство $a - 2 < (a - 1)\sqrt{x + 1}$.
- 8. В трапеции $ABCD$ известно, что $BC \parallel AD$, $\angle ABC = 90^\circ$. Прямая, перпендикулярная стороне CD , пересекает сторону AB в точке M , а сторону CD — в точке N . Известно также, что $MC = a$, $BN = b$, а расстояние от точки D до прямой MC равно c . Найдите расстояние от точки A до прямой BN .

Химический факультет

- 1. Решить уравнение $\sqrt{3x^2 - 25x + 51} = 7 - 2x$.
- 2. Решить неравенство $(\sqrt{2} + 1)^x + 1 < 2(\sqrt{2} - 1)^x$.
- 3. Решить уравнение $8 \cos 2x + 16 \cos x + 7 = 0$.
- 4. n насосов различной мощности наполняют бассейн водой. Первый насос, работая автономно, может наполнить весь бассейн за 2 часа, второй — за 4 часа, ..., n -й — за 2^n часов. Каким должно быть наименьшее число насосов n , чтобы все n насосов, работая одновременно, наполнили

бассейн быстрее, чем за 1 час и 1 минуту? Можно ли наполнить бассейн быстрее, чем за 1 час?

- 5. Середины высот треугольника ABC лежат на одной прямой. Наибольшая сторона треугольника $AB = 10$ см. Какое максимальное значение может принимать площадь треугольника ABC ?
- 6. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $x^2 + 2y^2$, если $x^2 - xy + 2y^2 = 1$.

Биологический факультет и факультет фундаментальной медицины

- 1. Решить уравнение $\log_3 x + \log_3(x+1) = 1$.
- 2. Решить уравнение $\sin 2x - \sin 4x = (\cos 2x + 1) \cos 3x$.
- 3. Решить неравенство $\sqrt{|1-8x|} - 2 \leq x + 1$.
- 4. В двух коробках лежат карандаши: в первой красные, во второй — синие. Известно, что красных карандашей меньше, чем синих. Сорок процентов карандашей из первой коробки переложили во вторую. Затем 20% карандашей, оказавшихся во второй коробке, переложили в первую, причем половину из них составляли синие. После этого красных карандашей в первой коробке оказалось на 26 больше, чем во второй, а общее количество карандашей во второй коробке увеличилось по сравнению с первоначальным более, чем на 5%. Найти общее количество синих карандашей.
- 5. В треугольнике ABC проведена средняя линия MN , соединяющая стороны AB и BC . Окружность, проведенная через точки M , N и C , касается стороны AB , а ее радиус равен $\sqrt{2}$. Длина стороны AC равна 2. Найти синус угла $\angle ACB$.

- 6. Найти решения системы
$$\begin{cases} \frac{1}{20} \left(\frac{x^2}{\sin x} \right)^2 - \frac{x^{3/2}}{\sqrt{\sin x}} + 1 < 0, \\ \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^2 \geq \frac{\pi}{24} \left(\frac{5\pi}{6} - x \right), \\ x^2 - \frac{x^{3/2}}{\sqrt{\cos x}} + \frac{5}{4} < 0. \end{cases}$$

Факультет почвоведения

- 1. Решить уравнение $x = \sqrt{8x+9}$.
- 2. Решить неравенство $\log_{1/7}(x^2+3x) < \log_{1/7}(5x-1)$.
- 3. Решить уравнение $2\sin^2 x - \frac{|\sin x|}{\cos x} = 0$.
- 4. В сосуде находится 10%-й раствор спирта. Из сосуда отлили $1/3$ содержимого, а оставшуюся часть долили водой так, что сосуд оказался

заполненным на $5/6$ первоначального объема. Какое процентное содержание спирта оказалось в сосуде?

- 5. В треугольнике ABC угол C равен 60° , а биссектриса угла C равна $5\sqrt{3}$. Длины сторон AC и BC относятся как $5 : 2$ соответственно. Найти тангенс угла A и сторону BC .
- 6. Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$\sqrt{a^2 - x^2} \geq a + 1.$$

Геологический факультет

- 1. Сколько решений имеет уравнение

$$\sqrt{5}(x^2 + 2) - 2x\sqrt{7} = \sqrt[4]{21}(x^2 - 2) - 2x\sqrt{3} ?$$

- 2. Решите уравнение $5 \cos 4x + 5 = 22(\cos x + \sin x)^2$.
- 3. Решите неравенство $\frac{x}{20 - \sqrt{x}} < 10$.
- 4. В треугольнике FGH угол G прямой, $FG = 8$, $GH = 2$. Точка D лежит на стороне FH , A и B — точки пересечения медиан треугольников FGD и DGH . Найдите площадь треугольника GAB .
- 5. Решите неравенство $11^{\log_{1/11} \log_7 x} < 7^{\log_{1/7} \log_{11} x}$.
- 6. В момент, когда два бассейна были пустыми, 4 трубы одинаковой производительности были подключены для заполнения первого бассейна. Когда первый бассейн был заполнен на $1/6$ его объема, одну трубу переключили для заполнения второго бассейна. Когда первый бассейн был заполнен на $1/2$ его объема, еще две трубы переключили для заполнения второго бассейна. После этого оба бассейна наполнились доверху одновременно. Найдите отношение объемов бассейнов. (Временем на переключение пренебrecь.)
- 7. Найдите все решения уравнения $|x + y + 11 - 5xy| + |x^2y + xy^2 - 12| = 0$.
- 8. При каких значениях α уравнения

$$x\alpha^2 - \alpha - (x^3 - 5x^2 + 4) = 0,$$

$$(x + 1)\alpha^2 + (x^2 - x - 2)\alpha - (2x^3 - 10x^2 + 8) = 0$$

не имеют общего решения?

Географический факультет

- 1. Решить неравенство $\frac{|x - 1| + 10}{4|x - 1| + 3} > 2$.
- 2. Найти наибольший отрицательный корень уравнения $\cos(\pi(x^2 - x + 1)) = \cos(\pi(x - 1))$.
- 3. Решить уравнение $\log_{|\sin(\pi x/4)|}(9^x - 3^{x+3} + 30) = \log_{|\sin(\pi x/4)|}(3^x + 3)$.

- 4. Найти все значения параметра b , при каждом из которых единственное решение имеет система неравенств

$$\begin{cases} by^2 + 4by - 2x + 7b + 4 \leq 0, \\ bx^2 - 2y - 2bx + 4b - 2 \leq 0. \end{cases}$$

- 5. В некоторый угол B вписаны две непересекающиеся окружности. Окружность большего радиуса касается сторон этого угла в точках A и C , меньшего — в точках A_1 и C_1 . (Точки A и C_1 лежат на разных сторонах угла B .) Прямая AC_1 пересекает окружности большего и меньшего радиусов в точках E и F соответственно. Найти отношение площадей треугольников ABC_1 и A_1BC_1 , если $A_1B = 2$, $EF = 1$, а длина AE равна среднему арифметическому длин BC_1 и EF .
- 6. На координатной плоскости построить множество точек с координатами $(x; y)$, каждой из которых соответствует треугольник со сторонами $1, |x|, \sqrt{-y}$. Найти уравнения кривых, ограничивающих это множество.

Экономический факультет

- 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left| \sin \left(\frac{\pi(x+y)}{4} \right) \right| + \left| 1 - \sin \left(\frac{\pi(x-y)}{4} \right) \right| = 0, \\ \sqrt{4 - |x| - |y + 2|} = \sqrt{4 - |x| - |y + 2|}. \end{cases}$$

- 2. Решите неравенство $(1/2)\sqrt{(x^2 - 2x - 15)^3} \cdot 7(x+3)^2(x-5) \leq 1$.
- 3. Касательная, проведенная через вершину C вписанного в окружность треугольника ABC , пересекает продолжение стороны AB за вершину B в точке D . Известно, что радиус окружности равен 2, $AC = \sqrt{12}$ и $\angle CDA + \angle ACB = 2\angle BAC$. Найдите секущую AD .
- 4. Имеются три пакета акций. Общее суммарное количество акций первых двух пакетов совпадает с общим количеством акций в третьем пакете. Первый пакет в 4 раза дешевле второго, а суммарная стоимость первого и второго пакетов совпадает со стоимостью третьего пакета. Одна акция из второго пакета дороже одной акции из первого пакета на величину, заключенную в пределах от 16 тыс. руб до 20 тыс. руб, а цена одной акции из третьего пакета не меньше 42 тыс. руб и не больше 60 тыс. руб. Определите, какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций может содержаться в первом пакете.
- 5. Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, является нечетной, периодической с периодом 4, и на промежутке $-2 \leq x \leq 0$ ее значения вычисляются по правилу $f(x) = 2x(x + 2)$. Решите уравнение

$$\frac{2 \cdot f(-3 - x) - 3}{\sqrt{f(x/2 + 3/4)} - \sqrt{2}} = 0.$$

- 6. Множество точек, расположенных внутри фигуры F , задано на координатной плоскости условием

$$\log_{\frac{x^2+1039}{1147}} \frac{10y-24-y^2}{850} > 0.$$

Множества $F(t)$ получаются из F поворотом вокруг начала координат против часовой стрелки на угол t . Найдите площадь фигуры, образованной точками, каждая из которых при некотором $t \in [0; \pi]$ принадлежит множеству $F(t)$.

Факультет психологии

- 1. Решить уравнение $3 \cos^2 x + 4 \sin x = 0$.
- 2. Решить неравенство $\sqrt{t+3} > 5 - 2t$.
- 3. В возрастающей геометрической прогрессии сумма первого и последнего ее членов равна 164, а произведение второго и предпоследнего членов равно 324. Найти последний член прогрессии.
- 4. При каких действительных p уравнение

$$4^x + 2^{x+2} + 7 = p - 4^{-x} - 2 \cdot 2^{1-x}$$

имеет решение?

- 5. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A . Через точку B на их общей касательной AB проведены две прямые, одна из которых пересекает первую окружность в точках M и N , а другая вторую окружность в точках P и Q . Известно, что $AB = 6$, $BM = 9$, $BP = 5$. Найти отношение площадей треугольников MNO и PQO , где O — точка пересечения прямых MP и NQ .
- 6. Найти все значения параметров a и b , при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 5 = b^2 + 2x - 4y, \\ x^2 + (12 - 2a)x + y^2 = 2ay + 12a - 2a^2 - 27 \end{cases}$$

имеет два решения (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , удовлетворяющие условию

$$\frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}.$$

Социологический факультет

- 1. Решите неравенство $\frac{x^2+1}{x} < \frac{1}{x} - 1$.
- 2. В треугольнике ABC длина AB равна 4, длина BC равна 5. Из вершины B проведен отрезок BM ($M \in AC$), причем $\angle ABM = 45^\circ$ и $\angle MBC = 30^\circ$. 1) В каком отношении точка M делит сторону AC ? 2) Вычислите длины отрезков AM и MC .
- 3. Найдите все решения уравнения $\sqrt{-3x+3} = x - 1$.

- 4. В дошкольном учреждении провели опрос. На вопрос: «Что Вы предпочитаете, кашу или компот?» — большая часть ответила: «Кашу», меньшая: «Компот», а один респондент: «Затрудняюсь ответить». Далее выяснили, что среди любителей компота 30% предпочитают абрикосовый, а 70% — грушевый. У любителей каши уточнили, какую кашу они предпочитают. Оказалось, что 56,25% выбрали манную, а 37,5% — рисовую, и лишь один ответил: «Затрудняюсь ответить». Сколько детей было опрошено?
- 5. Решите систему
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{32}} \cdot 8^{3x^2} > 2^{x+3}, \\ |\sqrt{2x} - 1| = \sqrt{2x} - 1. \end{cases}$$
- 6. Укажите все неотрицательные значения параметра a , при которых уравнение $\sin(2a) \cdot \sin^2(ax) + 1 = (1 + \sin(2a)) \sin(ax)$ имеет ровно 4 решения на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Институт стран Азии и Африки

- 1. Решите уравнение $\sqrt{9-2x} + \sqrt{3}(x-2) = 0$.
- 2. Решите уравнение $2|x-5| - 1 = 3|2x-5| - 4|x-1|$.
- 3. Решите уравнение $1 - 3\sin x \cos x - 5\cos^2 x = 0$.
- 4. Решите неравенство $\log_{1/2} |1-x| - \log_{x-1} 2 \leq 2$.
- 5. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условиями
$$\begin{cases} y \leq \sqrt{4-x^2}, \\ y \geq |x-1| - 3. \end{cases}$$
- 6. В прямоугольнике $ABCD$ на сторонах AB и AD выбраны соответственно точки E и F так, что $AE : EB = 3 : 1$, $AF : FD = 1 : 2$. Найдите отношение $EO : OD$, где O — точка пересечения отрезков DE и CF .
- 7. Найдите все пары целых чисел x и y , удовлетворяющих уравнению
$$3xy - 14x - 17y + 71 = 0.$$

1998 год

Механико-математический факультет

- 1. Решить неравенство $3 \cdot \sqrt{|x+1| - 3} \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.
- 2. Решить неравенство $\log_{\frac{2x+2}{5x-1}} (10x^2 + x - 2) \leq 0$.
- 3. Решить уравнение $3 \cdot 2^{\cos x + 3\sqrt{1-\sin^2 x}} + 11 \cdot 2^{2\cos x} - 34 = 0$.
- 4. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC , касается основания AC в точке D и боковой стороны AB в точке E . Точка F —

середина стороны AB , а точка G — точка пересечения окружности и отрезка FD , отличная от D . Касательная к окружности, проходящая через точку G , пересекает сторону AB в точке H . Найти угол BCA , если известно, что $FH : HE = 2 : 3$.

- 5. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \cos^2(\pi xy) - 2\sin^2(\pi x) - 3\sin^2(\pi y) - 2 + \operatorname{tg}(\pi\alpha) = 0, \\ \cos(\pi xy) - \frac{3}{2}\sin^2(\pi x) - 2\sin^2(\pi y) - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}(\pi\alpha) = 0, \\ \log_2\left(1 + 4\sin^2\left(\frac{\pi\alpha}{4} - \frac{\pi}{16}\right) - x^2 - y^2\right) \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения?

- 6. Дана пирамида $ABCD$. Сфера касается плоскостей DAB , DAC и DBC в точках K , L и M соответственно. При этом точка K находится на стороне AB , точка L — на стороне AC , точка M — на стороне BC . Известно, что радиус сферы равен 3, $\angle ADB = 90^\circ$, $\angle BDC = 105^\circ$, $\angle ADC = 75^\circ$. Найти объем пирамиды.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Решить неравенство $2x > \frac{5x+3}{|x+2|}$.
- 2. Решить неравенство $\log_2(5-x) \cdot \log_{(x+1)} \frac{1}{8} \geq -6$.
- 3. Решить уравнение $|\sin^3 x| + 13\cos^3 x - \cos x = 0$.
- 4. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S проведена высота SD . На отрезке SD взята точка K так, что $SK : KD = 1 : 2$. Известно, что двугранные углы между основанием и боковыми гранями равны $\frac{\pi}{6}$, а расстояние от точки K до бокового ребра равно $\frac{4}{\sqrt{13}}$. Найти объем пирамиды.
- 5. Найти все значения параметра a , при которых существуют (x, y) , удовлетворяющие системе неравенств:
- $$\begin{cases} \max(2-3y, y+2) \leq 5, \\ \sqrt{a^2 + \frac{6}{\pi} \arccos \sqrt{1-x^2} - 16 - \frac{2}{\pi^2} \arcsin x \cdot (\pi + 2 \arcsin x)} \geq y^2 + 2ay + 7. \end{cases}$$
- 6. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AD делит пополам отрезок OH , где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $AC = 2$, $AD = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$. Найти радиус описанной около треугольника ABC окружности.

Физический факультет

- 1. Решить уравнение $4 \cos x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x = \sin 2x$.
- 2. Решить уравнение $\log_3(x-2) - \log_9(x^2 - 10x + 25) = \log_3 2$.
- 3. Решить неравенство $9^x - 2^{\frac{2x+1}{2}} < 2^{\frac{2x+7}{2}} - 3^{2x-1}$.
- 4. Медианы AM и CN треугольника ABC пересекаются в точке O . Известно, что $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$, $AC = b$. Найти расстояние от точки O до прямой AC .
- 5. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x + |x + y - 1| = 0, \\ y - 3 + \sqrt{x - y + 6} = 0. \end{cases}$$
- 6. На отрезке AB взята точка C , отрезки AB и CB служат диаметрами окружностей. Хорда AM касается меньшей окружности в точке D . Прямая BD пересекает большую окружность в точке N , $\angle DAB = \alpha$, $AB = 2R$. Найти площадь четырехугольника $ABMN$.
- 7. Для любых допустимых значений a решить неравенство $\log_a(3a^x - 5) < x + 1$.
- 8. В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$) угол между прямыми AC_1 и A_1B равен α , $AA_1 = 2$. Найти AB .

Химический факультет

- 1. Решить уравнение $4^x + 2^x - 2 = 0$.
- 2. Решить неравенство $\sqrt{x+3} > x+1$.
- 3. Решить систему
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x-y) + 2 = 0, \\ z^2 + xz + yz - 4 = 0. \end{cases}$$
- 4. Решить уравнение $\sin x(\cos 2x + \cos 6x) + \cos^2 x = 2$.
- 5. Диаметр AB и хорда CD окружности пересекаются в точке E , причем $CE' = DE$. Касательные к окружности в точках B и C пересекаются в точке K . Отрезки AK и CE пересекаются в точке M . Найти площадь треугольника CKM , если $AB = 10$, $AE = 1$.
- 6. Решить уравнение
$$\log_2(4x+1) \log_5(4x+4) + \log_3(4x+2) \log_4(4x+3) =$$
$$= 2 \log_3(4x+2) \log_5(4x+4).$$

Биологический факультет и факультет фундаментальной медицины

- 1. Вычислить $\log_{\left(d^4 \cdot \sqrt[5]{c^6}\right)} \left(\frac{c \cdot \sqrt[3]{c}}{\sqrt[5]{d}}\right)$, если $\log_d c = \sqrt{5}$.

- ▶ 2. Решить неравенство $|x^2 + 3x| + |x + 5| \leq x^2 + 4x + 9$.
- ▶ 3. Решить уравнение $\sqrt{1 + \cos 2x} = \sqrt{2} \cdot \cos x \cdot \left(\sin x - \frac{1}{3}\right)$.
- ▶ 4. Угол наклона всех боковых граней пирамиды $SABC$ одинаков и равен $\arctg \sqrt{2}$. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$). Найти боковую поверхность пирамиды, если $OB = \sqrt{5}$, а радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 1.
- ▶ 5. Найти все решения системы

$$\begin{cases} 6\sqrt{3} \cos 4x - 3 \cos 8x \geq 4^{1,5-t} - 2^{5-t} + \frac{79}{2}, \\ \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{-4t} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{-4t} + 2 +} \\ + 10 \log_2(\cos 8x) + 4\sqrt{2} \sin 4x \geq (t + 3)^{1,5}. \end{cases}$$

Факультет почвоведения

- ▶ 1. Решите уравнение $\sqrt{x+1} - \sqrt{4x-3} = 1$.
- ▶ 2. Найдите $\cos \frac{\alpha}{2}$, если известно, что $\tg \alpha = \frac{3}{4}$ и $\pi < \alpha < 2\pi$. Установите без таблиц и калькулятора, какое из чисел больше: $\left|\cos \frac{\alpha}{2}\right|$ или $\frac{2}{7}$.
- ▶ 3. Решите неравенство $\frac{1}{|x+1|-1} \geq \frac{2}{|x+1|-2}$.
- ▶ 4. Решите систему уравнений $\begin{cases} y^x = 3y, \\ 2 \log_3 y + \log_y 3 = 3x. \end{cases}$
- ▶ 5. На ребрах AA_1 и CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечены соответственно точки E и F такие, что $AE = 2A_1E$, $CF = 2C_1F$. Через точки B , E и F проведена плоскость, делящая куб на две части. Найдите отношение объема части, содержащей точку B_1 , к объему всего куба.
- ▶ 6. Определите, а) при каких значениях a существует такое число b , что уравнение $5 \cos x + \sin x + \cos(x-b) = a$ имеет решения; б) при каких значениях a это уравнение имеет решения при любом значении b .

Геологический факультет

- ▶ 1. Найти численное значение выражения

$$\left(\frac{9a^2 - 16b^2}{4b + 3a} - \frac{a^2b - 3ab^2}{ab}\right)^2 : \left(6ab - \frac{8a^3 - b^3}{2a - b}\right).$$
- ▶ 2. Решить уравнение $||4 - x^2| - x^2| = 1$.
- ▶ 3. Решить уравнение $5 + \frac{1}{\sin^2(3x)} = 7 \operatorname{ctg}(3x)$.
- ▶ 4. Из цистерны в бассейн сначала перелили 50% имеющейся в цистерне воды, затем еще 100 л, затем еще 5% от остатка. При этом количество

воды в бассейне возросло на 31%. Сколько воды было в цистерне, если в бассейне первоначально было 2000 л воды?

- 5. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) > \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}(x-2)} + \frac{3}{2}$.
- 6. Четырехугольник $PQRS$ вписан в окружность. Диагонали PR и QS перпендикулярны и пересекаются в точке M . Известно, что $PS = 13$, $QM = 10$, $QR = 26$. Найти площадь четырехугольника $PQRS$.
- 7. Решить систему уравнений
- $$\begin{cases} x(1+y) = y+7, \\ x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$$
- 8. При каких значениях a уравнение
- $$\left| \frac{x^2 - 4ax + 4a^2 - 1}{x - 2a} \right| + x^2 - 2x - 1 = 0$$
- имеет хотя бы одно решение?

Географический факультет

- 1. Решить неравенство $(\sqrt{3-17x-6x^2} + 2) \log_{8x} 7 \geq 0$.
- 2. Сумма первого, второго, третьего и четвертого членов геометрической прогрессии равна (-40) , причем второй член меньше третьего. Найти знаменатель прогрессии, если шестой член прогрессии меньше второго на 240.
- 3. Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) равна 128, а площадь треугольника BOC равна 2, где O — точка пересечения диагоналей трапеции. Найти площадь треугольника AOD .
- 4. Решить уравнение $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 + 5 \sin^2(2x + \frac{\pi}{3})$.
- 5. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$. Точка S — вершина пирамиды, $SA = 2\sqrt{3}$, $BC = 3$, BM — медиана основания пирамиды, AR — высота треугольника ASB . Найти длину отрезка MR .
- 6. Найти все пары целых чисел (x, y) , удовлетворяющие уравнению
- $$5y = 2x^2 - 7x + 3,$$
- и доказать, что для каждой такой пары разность $x^2 - y^2$ является нечетным числом.

Экономический факультет

- 1. Решить неравенство $\log_{\frac{4x-1}{11}}(7x-2x^2) \leq 0$.
- 2. Решить уравнение $\operatorname{tg} x + \sqrt{3 \sin x} = 0$.
- 3. Решить неравенство $\sqrt{x+8(3-\sqrt{8+x})} < \frac{x+16}{2\sqrt{8+x}-10}$.

- 4. В равнобоковой трапеции $PQRS$ ($QR \parallel PS$) известны длины сторон $QR = 1$, $PS = 4$. Точки P' , Q' , R' , S' лежат по одну сторону от плоскости трапеции, причем прямые PP' , QQ' , RR' , SS' перпендикулярны этой плоскости, $PP' = 1$, $QQ' = 7$, $RR' = 2$, $SS' = 1$. Точки K' и L' лежат на прямых $P'R'$ и $Q'S'$ соответственно. Найти длину отрезка $K'L'$, если $P'K' : K'R' = 3 : 2$, $Q'L' : L'S' = 2 : 3$.
- 5. Найти все действительные значения c , для которых все числа из области значений функции
- $$f(x) = \frac{x^2 + cx - 1}{2x^2 - 3x + 2}$$
- принадлежат интервалу $(-1; 2)$.
- 6. Вокруг треугольника MKN описана окружность радиуса r с центром в точке O . Длина стороны HM равна a . Для сторон треугольника выполнено соотношение $HK^2 - HM^2 = HM^2 - MK^2$. Найти площадь треугольника OLK , где L — точка пересечения медиан треугольника MKN .
- 7. Каждый из трех брокеров имел в начале дня акции каждого из видов А и Б общим числом 11, 21 и 29 штук соответственно. Цены на акции в течение всего дня не менялись, причем цена одной акции вида А была больше цены одной акции вида Б. К концу торгового дня брокерам удалось продать все свои акции, выручив от продажи по 4402 рубля каждый. Определить цену продажи одной акции видов А и Б.

Факультет психологии

- 1. Решить уравнение $|4x - |x - 2| + 3| = 16$.
- 2. Какое из двух чисел больше,

$$\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{2401}{36} \right) + 2 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \left(\frac{226\pi}{17} \right) ?$$
- 3. Решить неравенство
- $$\frac{\sqrt{4x+7} - 3x + 5}{16 - 3x^2 + 22x} \leq 0.$$
- 4. Решить уравнение
- $$\operatorname{tg} 8x - \operatorname{tg} 6x = \frac{1}{\sin 4x} \quad \text{при} \quad x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right].$$
- 5. В треугольнике ABC длина биссектрисы AL равна l , в $\triangle ABL$ вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке K , $BK = b$. На сторонах AB и BC в $\triangle ABC$ выбраны точки M и N соответственно так, что прямая MN проходит через центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$, причем $MB + BN = c$. Найти отношение площадей треугольников $S_{\triangle ABL} / S_{\triangle MBN}$.

- 6. Найти все целые значения параметров a и b , при которых уравнение

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b}\right) - b \cdot 2^{\sin(\pi bx)} - \left| \arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b}\right) + b \cdot 2^{\sin(\pi bx)} \right| = 2ab$$

имеет не менее 10 различных решений.

Социологический факультет

- 1. Решить неравенство $\frac{x-4}{2x} \leq \frac{1}{3}$.
- 2. Решить уравнение $\log_3(x^2 + x - 2) = \frac{3}{2} \log_{\sqrt{27}}(1 - x)$.
- 3. В университете города М 6% студентов обучались на платной основе, причем эта доля была одинакова на всех курсах. Летом 22% студентов были выпущены из стен университета, но за счет приема абитуриентов численность студентов составила $\frac{6}{5}$ от прежней. Определить, какая доля студентов будет обучаться на платной основе, если новый набор осуществлялся только на места, финансируемые из госбюджета.
- 4. В четырехугольнике $ABCD$ длина стороны AD равна 6, длина стороны CD равна $3\sqrt{3}$, косинус угла ADC равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$, синус угла BCA равен $\frac{1}{4}$. Найти сторону BC , если известно, что окружность, описанная около треугольника ABC , проходит также и через точку D .
- 5. Найти все натуральные значения параметра n , при каждом из которых задача «Найти арифметическую прогрессию, если известны ее одиннадцатый член и сумма n первых членов» не имеет решений или ее решением является бесконечное множество арифметических прогрессий.
- 6. Две кривые на плоскости $(x; y)$, заданные уравнениями

$$y = -x^2 + 3x \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{16} + y^2 = 1,$$

пересекаются в четырех точках. Доказать, что

1) существуют по крайней мере две различные параболы, каждая из которых проходит через эти четыре точки;

2) эти четыре точки лежат на одной окружности, и найти радиус этой окружности.

Институт стран Азии и Африки

- 1. Решить уравнение $\sin^2 x + \sin^2 6x = 1$.
- 2. Решить уравнение $2^{-2x^2+1} - 12 \cdot 2^{-x^2} + 5 = 0$.
- 3. Решить неравенство $\frac{3|x|-11}{x-3} > \frac{3x+11}{6-x}$.

- 4. В треугольнике ABC известны стороны: $BC = AC = 12$, $AB = 6$; AD — биссектриса. Найти радиус R окружности, описанной около треугольника ABC . Выяснить, что больше: R или 6,5.
- 5. Решить неравенство $\log_{2x-3}(\sqrt{x+2} + x - 3) \leq 1$.
- 6. При перемножении двух натуральных чисел произведение было ошибочно увеличено на 372. При делении полученного (неверного) произведения на меньший сомножитель получилось в частном 90 и в остатке 29. Найти эти числа.
- 7. При каких значениях параметра a система
- $$\begin{cases} x^4 - (a-1)\sqrt{a+3}y + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0, \\ y = \sqrt{a+3}x^2 \end{cases}$$
- имеет ровно три различных решения?

Филологический факультет

- 1. Решите неравенство
- $$\frac{x^2 + 4x + 3}{|1 + x|} \leq 0.$$
- 2. Длина стороны BC треугольника ABC равна 12 см. Около треугольника описана окружность радиуса 10 см. Найдите длины сторон AB и AC треугольника, если известно, что радиус OA окружности делит сторону BC на два равных отрезка.
- 3. Решите уравнение
- $$\frac{\log_5(-2x)}{\log_5(x+1)} = 2.$$
- 4. А, И, Б сидели на трубе. К ним стали по очереди подсаживаться другие буквы так, что порядковый номер очередной буквы в русском алфавите равнялся сумме цифр порядковых номеров двух предыдущих. Оказалось, что начиная с некоторого момента буквы начали циклически повторяться.
- а) Какая буква (из числа циклически повторяющихся) встречается наиболее часто?
- б) Может ли циклически повторяющийся набор состоять из одной буквы? Если да, укажите эту букву.
- 5. Решите неравенство
- $$\sqrt[4]{13 + 3^{(3^1 - \cos \pi)}} \leq \sqrt{5e^{-2x^2} - 1}.$$
- 6. При каких значениях параметра a уравнение
- $$\sin^2(x+6) - (a-1)\sin(x+6) \cdot \sin \pi x + (a-1)\sin^2 \pi x = 0$$
- имеет единственное решение?

1999 год

Механико-математический факультет

- 1. Решить неравенство

$$3^{(x+2)^2} + \frac{1}{27} \leq 3^{x^2-3} + 9^{2x+2}.$$

- 2. Решить уравнение

$$|\log_3(2x+5)| = \log_3(1-|x+2|) + \log_3(1+|x+2|).$$

- 3. При каких значениях φ все положительные корни уравнения

$$\sin\left(\frac{3x}{2} + \varphi\right) + \sin\left(\frac{x}{2} + \varphi\right) = \cos \frac{x}{2},$$

расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию?

- 4. В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 8$ и $CD = 5$ биссектриса угла B пересекает биссектрисы углов A и C в точках M и N соответственно, а биссектриса угла D пересекает те же две биссектрисы в точках L и K , причем точка L лежит на основании BC .

а) В каком отношении прямая MK делит сторону AB , а прямая LN — сторону AD ?

б) Найти отношение $KL : MN$, если $LM : KN = 4 : 7$.

- 5. Найти все значения a , при каждом из которых сумма длин интервалов, составляющих решение неравенства

$$\frac{x^2 + (2a^2 + 2)x - a^2 + 4a - 6}{x^2 + (a^2 + 5a - 5)x - a^2 + 4a - 6} < 0,$$

не меньше 1.

- 6. Три шара радиусов 1, 3 и 4 расположены так, что каждый из них касается двух других шаров и двух данных плоскостей. Найти расстояние между точками касания первого из этих шаров с плоскостями.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Известно, что $\operatorname{ctg} \alpha = 1$. Сравнить

$$\arccos\left(-\sqrt{-\sqrt{2}\sin\alpha - \frac{1}{4}}\right) \quad \text{и} \quad \frac{19\pi}{24}.$$

- 2. На координатной плоскости (x, y) проведена окружность радиуса 4 с центром в начале координат. Прямая, заданная уравнением $y = \sqrt{3}x - 4$, пересекает ее в точках A и B . Найти сумму длин отрезка AB и большей дуги AB .

- 3. Решить неравенство

$$|\log_{-2x-1} \sqrt{(2x+5)^6 + 3}| \leq -4 + \log_{\frac{-1}{-2x-1}} \sqrt{(2x+5)^8}.$$

- 4. В четырехугольной пирамиде $SKLMN$ с вершиной S боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 30° . Известно, что $KN = 6$, $MN = 2$, $\angle KNM = 90^\circ$, $\angle KLM = 60^\circ$. Найти высоту пирамиды, если ее основание лежит внутри четырехугольника $KLMN$.

- 5. Решить уравнение

$$6 \operatorname{tg} 13x + 2 \operatorname{ctg} 13x - \sqrt{2} \sin 12x - 4 \sin \left(6x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{20}{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}.$$

- 6. В тупоугольном треугольнике KLM угол $\angle KML = 15^\circ$, а высота, опущенная из вершины этого угла, равна $2\sqrt{2}$. Найти радиус описанной окружности, если известно, что периметр треугольника KLM равен $8\sqrt{2} + 4 + 4\sqrt{3}$.

Физический факультет

- 1. Решить уравнение

$$\sin 7x + \sin x + 1 = 2 \cos^2 \left(\frac{3x}{2} \right).$$

- 2. Решить неравенство

$$\left| 3 + \frac{1}{x+3} \right| < 4.$$

- 3. Трапеция $KLMN$ ($LM \parallel KN$) вписана в окружность, а другая окружность вписана в эту трапецию, $LM : KN = 1 : 3$, площадь трапеции равна $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Найти высоту трапеции.

- 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot 5^{x+1} - \frac{18}{3^{2-y}} = 35, \\ \frac{10}{5^{1-x}} + 2 \cdot 3^{y+1} = 36. \end{cases}$$

- 5. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{1 - \frac{6}{3-x}} = \frac{1}{3-x}.$$

- 6. Окружность с центром O касается сторон угла с вершиной M . На одной стороне угла взята точка K , а на другой стороне угла взята точка L так, что $OK = OL$, $OK < OM$, $MK \neq ML$. Известно, что $ML = a$, $OM = m$, $OK = k$. Найти MK .

- 7. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S боковое ребро SD равно b . Сфера радиуса $b/3$ касается плоскости SAD в точке D и проходит через точку C . Найти $\angle DSC$.

- 8. Для любого допустимого значения m решить неравенство

$$\log_{4m}(\log_5 x^2) > 1$$

и найти, при каком значении m множество точек x , не являющихся решениями неравенства, представляет собой промежуток, длина которого равна 10?

Химический факультет

- 1. Решить неравенство

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \leq 2.$$

- 2. Решить уравнение

$$(\cos x - \sin x + \sqrt{2})\sqrt{-x^2 - 7x - 12} = 0.$$

- 3. Решить неравенство

$$(\log_{3+x}(1-2x))(\log_{1-2x}x^2) \leq (\log_{3+x}(1-3x))(\log_{1-3x}(2-x)).$$

- 4. В треугольнике ABC угол $\angle B$ равен $\pi/3$. Через точки A и B проведена окружность радиуса 3 см, касающаяся прямой AC в точке A . Через точки B и C проведена окружность радиуса 4 см, касающаяся прямой AC в точке C . Найти длину стороны AC .

- 5. В сферу радиуса 1 см вписан параллелепипед, объем которого равен $8\sqrt{3}/9$ см³. Найти площадь полной поверхности параллелепипеда.

- 6. Найти все значения параметра a , при которых уравнение

$$\left| \frac{x(3^x - 1)}{3^x + 1} - 2a \right| = a^2 + 1$$

имеет нечетное число решений.

- 7. Последовательность чисел $a_1, a_2, \dots$ определяется следующим правилом:

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2, & \text{если число } n \text{ нечетное,} \\ 2a_n, & \text{если число } n \text{ четное,} \end{cases}$$

т. е. $a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 10, a_5 = 20, a_6 = 22$ и т. д. Найти a_{1999} .

Биологический факультет и факультет фундаментальной медицины

- 1. Решить уравнение $5 \cos 4x - 6 \cos 2x = 2$.

- 2. Решить неравенство

$$\frac{4}{|x+2|} \geq 3-x.$$

- 3. Решить уравнение

$$\log_{2-x}(x^3 - 3x^2 - \frac{13}{8}x + \frac{31}{8}) + 2 \log_{(2-x)^2}(x+3) = 1.$$

- 4. На основаниях AD и BC трапеции $ABCD$ построены квадраты $ADMN$ и $BCRS$, расположенные вне трапеции. Диагонали трапеции пересека-

ются в точке T . Найти длину отрезка RN , если $AD = 8$, $BC = 3$, а $TN = 20$.

- 5. Найти все значения y , удовлетворяющие условию $y > \frac{1}{3}$, такие, что неравенство

$$12y^3x^2 - 21y^3x - 42y^3 - 28y^2x^2 + 43y^2x + 111y^2 + 20yx^2 - 23yx - 96y - 4x^2 + x + 27 < 0$$

выполняется при всех x из интервала $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}y$.

- 6. Два велосипедиста стартуют одновременно из двух точек круговой велотрассы, первый из точки A , второй из точки B , — и едут в противоположных направлениях с постоянными скоростями. Известно, что из их первых 13 встреч на трассе после старта только третья и тринадцатая состоялись в точке A . Найти отношение скорости первого велосипедиста к скорости второго, если известно, что к моменту их пятой встречи каждый из велосипедистов проехал не менее одного круга.

Факультет почвоведения

- 1. Решить уравнение $4^x - 2^x = 56$.
- 2. Решить уравнение $\cos 2x = \sin x$.
- 3. Решить уравнение $\log_{\pi} |x^2 - 1| = \log_{\sqrt{\pi}} |x|$.
- 4. Решить неравенство $\sqrt[5]{y^5} \geq \sqrt[4]{y^4}$.
- 5. Какое количество воды надо добавить в один литр 10%-ного водного раствора спирта, чтобы получить 6%-ый раствор?
- 6. Дан треугольник ABC с основанием AB , равным $\sqrt{3}/2$, и высотой CH , опущенной на это основание и равной $\sqrt{6}/3$. Известно, что точка H лежит на AB и $AH : HB = 2 : 1$. В угол ABC треугольника ABC вписана окружность, центр которой лежит на высоте CH . Найти радиус этой окружности.
- 7. Для каждого значения параметра $b \leq 0$ решить неравенство (относительно x)

$$\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \geq b.$$

Геологический факультет

- 1. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{x+2}{x+3} \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 1)}.$$

- 2. Известно, что x_1, x_2 — корни уравнения

$$2x^2 + (1 - 3\sqrt{2})x - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 0.$$

Найти значение $A = x_1 + 3x_1x_2 + x_2$ и выяснить, какое из чисел больше: A или $-1,999$?

- 3. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости (x, y) системой неравенств

$$\begin{cases} y(x - y - \sqrt{3}) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 3. \end{cases}$$

- 4. Медиана DM треугольника DEF равна половине стороны EF . Один из углов, образованных при пересечении стороны EF биссектрисой DL , равен 55° . Найти углы треугольника DEF .

- 5. Решить уравнение

$$\left| -\cos^2 2x + 3\sqrt{-\cos 2x} + \frac{1}{4} \right| = \left| \cos^2 2x + 3\sqrt{-\cos 2x} - \frac{1}{4} \right|.$$

- 6. Дана арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots$, в которой $a_3 = 13$ и $a_8 = -7$. Определить, при каком количестве членов сумма прогрессии будет наибольшей; найти значение этой суммы.

- 7. Сфера радиуса $\frac{\sqrt{82}}{2}$ проходит через вершины A_1, D_1, C_1 и через середину ребра AB куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$). Найти объем этого куба.

- 8. Решить неравенство $\log_{\frac{x}{2}+5} \sin x \geq \log_{8x-x^2+9} \sin x$.

Географический факультет

- 1. Решить уравнение $\log_{5-2x}(x^2 - 6x + 8) = 1$.

- 2. Решить уравнение $\sqrt{2x^2 - 8x + 6} = x - 2$.

- 3. По реке из пункта A в пункт B одновременно выплыли катер и моторная лодка. Катер, достигнув пункта B , повернул обратно и, пройдя четверть пути от B к A , встретился с лодкой. В момент, когда катер достиг пункта A , лодка прибыла в пункт B . Найти отношение скорости лодки к скорости катера.

- 4. Найти все значения параметра a , при которых среди корней уравнения $\sin 2x + 4a \sin x - \cos x - 2a = 0$

найдутся два корня, разница между которыми равна $\frac{3}{2}\pi$.

- 5. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке K . Точки L и M являются соответственно серединами сторон BC и AD . Отрезок LM содержит точку K . Четырехугольник $ABCD$ таков, что в него можно вписать окружность. Найти радиус этой окружности, если $AB = 2$, $BD = 2\sqrt{5}$ и $LK : KM = \frac{1}{3}$.

- 6. В пространстве заданы три луча DA, DB и DC , имеющие общее начало D , так, что $\angle ADB = \angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$. Сфера пересекает луч DA в точках A_1 и A_2 , луч DB — в точках B_1 и B_2 , а луч DC — в точках C_1 и C_2 . Найти площадь треугольника $A_1 B_1 C_1$, если площади

треугольников DA_2B_2 , DA_2C_2 , DB_2C_2 и DA_1B_1 равны соответственно 60, 45, 75 и $\frac{45}{4}$.

Экономический факультет

► 1. Решить неравенство $\log_{|x|-2} |x-3| \leq 0$.

► 2. Решить неравенство

$$4 \cdot \sqrt{\frac{2^x - 1}{2^x}} + \sqrt{14} \leq 14 \cdot \sqrt{\frac{2^{x-2}}{2^x - 1}}.$$

► 3. Первая и вторая бригады, работая вместе, могут выполнить задание не более, чем за 9 дней. Вторая и третья бригады, работая вместе, могут выполнить то же задание не менее, чем за 18 дней. Первая и третья бригады, работая вместе, могут выполнить то же задание ровно за 12 дней. Известно, что третья бригада всегда работает с максимальной возможной для нее производительностью труда. За сколько дней может выполнить задание одна вторая бригада?

► 4. В трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) диагонали $AC = a$, $BD = \frac{7}{5}a$. Найти площадь трапеции, если $\angle CAB = 2\angle DBA$.

► 5. Решить уравнение $x + \frac{1}{6} \arccos(\cos 15x + 2 \cos 4x \sin 2x) = \frac{\pi}{12}$.

► 6. В треугольной пирамиде $SABC$ угол $\angle ACB = \alpha$, ребро $SC = d$ является диаметром сферы, пересекающей ребра SA и SB в их серединах. Найти объем пирамиды, если $\angle SAC = \angle SBC = \beta$, причем $\beta < \frac{\pi}{4}$.

► 7. Найти все значения b , при каждом из которых система

$$\begin{cases} b \sin |2z| + \log_5(x \sqrt[5]{2-5x^8}) + b^2 = 0, \\ ((y^2 - 1) \cos^2 z - y \cdot \sin 2z + 1)(1 + \sqrt{\pi + 2z} + \sqrt{\pi - 2z}) = 0 \end{cases}$$

разрешима и имеет не более двух решений; определить эти решения.

Факультет психологии

► 1. Решить неравенство

$$\frac{3x - 2}{\sqrt{5x - 2}} < 1.$$

► 2. Решить уравнение

$$x^{\log_5 9} + 7 \cdot 3^{\log_5 x} - 11 = 0.$$

► 3. Решить систему

$$\begin{cases} \cos^2 x + \sin^2 y = \frac{1}{2}, \\ \sin x \cdot \cos y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

► 4. Найти все значения параметра a , при каждом из которых множество значений функции $f(x) = \frac{4x-a}{x^2-4x-7}$ содержит полуинтервал $[-\frac{4}{3}; 1)$. Определить при каждом таком a множество значений функции $f(x)$.

- 5. Четырехугольник $KLMN$ вписан в окружность. Длины противоположных сторон KL и MN равны соответственно 3 и 5; $KM = 7$, $LN = 6$. Отрезки KM и LN пересекаются в точке P . Найти радиус окружности, описанной около треугольника KLP .
- 6. Найти все значения параметра p , при каждом из которых ровно четыре различных набора (x, y, z) натуральных чисел x, y, z удовлетворяют системе условий
- $$\begin{cases} 48y^2 + 20y - 4xy + 3x - 67 = 0, \\ p \cdot xy + p \cdot yz + p \cdot xz > xyz. \end{cases}$$

Социологический факультет

- 1. Решите уравнение $\sqrt{y-2} = 7-y$.
- 2. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, для которой сумма первых четырех членов с нечетными номерами на единицу больше суммы первых четырех членов с четными номерами и равна квадрату первого члена.
- 3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD . При этом оказалось, что $\angle BAC = \angle BDC$, а площадь круга, описанного около треугольника BDC , равна $\frac{25\pi}{4}$.
- 1) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .
 - 2) Зная, что $BC = 3$, $AC = 4$, $\angle BAD = 90^\circ$, найдите площадь четырехугольника $ABCD$.
- 4. Фирма, торгующая автомобилями, может дать три объявления в газете бесплатных объявлений, а также заказать платную рекламу по радио и телевидению.

Бесплатное объявление в газете увеличивает продажи на 50 автомобилей; каждая реклама по радио увеличивает продажи на 50% и стоит 31 тысячу рублей; каждая реклама по телевидению — на 40% и стоит 42 тысячи рублей.

Определите количество и последовательность подачи объявлений и заказов рекламы, при которых фирма получит наибольший возможный объем продаж, если на рекламу можно израсходовать не более 123 тысяч рублей.

- 5. Решите неравенство

$$|x \cdot 1| \geq \frac{4|1-x|}{4-|x|}.$$

- 6. При каких значениях параметра a неравенство

$$\log_{ax^2-a^2x+1} \sqrt{16 \arcsin^{-4}(2a-x)} \geq \left| \log_{ax^2-a^2x+1} \sqrt{16 \arcsin^{-4}(2a-x)} \right|$$

не имеет решений на отрезке $[-4; 7]$?

Институт стран Азии и Африки

- 1. Решить уравнение

$$\lg^2(2x-3)^2 + 4^{(3\log_4 \sqrt[3]{2})} \left(\frac{\log_4(3-2x)}{\log_4 10} \right) = 0.$$

- 2. Упростив выражение

$$A = 1 - y + \frac{\sqrt[3]{(y-3)\sqrt{xy} + (3-y^{-1})\sqrt{xy^{-1}}}}{\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{y^{-2}}} - y^{\frac{5}{8}} x^{-\frac{1}{8}},$$

где $x > 0$, $y > 0$ — действительные числа, выяснить, что больше: A или $\frac{5}{7}$.

- 3. Решить уравнение
- $\sin 9x = 6 \sin 5x \cos 2x - \sin x$
- .

- 4. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом
- $\frac{\pi}{8}$
- . Каждое боковое ребро равно
- $\sqrt{6}$
- и наклонено к плоскости основания под углом
- $\frac{5\pi}{13}$
- . Определить объем пирамиды.

- 5. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2 - 5} - 3}{|x + 4| - 7} \geq 1.$$

- 6. Окружности радиусов 2 и 6 с центрами соответственно в точках
- O_1
- и
- O_2
- касаются внешним образом в точке
- C
- . К окружностям проведены общая внешняя касательная и общая внутренняя касательная; эти касательные пересекаются в точке
- D
- . Найти радиус вписанной в треугольник
- $O_1 O_2 D$
- окружности.

- 7. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 - \log_2[(y\sqrt{2} + 6)^3] - 16 \geq y^4 - 3x - y^2, \\ x^2 - y^2 \leq \log_2(y\sqrt{2} + 6) + x + 1. \end{cases}$$

Филологический факультет

- 1. Расстояние в 160 км между пунктами А и Б автомобиль проехал со средней скоростью 40 км/ч. Часть пути по ровной дороге он ехал со скоростью 80 км/ч, а другую часть, по бездорожью, — со скоростью 20 км/ч. Какую часть пути между А и Б занимает ровная дорога?

- 2. Решить неравенство

$$\frac{1}{x^2 + 8x - 9} \geq \frac{1}{3x^2 - 5x + 2}.$$

- 3. В треугольнике
- ABC
- медиана
- AK
- пересекает медиану
- BD
- в т.
- L
- . Найти площадь треугольника
- ABC
- , если площадь четырехугольника
- $KCDL$
- равна 5.

- 4. Решить уравнение
- $\log_{1-2\cos z}(\cos 2z + \sin z + 2) = 0$
- .

- 5. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \cos^3(z + 4y + \pi/4) + 1/\sin(2z + 2y - \pi/4) = 0, \\ \cos(3z + \pi/4) + 1/\sin^3(4z - 2y - \pi/4) = 0. \end{cases}$$

2000 год

Механико-математический факультет

- 1. Решить неравенство

$$2\sqrt{5 \cdot 6^x - 2 \cdot 9^x - 3 \cdot 4^x} + 3^x < 2^{x+1}.$$

- 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} \log_2 xy \cdot \log_{4x} y = 2, \\ 8x - y = 1. \end{cases}$

- 3. Длина дороги, соединяющей пункты A и B , равна 2 км. По этой дороге курсируют два автобуса. Достигнув пункта A или пункта B , каждый из автобусов немедленно разворачивается и следует без остановок к другому пункту. Первый автобус движется со скоростью 51 км/ч, а второй — со скоростью 42 км/ч. Сколько раз за 8 часов автобусы

а) встретятся в пункте B ,

б) окажутся в одном месте строго между пунктами A и B ,

если известно, что первый стартует из пункта A , а второй — из пункта B .

- 4. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A . Прямая, проходящая через точку A , пересекает первую окружность в точке B , а вторую — в точке C . Касательная к первой окружности, проходящая через точку B , пересекает вторую окружность в точках D и E (D лежит между B и E). Известно, что $AB = 5$ и $AC = 4$. Найти длину отрезка CE и расстояние от точки A до центра окружности, касающейся отрезка AD и продолжений отрезков ED и EA за точки D и A соответственно.

- 5. Найти все a , при которых уравнение

$$(|a| - 1) \cos 2x + (1 - |a - 2|) \sin 2x + (1 - |2 - a|) \cos x + (1 - |a|) \sin x = 0$$

имеет нечетное число решений на интервале $(-\pi, \pi)$.

- 6. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Известно, что плоскости треугольников ASC и BSD перпендикулярны друг другу. Найти площадь грани ASD , если площади граней ASB , BSC и CSD равны соответственно 5, 6 и 7.

Физический факультет

- 1. Решить уравнение

$$\cos 5x + \cos x = \sqrt{5} \cos 2x.$$

- 2. Решить неравенство

$$\frac{2}{\sqrt{x-2}} < 1.$$

- 3. Решить уравнение

$$\frac{3^{x-1}}{2^x - 3^x} = 1 - \frac{2^x}{3^{x+1}}.$$

- 4. В параллелограмме $KLMN$ биссектриса $\angle MNK$ пересекает сторону KL в точке Q такой, что $LQ/QK = 1/3$, $\angle LNQ = \alpha$. Найти $\angle LKN$.

- 5. Решить неравенство

$$\log_2(5-x)(2-x) > \log_4(x-2)^2.$$

- 6. Сторона DC прямоугольника $ABCD$ служит высотой конуса с вершиной D , $DC = 2$. Радиус основания этого конуса в два раза длиннее отрезка BC . Шар касается плоскости прямоугольника $ABCD$ в точке A и имеет единственную общую точку с конусом. Найти радиус шара.

- 7. При каких значениях p уравнение

$$4(x - \sqrt{p \cdot 7^p})x + p + 7(7^p - 1) = 0$$

имеет корни и каковы знаки корней при различных значениях p ?

- 8. В остроугольном $\triangle KLM$ ($KL > LM$) проведены высоты KB и MA , точка O — центр описанной около $\triangle KLM$ окружности. Известно, что $\angle KLM = \alpha$, а площадь четырехугольника $OALB$ равна S . Найти радиус окружности, описанной около $\triangle KLM$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Решить неравенство

$$\sin x \cdot \sin |x| \geq -\frac{1}{2}$$

- 2. Имеется некоторое количество раствора соли в воде. После испарения из раствора одного литра воды концентрация соли возросла на 0,05, а после разведения получившегося раствора тридцатью девятью литрами воды концентрация соли стала в три раза меньше первоначальной. Найти концентрацию соли в исходном растворе, считая массу 1 литра воды равной 1 кг.

- 3. Решить неравенство

$$\log_{5-4x-x^2}(5-9x-2x^2) \leq \log_{1-x}(1-2x).$$

- 4. На боковых ребрах AA_1 , BB_1 и CC_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$) расположены точки K , L и M

соответственно. Известно, что угол между прямыми KL и AB равен $\frac{\pi}{4}$, а угол между прямыми KM и AC — $\frac{\pi}{3}$. Найти угол между плоскостью, проходящей через точки K , L и M , и плоскостью основания ABC .

- 5. Найти наибольшее значение выражения

$$4x^2 + 80x + y + 43$$

при условии, что

$$6x^2 + 32x + y + 283 \leq 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 86x + y + 202 \geq 0.$$

- 6. Вершины A и C параллелограмма $ABCD$ лежат на одной окружности, а вершины B и D — на другой, пересекающей первую, причем центры окружностей лежат в плоскости параллелограмма. Длины диагоналей параллелограмма равны 6 и 2 соответственно. Расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма до прямой, проходящей через точки пересечения окружностей, равно 2. Найти расстояние между центрами окружностей.

Химический факультет и факультет наук о материалах

- 1. Решить уравнение $|x| = 4 - x$.
- 2. Решить уравнение $\cos 5x + \sin x \sin 4x = 0$.
- 3. Две бригады трактористов пахали два участка земли (первая бригада — первый участок, вторая — второй), причём объём работ на втором участке вчетверо больше, чем на первом, а в первой бригаде на 6 трактористов меньше, чем во второй. Производительность труда всех трактористов одинакова. Бригады одновременно начали работу, и когда первая бригада закончила работу, вторая ещё работала. Какое наименьшее число трактористов могло быть в первой бригаде?
- 4. В угол вписано несколько окружностей, радиусы которых возрастают. Каждая следующая окружность касается предыдущей окружности. Найти сумму длин второй и четвёртой окружностей, если длина третьей равна 18π , а площадь круга, ограниченного первой окружностью, равна π .
- 5. Треугольники DAB , DAC , DBC , представляющие собой боковые грани треугольной пирамиды, имеют одинаковые площади. Точка A_1 лежит на ребре DA , причём $DA_1 = \frac{3}{7}DA$, точка B_1 лежит на ребре DB , причём $DB_1 = \frac{7}{9}DB$, точка C_1 лежит на ребре DC . Известно, что объём пирамиды $DA_1B_1C_1$ составляет $\frac{1}{3}$ от объёма пирамиды $DABC$. Какую часть площади боковой поверхности пирамиды $DABC$ составляет площадь боковой поверхности пирамиды $DA_1B_1C_1$?
- 6. Решить уравнение

$$(26 + 15\sqrt{3})^x - 3(7 + 4\sqrt{3})^x - 2(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 3.$$

Биологический факультет и факультет фундаментальной медицины

- 1. Решите неравенство

$$\frac{2-3x}{x+2} \leq 5.$$

- 2. Решите уравнение

$$3 \cos 2x + 4 + 11 \sin x = 0.$$

- 3. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 6$, $AC = 4$, $BC = 8$. Точка D лежит на стороне AB , а точка E — на стороне AC , причём $AD = 2$, $AE = 3$. Найдите площадь треугольника ADE .

- 4. Решите неравенство

$$\log_4(16(x-2)^2) \cdot \log_{\frac{1}{16}} \frac{(x-2)^2}{64} - \frac{5}{4} \log_{64}(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)^2 < \frac{15}{2}.$$

- 5. Внутри правильной треугольной призмы со стороной основания, равной a , лежат три шара одинакового радиуса, каждый из которых касается двух других шаров, двух боковых граней и обоих оснований призмы. Четвёртый шар касается трёх вышеупомянутых шаров и верхнего основания призмы. Найти радиус четвёртого шара.

Факультет почвоведения

- 1. Решите неравенство: $\frac{1}{3-2x} \leq 1$.

- 2. Первый, второй и четвертый члены арифметической прогрессии одновременно являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии. Найдите все значения, которые может принимать знаменатель геометрической прогрессии.

- 3. Найдите $\operatorname{tg} 2\alpha$, если известно, что $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, а $\sin 4\alpha > 0$.

- 4. Решите неравенство: $\log_x 2 < \log_{6-x} 2$.

- 5. Решите уравнение: $\sin(\pi\sqrt{8-x^2}) = \frac{1}{2}$.

- 6. Биссектрисы внутренних углов треугольника продолжены до точек пересечения с описанной около треугольника окружностью, отличных от вершин исходного треугольника. В результате попарного соединения этих точек получился новый треугольник. Известно, что углы исходного треугольника равны 30, 60 и 90 градусам, а его площадь равна 2. Найдите площадь нового треугольника.

- 7. Найдите все значения параметра a , при которых при любых значениях параметра b уравнение $|x-2| + b|2x+1| = a$ имеет хотя бы одно решение.

Геологический факультет

- ▶ 1. Решить неравенство $\log_{\sqrt{5}}(3x + 4) \leq 4$.
- ▶ 2. Вычислить $\operatorname{tg} 8x$, если $\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{4}$.
- ▶ 3. Из пункта A в пункт B выехали автомобилист и велосипедист, причем скорость автомобиля в 4 раза больше скорости велосипеда. Известно, что они ехали с постоянными скоростями, но автомобилист сделал несколько остановок. Сколько времени автомобилист затратил на все остановки, если он доехал до пункта B за 3 часа, а велосипедист за 5 часов?
- ▶ 4. Решить неравенство $16 \sin^2 x + \operatorname{ctg}^2 x \leq 7$.
- ▶ 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + 3\sqrt{x+y} = 18, \\ x^2 + y^2 = 125. \end{cases}$$

- ▶ 6. В трапецию с верхним основанием 5 см и боковой стороной 6 см можно вписать окружность и около нее можно описать другую окружность. Вычислить площадь пятиугольника, образованного радиусами вписанной окружности, перпендикулярными боковым сторонам трапеции, её нижним основанием и соответствующими отрезками боковых сторон.
- ▶ 7. Решить уравнение

$$3 - x^2 + 2x = \sqrt{1 - x^2} \cdot (2x^2 + 4x + 3).$$

- ▶ 8. В прямоугольном параллелепипеде, стороны основания которого равны a и b , а высота — a , расположены 9 шаров. Восемь из них одинакового радиуса, причем каждый касается трех граней параллелепипеда и двух соседних шаров. Девятый шар внешним образом касается всех восьми вышеуказанных шаров. Найти R — радиус девятого шара. Установить, при каких значениях величины $\frac{b}{a}$ задача имеет решение, если $R \leq \frac{a}{3}$.

Географический факультет

- ▶ 1. Решите уравнение $\sqrt{3x+3} = 2x - 3$.
- ▶ 2. Решите уравнение $|2x + 9| - |x - 6| = 15$.
- ▶ 3. Аэронавт совершил кругосветное путешествие вокруг Земли на воздушном шаре, двигаясь вдоль заданной параллели на постоянной высоте. Оказалось, что разность расстояний, пройденных верхней и нижней точками шара, равна диаметру шара. На какой широте совершалось это путешествие?
- ▶ 4. Найдите наибольшее значение выражения

$$\sin\left(\frac{2}{3} \log_{\frac{1}{2}}\left(2 - \sqrt{1 + 3x - x^2}\right)\right)$$

при условии $\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \geq \frac{\pi}{6}$.

- 5. Из пункта A в пункт B вниз по течению реки отправляется катер, скорость которого в стоячей воде равна v . В пункте B , где в реку впадает приток, катер поворачивает к пункту B , расположенному вверх по течению притока. Расстояния от A до B и от B до B равны. Скорости течения притока и реки равны u_1 и u_2 соответственно. На координатной плоскости $(u_1; u_2)$ укажите область, для всех точек которой время движения по маршруту $A \rightarrow B \rightarrow B$ меньше, чем время, которое затратил бы катер на прохождение такого же расстояния в стоячей воде.
- 6. Даны функции $f(x, y) = |y| + 3|x| - 3$ и $g(x, y, a) = y^2 + (x - a) \cdot (x + a)$.

а) При каком наименьшем положительном значении параметра a система уравнений

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y, a) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения?

б) При этом значении параметра a найдите площадь фигуры, координаты (x, y) всех точек которой удовлетворяют неравенству

$$\frac{f(x, y)}{g(x, y, a)} \leq 0.$$

Экономический факультет (отделение экономики)

- 1. Решить уравнение $3\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 4 - x = (\sqrt{-x^2 + x + 2})^2$.
- 2. Интервалы движения морских катеров по трем маршрутам, начинающимся на общей пристани, составляют 30, 36 и 45 минут соответственно. Сколько раз с 7⁴⁰ до 17³⁵ того же дня на этой пристани одновременно встречаются катера всех трех маршрутов, если одна из таких встреч происходит в 11¹⁵?
- 3. Решить неравенство

$$\frac{\log_7 12}{\log_7(x^2 - 9)} \geq \frac{\log_5(x^2 + 8x + 12)}{\log_5(x^2 - 9)}.$$

- 4. Точка Q расположена на стороне MN треугольника LMN так, что $NQ : QM = 1 : 2$. При повороте этого треугольника на некоторый угол вокруг точки Q вершина L переходит в вершину N , а вершина M — в точку P , лежащую на продолжении стороны LM за точку L . Найти углы треугольника LMN .
- 5. Найти все значения x , при которых числа

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^{3\cos\left(5x + \frac{3\pi}{4}\right)}, \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)}, \quad 5^{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

в указанном порядке составляют возрастающую геометрическую прогрессию.

- 6. Центр шара радиуса 1 совпадает с основанием высоты правильной четырехугольной пирамиды. Найти площадь той части поверхности пирамиды, которая лежит вне этого шара, если высота пирамиды равна $2\sqrt{2}$, а плоские углы при вершине пирамиды равны $\arccos(\frac{4}{5})$.

- 7. Про функцию $f(x)$ известно, что она определена на множестве $[\frac{1}{6}; 6]$ и удовлетворяет на этом множестве системе

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos^2 f(x) - \frac{1}{2}} - 12 \cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{10}{x}, \\ 0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Решить неравенство $f(x) \leq \frac{\pi}{8}$.

Экономический факультет (отделение менеджмента)

- 1. Решить уравнение $3|x+1| + x^2 + 4x - 3 = 0$.
- 2. Интервалы движения маршрутных такси по трем маршрутам, начинающимся у станции метро, составляют 10, 12 и 15 минут соответственно. Сколько раз с 10^{40} до 14^{20} того же дня у этой станции метро одновременно встречаются такси всех трех маршрутов, если одна из таких встреч происходит в 13^{05} ?

- 3. Решить уравнение

$$\frac{\log_3(x^2 + 2x)}{\log_3(x^2 - 4x - 4)} = \frac{\log_5 8}{\log_5(x^2 - 4x - 4)}.$$

- 4. При повороте треугольника EFG на угол $\arccos(\frac{1}{3})$ вокруг точки O , лежащей на стороне EG , вершина F переходит в вершину E , а вершина G — в точку H , лежащую на стороне FG . Найти отношение, в котором точка O делит сторону EG .
- 5. Найти все значения x , удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4}) < 0$, при которых числа

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^{3\cos(5x + \frac{3\pi}{4})}, \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{\cos(3x + \frac{\pi}{4})}, \quad 5^{\cos(x - \frac{\pi}{4})}$$

в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию.

- 6. Центр шара радиуса 1 совпадает с основанием высоты правильной треугольной пирамиды. Найти площадь той части поверхности пирамиды, которая лежит внутри шара, если высота пирамиды равна $2\sqrt{2}$, а сторона основания равна $2\sqrt{3}$.

Факультет психологии

- 1. Решить уравнение $4x \sin 3x = 3x + |x|$.

- ▶ 2. Рассматриваются геометрические прогрессии, у каждой из которых первый член равен десяти, сумма второго и третьего членов — целое число, кратное четырем и не превосходящее одной тысячи, а знаменатель больше единицы. Указать знаменатели всех таких прогрессий.
- ▶ 3. Два одинаковых поля требуется вспахать тремя тракторами. При работе в одиночку первый трактор вспахает одно поле втрое быстрее, чем второй, а третьему трактору на эту же работу потребуется времени на два часа больше, чем первому. Работая вместе, все три трактора могут вспахать одно поле за семь часов двенадцать минут. Найти наименьшее время, за которое можно вспахать оба поля при условии, что все тракторы начинают работу одновременно, а для переезда с одного поля на другое любому трактору требуется сорок минут.

- ▶ 4. Решить неравенство

$$2 + \log_{\sqrt{x^2-2x-3}} \frac{x+4}{x+1} \geq \log_{(x^2-2x-3)} (x^2 - 2x - 2)^2.$$

- ▶ 5. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник со сторонами $AB = AC = 5$ и $BC = 6$. Ребро SA перпендикулярно основанию пирамиды. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды, если известно, что отношение радиуса вписанной в пирамиду сферы к ребру SA равно $\frac{2}{7}$.

Социологический факультет

- ▶ 1. Решить уравнение $|x^2 - 3x| = 2x - 4$.
- ▶ 2. В городе N в течение 2 лет наблюдался рост числа жителей. Во втором году процент роста числа жителей города N увеличился на 1 по сравнению с процентом роста числа жителей в первом году. Найти процент роста числа жителей в первом году, если известно, что он на 5,2 меньше, чем процент роста населения за два года.

- ▶ 3. Решить неравенство

$$\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+2} > \frac{1}{2x+3}.$$

- ▶ 4. Решить уравнение $\sqrt{11 - 8 \cos^4 x - 4 \sin x \cos x} = 3 \sin x + \cos x$.
- ▶ 5. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность радиуса 2. Угол $\angle DAB$ прямой. Сторона AB равна 5, сторона BC равна 6. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.
- ▶ 6. Найти все значения параметра a , при каждом из которых отношение решений квадратного уравнения

$$(a^2 + 1)x^2 + 4x + \frac{1}{a+1} = 0$$

является целым числом. Кратные корни учитываются дважды.

Институт стран Азии и Африки

- 1. Решить неравенство $|x + 2| \geq \frac{1}{x-1}$.
- 2. Тупой угол со сторонами длины 3 и 6 вписан в окружность радиуса $\sqrt{21}$. Определить величину дуги, на которую он опирается.
- 3. Решить уравнение

$$5 \sin x = 9 \cos \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + 2.$$
- 4. Решить неравенство

$$(5 - 2x)^{x^2-4} - \cos^2 5^\circ < (5 - 2x)^{\frac{1}{\log_{\sin 5^\circ} \sqrt{5-2x}}}.$$
- 5. Найти все значения параметра a , при которых неравенство $|x^2 + 4x - a| > 6$ не имеет решений на отрезке $[-3, 0]$.
- 6. Определить сумму всех таких натуральных чисел n , для которых числа 3920 и 4320 делятся без остатка на n и $n + 7$ соответственно.
- 7. В треугольной пирамиде $ABCD$ угол между гранями ABC и ACD равен $\pi/3$, плоский угол BAC равен $\arccos(4/5)$, а ребра AC и AD перпендикулярны. Найти длину ребра AD , если $AB = 5$, $BD = \sqrt{29}$.

Филологический факультет

- 1. Имеется 40 литров 0,5% раствора и 50 литров 2% раствора уксусной кислоты. Сколько нужно взять первого и сколько второго раствора, чтобы получить 30 литров 1,5% раствора уксусной кислоты?
- 2. Через центр окружности, вписанной в треугольник ABC , провели прямую MN параллельно основанию AB (M лежит на BC , N лежит на AC). Найти периметр четырехугольника $ABMN$, если известно, что $AB = 5$, $MN = 3$.
- 3. Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{2 - \log_2 x} \leq 2.$$
- 4. Решить систему

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$$
- 5. Найти все значения a , при каждом из которых уравнения

$$(2a - 1)x^2 + 6ax + 1 = 0$$
 и $ax^2 - x + 1 = 0$ имеют общий корень.

- 6. Расшифровать шифровку

$$\begin{pmatrix} * & + & * & = & Л \\ - & & \times & & .. \\ * & + & * & = & О \\ | & & | & & || \\ Д & : & У & = & Б \end{pmatrix}$$

Про шифровку известно, что в ней 1) буквы и звездочки означают цифры; 2) разные буквы означают разные цифры; 3) звездочки могут означать любые цифры.

2001 год

Механико-математический факультет

- 1. Решить неравенство

$$x \geq \log_2(101 \cdot 10^x - 10^{2+2x}) - \log_5(101 \cdot 2^x - 5^{2+x} \cdot 2^{2+2x}).$$

- 2. Имеет ли уравнение

$$12 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = |4 - 5 \cos x|$$

хотя бы одну пару корней, расстояние между которыми не превосходит $\pi/2$?

- 3. Через вершины A, B, C параллелограмма $ABCD$ со сторонами $AB = 3$ и $BC = 5$ проведена окружность, пересекающая прямую BD в точке E , причем $BE = 9$. Найти диагональ BD .
- 4. Найти все трехзначные натуральные числа, каждое из которых больше суммы квадратов своих цифр на 517.
- 5. Найти все числа, которые не могут быть корнями уравнения

$$4\sqrt{2x^4 + x^3} = a\sqrt[4]{4 - a^4}(x + 4x^2 - 8)$$

ни при каком значении параметра a .

- 6. Основание $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCD A' B' C' D'$ повернули в плоскости ABC на угол 30° вокруг точки пересечения диагоналей AC и BD (вершина A повернулась в направлении вершины D), а боковые грани заменили гранями $AA' B$, $A' B' B$, $BB' C$, $B' C' C$, $CC' D$, $C' D' D$, $DD' A$ и $D' A' A$. Найти все значения, которые могут принимать периметр и площадь сечения полученного многогранника плоскостью, параллельной плоскости ABC , если периметр прямоугольника $ABCD$ равен 26, а его площадь равна 42.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot 5^{1-y} = \log_3(x^{-2}), \\ 5^y + \log_3 x = 4. \end{cases}$$

- 2. Сумма первых четырех членов арифметической прогрессии равна 56. Все члены этой прогрессии — натуральные числа. Двенадцатый член больше 67, но меньше 74. Найдите двадцатый член этой прогрессии.

- 3. Среди всех решений системы

$$\begin{cases} y + 3x \leq -3, \\ x^2 + y^2 + 4x + 2y \leq 11 \end{cases}$$

найдите такое, при котором выражение $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25$ принимает минимальное значение.

- 4. Решить уравнение

$$\cos(\pi(x + 7\sqrt{x})) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}(4x + \sqrt{x})\right) = 1.$$

- 5. Трапеция с основанием
- $\sqrt{8}$
- и высотой
- $\sqrt{3} + \sqrt{2}$
- вписана в окружность радиуса
- $\sqrt{5}$
- . Каждый из четырех отсекаемых сторонами трапеции сегментов отражен внутрь трапеции симметрично относительно отсекающей его стороны. Найдите площадь фигуры, состоящей из тех точек трапеции, которые не принадлежат ни одному из отраженных внутрь нее сегментов.

- 6. Функция
- $f(x)$
- определена, возрастает и отрицательна на всей числовой прямой. Решить неравенство

$$\frac{2 \cdot f(x^2 - 2x - 112) + |f(x^2 - 2x - 112) - 3 \cdot f(-2x\sqrt{32 - 2x})|}{(3 \cdot f(-2x\sqrt{32 - 2x} - 112) - 2 \cdot f(-2x\sqrt{32 - 2x}))^7} > 0.$$

Факультет вычислительной математики и кибернетики
(отделение прикладной информатики)

- 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 \sqrt{y} = -3^{1-x}, \\ 3^x + \log_2 y = 1. \end{cases}$$

- 2. Сумма первых девяти членов арифметической прогрессии больше 119, но меньше 133. Все члены этой прогрессии — натуральные числа. Третий член равен 10. Найдите сумму первых ста членов этой прогрессии.

- 3. При всех значениях параметра
- a
- решить неравенство

$$|2x + a| \leq x + 2.$$

- 4. Среди всех решений системы

$$\begin{cases} 3y + 2x \geq 2, \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y \leq 4 \end{cases}$$

найдите такое, при котором выражение $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13$ принимает минимальное значение.

- 5. Решить уравнение

$$\cos(\pi(x + 3\sqrt{x})) \cdot \cos(\pi(2x - \sqrt{x})) = -1.$$

- 6. Пусть $[x]$ означает целую часть числа x , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x . Найдите все корни уравнения

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} \cdot x^6 - [x].$$

- 7. Вокруг трапеции с основаниями $\sqrt{8}$ и $\sqrt{28}$ описана окружность радиуса 3 с центром, находящимся внутри трапеции. Каждый из четырех отсекаемых сторонами трапеции сегментов отражен внутрь трапеции симметрично относительно отсекающей его стороны. Найдите площадь фигуры, состоящей из тех точек трапеции, которые не принадлежат ни одному из отраженных внутрь нее сегментов.

Физический факультет

- 1. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}(x+1) \cdot \operatorname{ctg}(2x+3) = 1.$$

- 2. Решить неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{3-x}} > \frac{1}{x-2}.$$

- 3. Решить уравнение

$$4^{3x^2+x} - 8 = 2 \cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}.$$

- 4. В трапеции $KLMN$ $LM \parallel KN$, $\angle KLM = \frac{\pi}{2}$, $LM = l$, $KM = k$, $MN = a$. Окружность проходит через точки M и N и касается прямой KL в точке A . Найти площадь $\triangle AMN$.

- 5. Решить неравенство

$$\log_2 \left(\log_3 \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right) < \log_{\frac{1}{8}} \left(\log_{\frac{1}{9}} \left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} \right) \right).$$

- 6. В пирамиде $SABC$ $AB = 7$, $BC = 8$, $CA = 9$. Высоты боковых граней, проведенные из вершины S , являются касательными к сфере, вписанной в пирамиду. Радиус этой сферы равен $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Найти объем пирамиды.

- 7. Для каждого значения a найти все решения уравнения

$$\cos 2x + 2 \sin^2(x+a) + 2 - \sin a = 0,$$

принадлежащие промежутку $\pi \leq x \leq 2\pi$.

- 8. В треугольнике ABC $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$. Прямая, параллельная стороне AC , пересекает стороны AB и BC соответственно в точках M и N . На

отрезках AN и CM как на диаметрах построены окружности. Их общая хорда пересекает отрезок MN в точке D , $MD : DN = \sqrt{3} : 1$. Найти $\angle BCA$.

Химический факультет и высший колледж наук о материалах

- 1. Решить неравенство

$$\frac{1}{|x-1|} > \frac{1}{|x+1|}.$$

- 2. В равнобедренном треугольнике с основанием AC проведена биссектриса угла C , которая пересекает боковую сторону AB в точке D . Точка E лежит на основании AC так, что $DE \perp DC$. Найти длину AD , если $CE = 2$.

- 3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x(\operatorname{tg} 2x)(\operatorname{tg} 3x) = \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x.$$

- 4. Решить уравнение

$$\sqrt{4x-x^2} + \sqrt{4x-x^2-3} = 3 + \sqrt{2x-x^2}.$$

- 5. Решить уравнение

$$|x-1| + |x+1| + |x-2| + |x+2| + \dots + |x-100| + |x+100| = 200x.$$

- 6. Найти все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^3 - (a+3)x^2 + (3a+2)x - 2a \geq 0, \\ x^3 - (a+3)x^2 + 3ax \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

- 7. Функция $f(x)$ для всех x удовлетворяет уравнению

$$f(x+1) = f(x) + 2x + 1.$$

Найти $f(2001)$, если $f(0) = 0$.

Биологический факультет и факультет фундаментальной медицины

- 1. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2+6x-55}}{x-5} \geq 0.$$

- 2. Решить уравнение

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos x = -\frac{1}{2}.$$

- 3. Решить неравенство

$$\frac{\log_3 x - 7}{\log_x 3 - 3} \leq 2.$$

- 4. По каждой из двух дорожек, имеющих форму окружностей одного радиуса, движется по одному мотоциклу. Они одновременно начали движение и едут с разными постоянными скоростями. Каждый мотоциклист проезжает дорожку за целое число минут. Известно, что не ранее, чем через 31 минуту и не позднее, чем через 43 минуты после начала движения произошли следующие два события: первый мотоциклист проехал свою окружность 11 раз, а второй проехал свою окружность 4 раза, — и разрыв во времени между этими событиями составил не менее 4 минут. Найти отношение скоростей мотоциклистов.
- 5. В треугольник MNK со сторонами $MN = 6$, $NK = 7$ и углом $\frac{\pi}{3}$ при вершине N вписан квадрат, две вершины которого лежат на стороне MN , одна на стороне NK и одна на стороне MK . Через середину стороны MN и центр квадрата проведена прямая, которая пересекается с высотой KR треугольника MNK в точке O . Найти длину отрезка OK .
- 6. Найти все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений
- $$\begin{cases} \cos x = \sin(\sqrt{4 - 7a^2} \cdot x), \\ \sin x = (3a - \frac{1}{2}) \cdot \cos(\sqrt{4 - 7a^2} \cdot x) \end{cases}$$
- имеет ровно одно решение на отрезке $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$.

Факультет почвоведения

- 1. Решить уравнение $2 + \cos 2x = 4 \cos^2 x$.
- 2. Решить уравнение $\sqrt{5 - x^2} = 1 - x$.
- 3. Решить неравенство $\log_{x-2} x \leq \log_{x-2} 4$.
- 4. В треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны. Основание AC равно 2, а угол при основании равен 30° . Из вершины A к боковой стороне BC проведены биссектриса AE и медиана AD . Найти площадь треугольника ADE .
- 5. Решить неравенство $2 \log_{\pi}(\sin x) \cdot \log_{\pi}(\sin 2x) - \log_{\pi}^2(\sin 2x) \leq \log_{\pi}^2(\sin x)$.
- 6. Дано задание: на прямоугольном участке земли размером 1 м на 4 м посадить три дерева, одно из которых должно быть в углу участка. Расстояние между любыми двумя деревьями не должно быть меньше 2,5 м. Можно ли выполнить это задание? Ответ обосновать.

Геологический факультет

- 1. Решить неравенство

$$\frac{\frac{1}{x-1} - 1}{1 - \frac{1}{x-7}} \geq 0.$$

- 2. Найдите неотрицательные решения уравнения

$$1 + \sin 7x = \left(\cos \frac{3x}{2} - \sin \frac{3x}{2} \right)^2.$$

- 3. Решить уравнение

$$\left(\frac{5}{7} \right)^{x-2} \cdot \left(\frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{x-1}} = \frac{125}{343}.$$

- 4. Прямая, проходящая через вершину основания равнобедренного треугольника, делит его площадь пополам, а периметр треугольника делит на части 5 м и 7 м. Найдите площадь треугольника и укажите, где лежит центр описанной окружности: внутри или вне треугольника?

- 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy}{2} + \frac{5}{2x+y-xy} = 5, \\ 2x + y + \frac{10}{xy} = 4 + xy. \end{cases}$$

- 6. Пункты А и В расположены на двух различных дорогах, представляющих собой две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в пункте С. Два мотоциклиста одновременно начинают движение: первый из пункта А по направлению к С, а второй из В по направлению к С. Через какое время после начала движения расстояние между мотоциклистами будет наименьшим и каким, если скорость первого мотоциклиста равна 44 км/час, второго — 33 км/час, а каждое из расстояний от пункта А до пункта С и от пункта В до пункта С равно 275 км?

- 7. Сфера с диаметром
- $AD = \sqrt{3}$
- касается плоскости треугольника
- ABC
- в точке А. Отрезки
- BD
- и
- CD
- пересекают сферу в точках
- M
- и
- N
- соответственно. Найдите длину отрезка
- MN
- , если
- $AB = 3$
- ,
- $AC = 3\sqrt{5}$
- , а
- $\angle BDC = \frac{\pi}{3}$
- .

- 8. При каких значениях параметра
- $a \geq 1$
- уравнение

$$\sin \left(\frac{4}{13}x \right) \cdot \operatorname{tg} x = 0$$

имеет ровно шесть различных корней на отрезке $[2a\pi; (a^2 + 1)\pi]$? Укажите эти корни.

Географический факультет

- 1. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{31}-\sqrt{21}}(x^2 - 9) \geq 0.$$

- 2. Решить уравнение

$$|\cos x| - \sqrt{3} \sin\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) = 1.$$

- 3. Числа a , b , c в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, а числа $a - c$, $c - b$, $2a$ в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Какое минимальное значение может принимать число $2a^2 - 4b^2 - c^2 + 4bc + 6a$?
- 4. Стороны ромба $EFGH$ являются гипотенузами равнобедренных прямоугольных треугольников EAF , FDG , GCH , HBE , причем все эти треугольники имеют общие внутренние точки с ромбом $EFGH$. Сумма площадей четырехугольника $ABCD$ и ромба $EFGH$ равна 12. Найти GH .
- 5. Решить уравнение

$$4 \arcsin(2^x - 7) - \arccos(5^x - 124) = \frac{6\pi}{x}.$$

- 6. При каких целых значениях параметра k система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y \leq k^2 + 10k + 20, \\ 5x^2 + 5y^2 - 2kx + 4ky \leq 5 - k^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Филологический факультет

- 1. Решить уравнение

$$3 \cos 2x + 4 \sin x = 1.$$

- 2. Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{15}}(2x^2 - 1)} > \frac{1}{\log_{\frac{1}{4}} x} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} x}.$$

- 3. В трапеции $ABCD$ стороны AB , CD параллельны и $CD = 2AB$. На сторонах AD и BC выбраны точки P и Q так, что $DP : PA = 2$, $BQ : QC = 3 : 4$. Найти отношение площадей четырехугольников $ABQP$ и $CDPQ$.
- 4. Писатель-западник (З) и писатель-славянофил (С) опубликовали по одной книге. З употребляет букву «ф» в среднем на страницу текста на 75% чаще, чем С. Тираж книги писателя С на 5% больше, чем тираж книги писателя З. Количество страниц в книге у З на 10% меньше, чем количество страниц в книге у С. На сколько процентов в опубликованных текстах З букв «ф» больше или меньше, чем в текстах С?

- 5. При каких значениях параметра a на плоскости (x, y) существует круг, содержащий все точки, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} 2y - x \leq 1, \\ y + 2x \leq 2, \\ y + ax \geq -1. \end{cases}$$

Экономический факультет (отделение экономики)

- 1. Решить неравенство

$$|x^2 - 8x + 15| \leq |15 - x^2|.$$

- 2. Брокерская фирма приобрела два пакета акций, а затем их продала на общую сумму 7 миллионов 680 тысяч рублей, получив при этом 28% прибыли. За какую сумму фирма приобрела каждый из пакетов акций, если при продаже первого пакета прибыль составила 40%, а при продаже второго — 20%?

- 3. На координатной плоскости заданы точки $A(0; 2)$, $B(1; 7)$, $C(10; 7)$ и $D(7; 1)$. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, где E — точка пересечения прямых AC и BD .

- 4. Решить неравенство

$$\log_2(2^x - 3) \cdot \log_{\sqrt{2}}(4^{x+2} - 12 \cdot 2^{x+3} + 144) < 32.$$

- 5. Решить уравнение

$$\sqrt{3} \cos \left(\pi \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{6}{x} - x - 4} \right) + 3 \sin \left(\pi x \cdot \sqrt{\frac{6}{x^2} - \frac{4}{x} - 1} \right) = \sqrt{12}.$$

- 6. Центры двенадцати шаров равных радиусов совпадают с серединами ребер правильной шестиугольной пирамиды. Найдите величину двугранного угла при ребре основания пирамиды, если известно, что шар, вписанный в пирамиду, касается всех двенадцати данных шаров.

- 7. Найдите наибольшие целочисленные значения u и v , для которых уравнение

$$364a^2u - 55v = -20020a^4$$

выполняется ровно при четырех различных значениях a , два из которых относятся как 3 : 5.

Экономический факультет (отделение менеджмента)

- 1. Решить уравнение $\cos x + \cos 3x = \sqrt{3} \cos 2x$.

- 2. Решить уравнение $|x^2 - 8x + 15| = |15 - x^2|$.

- 3. Антикварный магазин приобрел два предмета, а затем продал их на общую сумму 39900 рублей, при этом прибыль составила 40%. За сколько

магазин купил каждый предмет, если при продаже первого предмета прибыль составила 30%, а при продаже второго — 55%?

- 4. На координатной плоскости заданы точки $A(1; 9)$, $C(5; 8)$, $D(8; 2)$ и $E(2; 2)$. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, где B — точка пересечения прямых EC и AD .

- 5. Решить неравенство

$$\log_3(3^x - 1) \cdot \log_9(9^{x+2} - 6 \cdot 3^{x+3} + 81) < 3.$$

- 6. Решить уравнение

$$\sqrt{2} \sin \left(\pi \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{5}{x} - x + 6} \right) + \sqrt{6} \cos \left(\pi x \cdot \sqrt{\frac{5}{x^2} + \frac{6}{x} - 1} \right) = \sqrt{8}.$$

Факультет психологии

- 1. Решить уравнение

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{8-x} = \sqrt{15}.$$

- 2. Решить неравенство

$$\log_2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{3x+4}{4x-8} \leq 0.$$

- 3. Решить уравнение

$$3 \sin^2 x - 3 \cos x - 6 \sin x + 2 \sin 2x + 3 = 0.$$

- 4. В трапеции $BCDE$ основание $BE = 13$, основание $CD = 3$, $CE = 10$. На описанной около $BCDE$ окружности взята отличная от E точка A так, что $CA = 10$. Найти длину отрезка BA и площадь пятиугольника $ABCDE$.

- 5. При каждом значении параметра a решить неравенство

$$ax^4 + x^3 + (2a + 3a^3)x^2 + 2x + 6a^3 > 0.$$

Социологический факультет

- 1. Решить неравенство

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{|x|} \geq 2.$$

- 2. Решить уравнение

$$\log_{\sin x}(3 \sin x - \cos 2x) = 0.$$

- 3. В городе N за последний год численность населения уменьшилась на 4%, а число безработных увеличилось на 5%. Сколько процентов от общего числа жителей составляют безработные, если год назад их было 8%?

- 4. Диагональ AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ является диаметром описанной около него окружности. Найти отношение S_{ABC} и S_{ACD} , если известно, что диагональ BD делит AC в отношении $2 : 1$ (считая от точки A), а $\angle BAC = 30^\circ$.

- 5. Найти все значения параметра a , при каждом из которых расстояние между корнями уравнения

$$ax^2 + (2a + 2)x + (a + 3) = 0$$

больше 1.

- 6. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{\frac{2+x}{x}} - \sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}} = 1.$$

Институт стран Азии и Африки

- 1. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{2x^2 - 5x - 3}}{6 + 3\sqrt{3}x - 2x^2} \geq 0.$$

- 2. Найдите все решения уравнения

$$5 \sin^2 2x + 8 \cos^3 x = 8 \cos x,$$

удовлетворяющие условиям $\frac{3}{2}\pi \leq x \leq 2\pi$.

- 3. Из пункта А в пункт Б, расстояние между которыми равно 10 км, отправились в разное время пешеход, всадник и велосипедист. Известно, что их скорости постоянны и образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Первым из А вышел пешеход, которого в середине маршрута обогнал велосипедист, выехавший из А на 50 минут позже пешехода. В пункт Б пешеход прибыл одновременно с всадником, выехавшим из А на 1 час 15 минут позже пешехода. Определите скорости участников маршрута.

- 4. Решить неравенство

$$(1 + \log_3 x) \cdot \sqrt{\log_{3x} \sqrt[3]{\frac{x}{3}}} \leq 2.$$

- 5. В треугольнике ABC даны длины сторон $AB = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{5}$ и $AC = 3$. Сравните величину угла BOC и $112,5^\circ$, если O — центр вписанной в треугольник ABC окружности.

- 6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a(x+2) + y = 3a, \\ a + 2x^3 = y^3 + (a+2)x^3 \end{cases}$$

имеет не более двух решений.

- 7. Решить уравнение

$$\frac{3 \cos x + 2 \sin x}{\cos x} = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x} \cdot \sqrt{3 + 2x - 2y + 2xy - x^2 - y^2}.$$

Факультет государственного управления

- 1. Решить уравнение $\sin x + \sin 3x = \sqrt{3} \sin 2x$.
- 2. Решить уравнение $|x^2 - 13x + 36| = |36 - x^2|$.
- 3. В магазине одежды проводилась распродажа. Костюмы продавались со скидкой 20%, плащи — со скидкой 40%. Покупатель купил костюм и плащ за 9180 рублей в сумме, заплатив на 32% меньше их суммарной первоначальной цены. Найдите первоначальные цены костюма и плаща.
- 4. На координатной плоскости заданы точки $A(9; 1)$, $B(2; 0)$, $D(1; 5)$ и $E(9; 7)$. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, где C — точка пересечения прямых AD и BE .
- 5. Решить неравенство

$$\log_4(4^x - 1) \cdot \log_{16}(16^{x+1} - 8 \cdot 4^{x+1} + 16) > 12.$$

- 6. Решить уравнение

$$\arccos\left(\frac{1}{2} + \cos\left(\pi \cdot \frac{-x^2 + 2x + 11}{x^2 + 4x + 7}\right)\right) - \frac{2\pi}{3} = 0.$$

2002 год

Механико-математический факультет

- 1. Решить неравенство

$$\log_{2/3} \frac{x}{x+1} + \log_{1/2} \frac{x+1}{3x} \geq 2.$$

- 2. Три сферы, радиусы которых соответственно равны $\sqrt{6}$, 1 и 1, попарно касаются друг друга. Через прямую, содержащую центры A и B второй и третьей сфер, проведена плоскость γ так, что центр O первой сферы удален от этой плоскости на расстояние 1. Найти угол между проекциями прямых OA и OB на плоскость γ и сравнить его с $\arccos(4/5)$.
- 3. Из пункта A в пункт C выехал с постоянной скоростью велосипедист. За два километра до промежуточного пункта B он решил, что необходимо ехать быстрее, и увеличив скорость в пункте B , продолжил движение с постоянной скоростью вплоть до пункта C . Приехав в C , велосипедист обнаружил, что время движения с каждой из скоростей было прямо пропорционально соответствующей скорости и что на первые 18 км пути он затратил времени в полтора раза больше, чем на последние 18 км. Найти расстояние между пунктами A и B , если известно, что расстояние между A и C равно 75 км.

- 4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Точка X лежит на его стороне AD , причем $BX \parallel CD$ и $CX \parallel BA$. Найти BC , если $AX = 3/2$ и $DX = 6$.

- 5. Найти все значения параметра a , при каждом из которых сумма арктангенсов корней уравнения

$$x^2 + (1 - 2a)x + a - 4 = 0$$

больше, чем $\pi/4$

- 6. Найти минимальное значение выражения $(x + y - z)^2$ при условии, что числа x , y и z удовлетворяют одновременно каждому из неравенств $1 \leq (x + y)^2 \leq 4/3$, $8 \leq (y + z)^2 \leq 9$ и $10 \leq (z + x)^2 \leq 11$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. При каких значениях параметра b уравнение

$$b^4x + b^2 + (2 + \sqrt{2})b + 2\sqrt{2} = b^2(b + \sqrt{2}) + 4x$$

имеет бесконечно много корней?

- 2. Решите неравенство

$$2 \cos(\arcsin x) - \sin\left(\frac{1}{2} \arccos x\right) \leq 0.$$

- 3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AD = 6$, $AB = 3$ и $AA_1 = 2$. Найдите угол между прямой AC_1 и прямой, проходящей через середины ребер AA_1 и BC_1 .

- 4. Из пункта A в пункт B в 8 часов утра вышел пешеход. Спустя два часа из пункта A вслед за пешеходом по той же дороге выехали велосипедист и мотоциклист. Известно, что скорость мотоциклиста в три раза больше скорости велосипедиста. Не позднее чем через 15 минут после своего выезда из пункта A мотоциклист обогнал пешехода и продолжил путь в пункт B . Велосипедист обогнал пешехода спустя не менее 45 минут после обгона пешехода мотоциклистом. Пешеход прибыл в пункт B в 14 часов того же дня. Найдите время прибытия мотоциклиста в пункт B .

- 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{13 \cos x + 98 \sin y} - \sqrt{13 \cos x + 28 \sin y} = 4, \\ 2\sqrt{13 \cos x + 28 \sin y} - \sqrt{70 \sin y + 8} = 2. \end{cases}$$

- 6. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке D . Окружность радиуса 35, центр которой лежит на прямой BC , проходит через точки A и D . Известно, что $AB^2 - AC^2 = 216$, а площадь треугольника ABC равна $90\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

Физический факультет

- 1. Решите уравнение

$$\cos 5x - \cos 15x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \operatorname{ctg} 5x.$$

- 2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2-x}}{3-2x} < 1.$$

- 3. Решите неравенство

$$15 \cdot \frac{4^{x-2}}{4^x - 3^x} > 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^x.$$

- 4. Около окружности радиуса 3 описана равнобедренная трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$), площадь которой равна 48. Окружность касается сторон AB и CD в точках K и L . Найдите KL .

- 5. Три числа, сумма которых равна 28, образуют геометрическую прогрессию. Если к первому числу прибавить 3, ко второму числу прибавить 1, а от третьего числа отнять 5, то полученные числа образуют арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

- 6. В пирамиде $SBCD$ каждое ребро равно 3. На ребре SB взята точка A так, что $SA : AB = 1 : 2$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $SACD$.

- 7. Для каждого значения a решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 6x - a^2 - 5a + 12) < -1$$

и найдите, при каких значениях a множество точек x , не являющихся решениями этого неравенства, представляет собой отрезок числовой оси, длина которого меньше $2\sqrt{3}$.

- 8. В треугольнике KLM отношение радиусов описанной и вписанной окружностей равно 3. Вписанная окружность касается сторон $\triangle KLM$ в точках A , B и C . Найдите отношение площади $\triangle KLM$ к площади $\triangle ABC$.

Химический факультет и факультет наук о материалах

- 1. Решить уравнение

$$\frac{1}{9^x} - 10 \cdot 3^{1-x} + 81 = 0.$$

- 2. Решить систему

$$\begin{cases} |2y - 4| + |x - 1| \leq 1, \\ |2y - 4| + |x + 1| \leq 1. \end{cases}$$

- 3. Решить неравенство

$$\log_{\left(4 - \frac{x^2}{2}\right)} \left(55 - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right) \leq \frac{2}{\log_{5+\sqrt{3}} 2 + \log_{5+\sqrt{3}} (14 + 5\sqrt{3})}.$$

- 4. Решить уравнение

$$16 \cos^2 x (\operatorname{ctg}^2 2x - 1) \cos 4x = \frac{1}{\sin^2 4x}.$$

- 5. Окружность касается сторон AB и DC треугольника ABC . Точки D и E — точки касания. На окружности взята произвольная точка F , отличная от D и E . Из точки F опущены перпендикуляры FG , FH , FK на стороны AD , AE , DE соответственно. Найти площадь треугольника GKF , если известны стороны $FK = 6$, $FH = 9$ и угол $\angle BAC = 60^\circ$.
- 6. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$9^{-x+1} \cdot 3^{x^2} + a^3 + 5a^2 + a + \sqrt{2} = \sin \frac{\pi x}{4} + \cos \frac{\pi x}{4} + 3.$$

имеет единственное решение.

Биологический факультет и факультет фундаментальной медицины

- 1. Решить неравенство $|2x - 3| > 4x$.
- 2. Решить уравнение $\sin^2 2x + \cos^2 3x = 1$.
- 3. Длины сторон треугольника DEF равны 8, 10 и 14. Вписанная в этот треугольник окружность касается его сторон в точках A , B и C . Найти площадь треугольника ABC .
- 4. Решить неравенство $\log_3^2 |x| - 9 \log_3 |x| + 2|x| \log_3 |x| - 4|x| + 14 \geq 0$.
- 5. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(x^2 + 2(a+1)x + a^2 + 2a)^2 + (a+5)(x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a)$$

$$- a^2 - 7a - 10 = 0$$

имеет: а) единственное решение; б) ровно два различных решения.

Факультет почвоведения

- 1. Решить неравенство $|9 - 5x| > 1$.
- 2. Вычислить $\sin(11\pi/8)$.
- 3. Пусть $m = \sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{5}$. Доказать, что число $m^3 + 15m$ целое и найти его.
- 4. Решить неравенство

$$\log_{25} \log_4 4x \geq \log_5 \log_8 x.$$

- 5. Найти все значения x , принадлежащие интервалу $(-\pi; \pi)$ и являющиеся решениями уравнения $1/\sqrt{-\cos x} = 2\sqrt{\sin x}$.

- 6. Внутри прямоугольного треугольника помещены две окружности одинакового радиуса, каждая из которых касается одного из катетов, гипотенузы и другой окружности. Найти радиусы этих окружностей, если катеты треугольника равны a и b .

- 7. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{(x^3 - 1)(x^2 - 25)}{\log_5(x - a) - \log_5(19a - x)} = 0$$

имеет единственное решение.

Геологический факультет

- 1. Решите неравенство

$$\frac{x|x| + 1}{x - 2} + 1 \geq x.$$

- 2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{x-y} \frac{xy}{2} = 2, \\ x + y = xy + 1. \end{cases}$$

- 3. Решите неравенство

$$3^{2-x} + 6 \cdot (\sqrt{3})^{2-2x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+x-2}-3}.$$

- 4. Пункт C расположен между пунктами A и B , $AC = 2BC$. Из пунктов C и B одновременно навстречу друг другу вышли два поезда. Время, затраченное вторым поездом на путь от B до A , не менее чем в 6 раз превосходит время, затраченное первым поездом на путь от C до B . Третий поезд, скорость которого равна разности скоростей первых двух, затратил на путь от A до B не менее чем в 9 раз больше времени, чем первый поезд затратил на путь от C до места встречи со вторым. Чему равно отношение скоростей первого и второго поездов?

- 5. Найдите все решения уравнения

$$|\sin 2x| + \cos x = 0,$$

принадлежащие отрезку $[-\sqrt{3}; \frac{8}{3}]$.

- 6. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены биссектриса CD и прямая DE , перпендикулярная CD (точка E лежит на прямой AC). Найдите площадь треугольника ABC , если $CE = 4$, $CA = 3$.

- 7. При каких значениях параметра a периметр плоской фигуры, заданной на координатной плоскости Oxy системой

$$\begin{cases} y \leq \sqrt{1-x^2}, \\ a|y| \leq x, \end{cases}$$

больше, чем $4 + 2\sqrt{2} + \frac{\pi}{2}$?

- 8. В кубе $ABCD A' B' C' D'$ с длиной ребра, равной 1, на вертикальном ребре AA' и на горизонтальном ребре AB взяты точки M и N соответственно, при этом $AM = \frac{1}{3}$, $AN = \frac{3}{4}$. Через точки M и N проведена плоскость, параллельная диагонали AC нижнего основания куба. Чему равна площадь получившегося сечения?

Географический факультет

- 1. Решить уравнение

$$|2x - 1| = \frac{4}{2x - 1}.$$

- 2. Решить уравнение

$$\frac{6 \cos x - 2}{6 \cos^2 x - 11 \cos x + 3} = -1.$$

- 3. Квадратное уравнение $x^2 - 6px - 2q = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2 . Числа p, x_1, x_2, q — четыре последовательных члена геометрической прогрессии. Найти x_1 и x_2 .

- 4. Тележка с передними колесами диаметром 40 см и задними колесами диаметром 50 см движется по прямой дороге, проходящей через точки A и B . Между точками A и B ровно 100 метров. Точка A покрашена. Через точку A проезжают правые колеса тележки и в точках соприкосновения с ней красятся. В свою очередь, при каждом соприкосновении с дорогой эти точки оставляют свой след в виде точек на дороге. Никакие точки на дороге, кроме точки A , колеса не окрашивают. Тележка движется по направлению от точки A в сторону точки B . Найти:

- а) наименьшее расстояние между соседними окрашенными точками;
- б) количество окрашенных точек на отрезке AB .

- 5. В треугольнике KLM проведена медиана LN . Известно, что $\angle KLM = \angle LNM$, $KM = 10$. Найти:

- а) сторону LM ;
- б) $\angle LMK$, если расстояние от точки M до центра описанной около треугольника KLN окружности равно 10.

- 6. Решить систему

$$\begin{cases} x^3 = 4x + y, \\ y^3 = 4y + x. \end{cases}$$

Экономический факультет (отделение экономики)

- 1. Докажите или опровергните следующее утверждение: периметр ромба с диагоналями 1 и 3 больше длины окружности радиуса 1.

- 2. Решите неравенство

$$\left(1 - \frac{2x}{5}\right)^{7+11x-6x^2} \geq 1.$$

- 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - xy - x = 11, \\ xy^2 - x^2y = -30. \end{cases}$$

- 4. Бригада рабочих выполняет задание за 42 дня. Если бы в бригаде было на 4 человека больше и каждый рабочий бригады работал бы на 1 час в день дольше, то это же задание было бы выполнено не более чем за 30 дней. При увеличении бригады еще на 6 человек и рабочего дня еще на 1 час все задание было бы закончено не ранее чем через 21 день. Определите наименьшую при данных условиях численность бригады, а также продолжительность рабочего дня.

- 5. Решите уравнение

$$\log_2 \left(\cos 3 \left(\frac{\pi}{6} - x \right) \right) \cdot \log_2 (\cos 2x) + \log_2 (\sin 5x + \sin x) = 0.$$

- 6. Найдите все значения a , при которых неравенство

$$\sqrt[4]{x^2 - 6ax + 10a^2} + \sqrt[4]{3 + 6ax - x^2 - 10a^2} \geq \sqrt[4]{\sqrt{3a + 24} - \frac{3}{\sqrt{2}} + |y - \sqrt{2}a^2| + |y - \sqrt{3}a|}$$

имеет единственное решение.

- 7. Равные кубы A и B , имеющие общую вершину, расположены так, что ребро куба A лежит на диагонали куба B , а ребро куба B лежит на диагонали куба A . Найдите объем общей части этих кубов, если длина их ребер равна 1.

Факультет психологии

- 1. Решить неравенство $\sqrt{x+2} > x-1$.
 ► 2. Решить неравенство $\log_{x+2}(x^2 + 5x - 6) > 2$.
 ► 3. Решить уравнение

$$3^{3^x} + \left(\frac{1}{3}\right)^{3^x-1} = 4.$$

- 4. На катете ML прямоугольного треугольника KLM как на диаметре построена окружность. Она пересекает сторону KL в точке P . На стороне KM взята точка R так, что отрезок LR пересекает окружность в точке Q , причем отрезки QP и ML параллельны, $KR = 2RM$ и $ML = 8\sqrt{3}$. Найти MQ .
 ► 5. Решить уравнение $\cos 6x - 5 \cos 5x + \cos 4x - 4 \cos x + 7 = 0$.

- 6. Решить уравнение

$$|x^3 + 12x^2 - 11x + 6| + |x^3 - 7x^2 - x - 1| = 18x^2 - 14x + 3.$$

Филологический факультет

- 1. Решить неравенство

$$\frac{\cos(x - \pi) \sqrt[4]{x}}{\log_{x^2} \pi \cdot \arcsin \frac{x}{3}} \geq 0.$$

- 2. Окружность радиуса 2 проходит через середины трех сторон треугольника ABC , в котором величины углов A и B равны 30° и 45° соответственно. Найти длину высоты, проведенной из вершины A .

- 3. Решить уравнение

$$\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x - \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) - \sqrt{3}(\cos x + \sin x)} = -\frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

- 4. Положительное число a подобрано так, что больший корень уравнения

$$x^3 - 2x^2 = 2x^2 - 8$$

является одновременно одним из решений неравенства

$$a^{-10(x+1)} > a^{-x^2-6x-10}.$$

Решить это неравенство.

- 5. В основании правильной пирамиды лежит квадрат со стороной 4, а боковая грань составляет угол 30° с высотой пирамиды.

а) Найти радиус вписанного в пирамиду шара.

б) В данную пирамиду вписан второй шар так, что он касается всех боковых граней и первого шара; затем вписан третий шар, касающийся всех боковых граней и второго шара и т.д. Найти сумму площадей поверхностей бесконечной системы вписанных шаров.

- 6. ... 'Словарь людоеда из племени «Мумбо-Юмбо» составляет 300 слов. Эллочка Щукина легко и свободно обходилась тридцатью ...

Однажды людоед отбился от племени и стал понемногу забывать слова, поэтому его словарный запас стал, оставаясь целочисленным, уменьшаться на некоторое фиксированное число процентов за каждые полгода. Одновременно Эллочка поступила в школу рабочей молодежи и каждый месяц стала узнавать целое число новых слов, равное 50% от того количества слов, которое людоед знал к концу первого полугодия одиночества. Однако через несколько месяцев Эллочка бросила школу.

Какое наименьшее целое число месяцев могла проучиться Эллочка в школе, чтобы при этих условиях словарь людоеда после одного года жизни в одиночку обязательно стал меньше словаря Элочки?

Социологический факультет

- 1. Решить уравнение

$$\sqrt{3x+7} = x+1.$$

- 2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{x^3+2x^2+3x-6} (\log_{\frac{1}{4}} (-x^2+3x-2)) < 0.$$

- 3. Определить угол
- A
- треугольника между сторонами 2 и 4, если медиана, выходящая из вершины
- A
- , равна
- $\sqrt{3}$
- .

- 4. Куплен товар двух сортов: первого на 1500 руб. и второго на 1800 руб. Товара второго сорта куплено на 8 кг больше, чем первого и по цене (за 1 кг) на 35 руб. меньше. Сколько куплено товара первого сорта?

- 5. В шар радиуса
- R
- вписана четырехугольная пирамида с квадратным основанием. Одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно плоскости основания и равно
- b
- . Найти полную поверхность пирамиды и вычислить ее значение при
- $b = 4\sqrt{2}$
- ,
- $R = \sqrt{17}$
- .

- 6. Найти все значения параметра
- a
- , при каждом из которых уравнение

$$(1+a)x^2 + (1-a)x - 5a - 3 = 0$$

имеет по крайней мере один корень и все его корни являются целыми числами.

Институт стран Азии и Африки

- 1. Решите неравенство

$$\frac{2^x - 2^{2-x} - 3}{2^x - 2} \geq 0.$$

- 2. Решите уравнение

$$\sin 4x + 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0.$$

- 3. Решите неравенство

$$x\sqrt{2-x} \leq x^2 - x - 2 - \sqrt{2-x}.$$

- 4. Решите неравенство

$$\left| \log_{x+1} 2 + \log_2 \frac{x+1}{4} \right| + |\log_2(4x+4) + \log_{x+1} 2| < \frac{17}{2}.$$

- 5. В треугольнике
- ABC
- даны длины сторон
- $AB = 8$
- ,
- $BC = 6$
- и биссектриса
- $BD = 6$
- . Найдите длину медианы
- AE
- .

- 6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \arccos 2y + \arcsin 3x = \frac{\pi}{4}, \\ \arcsin 2y \cdot \arccos 3x = \frac{5\pi^2}{64}. \end{cases}$$

Для каждого решения $(x; y)$ определите, какое из чисел больше: $2y - 3x$ или $\sqrt[4]{2} - 0,5$.

- 7. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6|x| - 6|y| + 17 \leq 0, \\ x^2 + y^2 - 2y = a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Факультет государственного управления

- 1. Из деревни в город вышел турист. Первую половину пути он шел пешком со скоростью 5 км/ч, а затем оставшуюся часть пути ехал на автобусе. Найдите среднюю скорость движения туриста на всем маршруте, если скорость автобуса равна 45 км/ч.

- 2. Решите уравнение

$$4^x - 3 \cdot 2^{x+\frac{1}{2}} - 8 = 0.$$

- 3. Решите неравенство

$$\frac{-1}{\frac{8}{3-x^2} + 1} \leq 3 - x.$$

- 4. На окружности радиуса 5, описанной около правильного треугольника, взята точка D . Известно, что расстояние от точки D до одной из вершин треугольника равно 9. Найдите сумму расстояний от точки D до двух других вершин треугольника.

- 5. Одна труба наполняет бассейн на 2 часа, а другая — на 4 часа 30 минут дольше, чем наполняют этот бассейн обе трубы, открытые одновременно. За сколько часов может наполнить бассейн каждая труба в отдельности?

- 6. Найдите все значения a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} (3\sqrt{|x|} + |y| - 3)(|x| + 3|y| - 9) = 0, \\ (x - a)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

- 7. Пять пиратов делят 10 слитков золота. Процедура дележа устроена так: сначала старший пират предлагает дележ по своему выбору. Если больше половины пиратов его отвергает, второй по старшинству пират предлагает новый дележ добычи среди оставшихся четырех (старший пират никакого участия в дальнейшем дележе не принимает). Если новый дележ отвергается большинством голосов, то предлагавший его пират от дальнейшего участия в дележе устраняется, и процедура повторяется для трех пиратов. Как будут распределены слитки золота, если каждый пират из двух данных дележей предпочитает тот, в котором его доля золотых слитков больше?

2003 год

Механико-математический факультет

- 1. Решить неравенство

$$5\sqrt{\frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x+3}}} + 4\sqrt{\frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+3}}} \leq 9\sqrt{x+4}.$$

- 2. Решить уравнение

$$|5^{\log_x 122} - x^{\log_5 x} + 614| = 636 - 5^{\log_x 122} - x^{\log_5 x}.$$

- 3. Первый член конечной геометрической прогрессии с целочисленным знаменателем меньше последнего, но не более чем на 17, а сумма ее членов со второго по последний не меньше 26. Найти знаменатель прогрессии.

- 4. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, касающаяся прямой BC , а через вершины B и C — другая окружность, касающаяся прямой AB . Продолжение общей хорды BD этих окружностей пересекает отрезок AC в точке E , а продолжение хорды AD одной окружности пересекает другую окружность в точке F . Найти отношение $AE : EC$, если $AB = 5$ и $BC = 9$. Сравнить площади треугольников ABC и ABF .

- 5. Найти значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sin \arccos(5x) = a + \arcsin \sin(7x - 3)$$

имеет единственное решение.

- 6. Высота AH тетраэдра $ABCD$ пересекается с его высотой BE , но не лежит в одной плоскости ни с одной из других его высот. На отрезке $HE = 4$ взята точка O , равноудаленная от граней тетраэдра, образующая двугранный угол в 30° при ребре $CD = 5$. Найти площадь сечения тетраэдра, проходящего через точку O и являющегося прямоугольником.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Решите неравенство

$$\log_{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)} \left(\frac{2}{4x-1} \right) \geq 1.$$

- 2. Решите уравнение

$$\sqrt{\sin 3x \cdot \cos x} = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$$

- 3. Найдите множество значений функции $y = x - \sqrt{x^2 + x - 2}$.

- 4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ длина высоты, опущенной из вершины S на основание $ABCD$, равна $6\sqrt{2}$. Через точку касания с боковой гранью SAB вписанного в эту пирамиду шара параллельно прямой AB проведена секущая плоскость Π , проходящая через ближайшую к вершине S точку шара. Известно, что $AB = 4\sqrt{6}$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью Π .
- 5. Найдите все значения параметра β , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 25^x - 5^{x+y} \leq \frac{24\beta - 15}{3\beta - 2} \\ 3 \cdot 5^{x+y} - 4 \cdot 25^y \geq 8 \end{cases}$$

имеет решение.

- 6. Дан параллелограмм $KLMN$, у которого $KL = 6$, $KN = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ и $\angle LKN = 45^\circ$. На стороне KL взята такая точка A , что $KA : AL = 1 : 2$. Через точку A параллельно LM проведена прямая, на которой внутри параллелограмма выбрана точка B . На стороне KN выбрана точка C так, что $KC = AB$. Прямые LC и MB пересекаются в точке D . Найдите величину угла LAD .

Физический факультет

- 1. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x - 6 \cos 2x = 6.$$

- 2. Решить неравенство

$$|x^2 + 3x| + x^2 - 2 \geq 0.$$

- 3. Решить неравенство

$$\log_{25}(5^x - 1) \cdot \log_5(5^{x+2} - 25) < 4.$$

- 4. В трапеции $KLMN$ ($LM \parallel KN$) LA — биссектриса $\angle KLM$, точка A — середина отрезка MN , средняя линия равна $\sqrt{5}$, $KA = 4$. Найти LA .

- 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-y} = 9 - |x+2y|, \\ x(x+4y-2) + y(4y+2) = 41. \end{cases}$$

- 6. В $\triangle KLM$ радиус описанной окружности равен R , $\angle K = \alpha$, точка O — центр окружности, вписанной в этот треугольник. Прямая KO пересекает окружность, описанную около $\triangle KLM$, в точке N . Найти ON .

- 7. Для каждого значения a решить неравенство

$$\frac{x^2 \cdot 2^{|2a-1|} - 2x + 1}{x^2 - (a-2)x - 2a} > 0.$$

- 8. В пирамиде $SLMN$ даны ребра: $LM = 5$, $MN = 9$, $NL = 10$. Сфера радиуса $(5/4)\sqrt{14}$ касается плоскости основания LMN и боковых ребер

пирамиды. Точки касания делят эти ребра в равных отношениях, считая от вершины S . Найти объем пирамиды.

Химический факультет и факультет наук о материалах

- 1. Найти все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства $\frac{a}{x-a} > 0$ содержит точку $x = 1$.

- 2. Решить уравнение

$$\cos^2 8x + \sin^2 x = 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 8x.$$

- 3. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}(2 - |x - 1|) > \log_{\sqrt{10}}(2x - x^2).$$

- 4. Решить уравнение

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) \cdot (\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) = 8.$$

- 5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что прямые AC и BD перпендикулярны. Найти длину отрезка BC , если расстояние от центра окружности до стороны AD равно 2.

- 6. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (x + \sqrt{2}z)^2 + (y + \sqrt{2}t)^2 = 25 + 2a\sqrt{25 - a^2}, \\ x^2 + y^2 = a^2, \\ z^2 + t^2 = (25 - a^2)/2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Биологический факультет, факультет фундаментальной медицины, факультет биоинженерии и биоинформатики

- 1. Решить уравнение

$$2 \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 3 \cos \left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -3.$$

- 2. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2 - 2}}{4 - 2x} \geq -1.$$

- 3. Решить уравнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_4 x = -1.$$

- 4. Три мотоциклиста A , B и C участвовали в показательном заезде, двигаясь по трассе от старта до финиша с постоянными скоростями. Мотоциклисты A и C стартовали одновременно, а мотоциклист B спустя некоторое время. Первым к финишу пришел мотоциклист A . Мотоциклист B через 1 час после своего старта догнал мотоциклиста C на трассе и прибыл на финиш через 4 часа после старта мотоциклистов A

и C и за 2 часа до финиша мотоциклиста C . Найти отношение скорости мотоциклиста A к скорости мотоциклиста C , если известно, что мотоциклист A двигался в $\frac{8}{5}$ раза медленнее мотоциклиста B .

- 5. В ромбе $ABCD$ через точки A, B, C проведена окружность с центром в точке O_1 , а через точки A, B, D проведена окружность с центром в точке O_2 . Известно, что отношение длины отрезка O_1O_2 к длине отрезка AO_2 равно 4. Найти величину угла $\angle DAO_2$.

- 6. Решить неравенство

$$(3-x)\log_2(1+\sqrt{7})^{x^2+3x+2} > \sqrt{2-x}\log_3(8+2\sqrt{7})^{(x+1)\sqrt{x+1}}.$$

Факультет почвоведения

- 1. Решить уравнение

$$\cos^2 4x - 2 \cos 4x - 3 = 0.$$

- 2. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \log_7(x-y) + 7^{xy} = 1, \\ 7^{xy} + \log_7(x-y) = 1. \end{cases}$$

- 3. Решить неравенство

$$\frac{3}{2}x^2 - |x| \geq 0.$$

- 4. Найти наименьшее значение функции $y = \sqrt{3x^2+5} - \sqrt{3x^2}$ на отрезке $[0; 3]$.

- 5. В окружность радиуса 2 вписан угол QPR так, что PR — диаметр окружности. В угол QPR вписана еще одна окружность радиуса $\frac{3}{4}$ так, что она касается большей окружности внутренним образом. Найти величину угла QPR .

- 6. Найти все значения параметра b , при каждом из которых отрезок $[-3, -1]$ целиком содержится среди решений неравенства $\frac{x-3b}{b-2x} < 0$.

Геологический факультет

- 1. Решите неравенство

$$\frac{x-2}{|x+2|} + \frac{2x+5}{x+2} \leq 0.$$

- 2. Решите уравнение

$$4^{x+\frac{1}{2}} - 7^{x-\frac{1}{2}} = 7^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x+1}.$$

- 3. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B и, встретившись через 50 мин., без остановки продолжили движение каждый в своем направлении. За какое время проходит путь между A и B каждый из пешеходов, если известно, что первый пришел в B на 4 час. раньше, чем второй пришел в A ?

- 4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + 3 = 0, \\ 6y^3 - 18y - 13x^3 - 3x = 0. \end{cases}$$

- 5. Прямоугольный треугольник ABC вписан в окружность. Из вершины C прямого угла проведена хорда CM , пересекающая гипотенузу в точке K . Найдите площадь треугольника ABM , если $AK : AB = 1 : 4$, $BC = \sqrt{2}$, $AC = 2$.

- 6. Решите уравнение

$$\sqrt{\cos 3x} \cdot \log_4 \left(\operatorname{tg} \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = 0.$$

- 7. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых существует нечетное число n , удовлетворяющее равенству

$$3^a n^2 - 3^a + 3^{4-a} n^2 = 96n + 3^{4-a}.$$

- 8. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S отношение высоты SO к длине стороны основания равно $\sqrt{5}$. Через точку M , лежащую на стороне основания BC , и боковое ребро SA проведена плоскость; при этом точка M выбрана так, что площадь сечения пирамиды этой плоскостью является наименьшей. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

Географический факультет

- 1. Разность девятого и третьего членов знакочередующейся геометрической прогрессии равна ее шестому члену, умноженному на $24/5$. Найти отношение десятого к пятому члену прогрессии.

- 2. Решить неравенство

$$\frac{6}{|x|} \geq 7 + x.$$

- 3. Непустое множество X состоит из конечного числа N натуральных чисел. Четных чисел в X меньше двух третей от N , а нечетных не больше 36% от N . Какое минимальное значение может принимать число N ?

- 4. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, перпендикулярны. Известно, что $AC \perp 4$, $\angle CAB + \angle DBA = 75^\circ$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$ и сравните ее с числом $2\sqrt{15}$.

- 5. При каких значениях параметра a уравнение

$$(\sin x - \log_4 a)(\sin x - 2 + 2a) = 0$$

имеет ровно два корня на отрезке $[\pi/2; 5\pi/2]$?

Филологический факультет

- 1. Решить уравнение

$$\cos 4x = \cos^4 x - \sin^4 x.$$

- 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos y \cdot 3^{x^3+8} = 27^{x^2+2x} \cdot |\cos y|, \\ 2 \sin y = \log_2 x. \end{cases}$$

- 3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) медианы AM и CN пересекаются в точке D под прямым углом. Найти все углы треугольника ABC и площадь четырехугольника $NBMD$, если основание $AC = 1$.
- 4. В двух группах учится одинаковое количество студентов. Каждый студент изучает по крайней мере один язык: английский или французский. Известно, что 5 человек в первой и 5 во второй группе изучают оба языка. Количество изучающих французский в первой группе в 3 раза меньше, чем во второй. Количество изучающих английский во второй группе в 4 раза меньше, чем в первой. Каково минимально возможное количество студентов в одной группе?
- 5. Найти все значения параметра b , при каждом из которых для любого a неравенство $(x - a - 2b)^2 + (y - 3a - b)^2 < \frac{1}{2}$ имеет хотя бы одно целочисленное решение (x, y) .

Экономический факультет (отделение экономики)

- 1. Решите неравенство

$$\sqrt{5 - 4x - x^2} \geq -2x - 1.$$

- 2. Про числа a и b известно, что $a + b = -12$, $a \cdot b = 2$. Вычислите значение выражения $\frac{1}{a^3} - \frac{|b|}{b^4}$.

- 3. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 4 \cdot 49^x - 4 \cdot 7^{x+y \log_7 3} + 9^y = 9, \\ 49^x + 12 \cdot 3^{x \log_3 7+y} - 4 \cdot 9^y = 9. \end{cases}$$

- 4. На первом складе сахара было на 16 тонн больше, чем соли. За день с первого склада вывезли $\frac{1}{m}$ часть сахара и $\frac{1}{3}$ часть соли, причем сахара вывезли на 2 тонны больше, чем соли. На втором складе соли было на 4 тонны больше, чем сахара. За день со второго склада вывезли также $\frac{1}{m}$ часть сахара и $\frac{1}{5}$ часть соли, причем сахара вывезли на 3 тонны больше, чем соли. Сколько соли было на первом и втором складах, если известно, что m — целое число? При каких m задача имеет решение?

- 5. Площадь четырехугольника $PQRS$ равна 48. Известно, что $PQ = QR = 6$, $RS = SP$ и ровно три вершины P , Q и R лежат на окружности радиуса 5. Найдите длины сторон RS и SP .
- 6. Найдите все значения b , при которых уравнение
- $$3 \cdot \sqrt[5]{x+2} - 16b^2 \cdot \sqrt[5]{32x+32} = \sqrt[10]{x^2+3x+2}$$
- имеет единственное решение.
- 7. Найдите максимальный объем многогранника с пятью вершинами, который можно поместить в шар радиуса $2\sqrt{3}$.

Экономический факультет (отделение менеджмента)

- 1. Решите уравнение

$$\sqrt{5-4x-x^2} = -2x-1.$$

- 2. Про числа x и y известно, что $x+y=12$, $x \cdot y=6$. Вычислите значение выражения $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$.
- 3. Найдите все решения системы уравнений
- $$\begin{cases} 3 \cdot 4^x + 2^{x+1} \cdot 3^y - 9^y = 0, \\ 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x \cdot 3^y + 9^y = -8. \end{cases}$$
- 4. На складе сахара было на 10 тонн больше, чем соли. За день со склада вывезли $\frac{1}{m}$ часть сахара и $\frac{1}{3}$ часть соли, причем сахара вывезли на 2 тонны больше, чем соли. Сколько соли было на складе, если известно, что m — целое число? При каких m задача имеет решение?
- 5. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $AB = BC = 8$, $AD = DC = 6$ и ровно три вершины A , B и C лежат на окружности радиуса 5.
- 6. Найдите все значения b , при которых уравнение

$$3 \cdot \sqrt[5]{x+4} - 7b^2 \cdot \sqrt[5]{32x+96} = \sqrt[10]{x^2+7x+12}$$

имеет единственное решение.

Факультет психологии

- 1. Решить уравнение

$$\log_{3x+3} 5 = 2.$$

- 2. Решить уравнение

$$\sin 3x \sin x = -\frac{1}{8}.$$

- 3. Решить неравенство

$$|3x+1| + \sqrt{3x+4} \leq 3.$$

- 4. В окружность радиуса $\sqrt{7}$ вписана трапеция с меньшим основанием 4. Через точку на этой окружности, касательная в которой параллельна одной из боковых сторон трапеции, проведена параллельная основаниям

трапеции хорда окружности длины 5. Найти длину диагонали трапеции и площадь трапеции.

- 5. При каких значениях параметра a уравнение $2|x - 9a| - 2a^2 + 35 + x = 0$ не имеет решений? При каких (остальных) значениях параметра a все решения этого уравнения принадлежат отрезку $[-30, 63]$?

Социологический факультет

- 1. Решить уравнение

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{3x+7}.$$

- 2. Решить неравенство

$$\frac{1}{2} \log_{0,1}(6+x) \leq \log_{0,1} x.$$

- 3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Радиус окружности равен 2, сторона AB равна 3. Диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны. Найти CD .
- 4. В городе N на должность мэра на выборах баллотировались 3 кандидата: Акулов, Баранов и Воробьев. В начале предвыборной кампании предпочтения избирателей распределялись как $1 : 2 : 1$. По окончании предвыборной гонки 40% избирателей города N отказались участвовать в выборах, у остальных же предпочтения не изменились. Сколько процентов сторонников каждого кандидата отказались от голосования, если по окончании предвыборной гонки соотношение голосов стало $3 : 3 : 3,6$?
- 5. Двое рабочих изготовили 316 деталей, причем вторым сделано на 4 детали меньше первого. Известно, что первый рабочий работал на 3 дня дольше второго, при этом в день изготовлял на 2 детали меньше. Сколько деталей в день делал каждый рабочий?
- 6. Определить все значения параметра a , при каждом из которых три различных корня уравнения $x^3 + (a^2 - 9a)x^2 + 8ax - 64 = 0$ образуют геометрическую прогрессию. Найти эти корни.

Институт стран Азии и Африки

- 1. Числа x, y изменяются в пределах: $3 \leq x \leq 4$ и $1 \leq y \leq 2$. Найдите, в каких пределах изменяется величина выражения $A = 4^{x-2y-1} - 4y + 4x - 4$.
- 2. Решите уравнение $(|x| - 5)^2 - |5 - x| = 30$.
- 3. В правильный треугольник ABC со стороной a вписана окружность. Эта окружность касается внешним образом трех других окружностей того же радиуса в точках касания сторон треугольника. Центры внешних

окружностей соответственно O_1, O_2, O_3 . Найдите площадь шестиугольника, получающегося при пересечении треугольников ABC и $O_1O_2O_3$.

- 4. Найдите корни уравнения

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2(\sqrt{2} + 1) \operatorname{ctg} x,$$

принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

- 5. Решите неравенство

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{\log_{4x^2}(2x^2) \cdot \log_{8x^4}(4x^4)} - 1} - 1\right) \times \\ \times \sqrt{(x^2 + 8x + 15)(256x^2 - 24x - 1)} \geq 0.$$

- 6. Функция $y(x) = x^2 + 2(c - d)x + 3c - d$ такова, что $y(1) \cdot y(-1) \leq 0$ и $|c - d| \geq 1$. Найдите величины c и d , при которых длина промежутка, представляющего собой множество значений функции $f(x) = |y(x)|$ на отрезке $[-1; 1]$, наименьшая; укажите это множество значений.

Факультет государственного управления

- 1. Автозаправочные станции E и F расположены на расстоянии 3 км одна от другой. Где наиболее выгодно разместить бензосклад, если на АЗС E ежедневно поставляется 8 тонн бензина, а на АЗС F — 4 тонны?

- 2. Решите неравенство

$$|2x + 8| \geq 8 - |1 - x|.$$

- 3. Три предприятия A, B и C на паритетных (равных) началах прокладывают необходимую им шоссейную дорогу длиной 16 км. Предприятие A взяло на себя прокладку 10 км дороги, предприятие B — остальных 6 км, а предприятие C внесло всю свою долю деньгами, уплатив 16 миллионов условных денежных единиц. Как эти деньги должны быть распределены между предприятиями A и B ?

- 4. В прямоугольном треугольнике KLM проведен отрезок MD , соединяющий вершину прямого угла с точкой D на гипотенузе KL так, что длины отрезков DL, DM и DK различны и образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию со знаменателем $\sqrt{2}$, причем $DL = 1$. Найдите величину угла KMD .

- 5. Для каждой пары чисел a и b найдите все решения неравенства

$$b \cdot x^2 + a \leq 0.$$

- 6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2xy - z^2 = 4. \end{cases}$$

- 7. Для того, чтобы успеть на последний электропоезд, семье из четырех человек нужно перейти по пешеходному мосту быстрее, чем за 32 минуты. Одновременно по мосту могут идти не более двух человек, причем ввиду темного времени непременно с фонариком. Если мост проходят двое, то со скоростью того, кто идет медленнее. Успеют ли на последний поезд все члены семьи, если известно, что в одиночку Анна может перейти мост за 2 минуты, Василий — за 4 минуты, Игорек — за 10 минут, Мария Ивановна — за 16 минут, а фонарик только один?

Высшая школа бизнеса

- 1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{(x+5)(x-3)}}{x+5} \leq 0.$$

- 2. В банке общая сумма кредитов, выданных населению, составляет 25% от суммы кредитов, выданных предприятиям. Какой процент от общего объема кредитования в этом банке приходится на долю предприятий?

- 3. Решите уравнение $2 \operatorname{ctg} x \cdot |\sin x| + 1 = 0.$

- 4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5 \log_{32}(x+y) + \log_{\frac{1}{2}}(3y-8) = 0, \\ x^2 + 2x + y^2 + y = 12. \end{cases}$$

- 5. Найдите стороны параллелограмма $ABCD$, если известны координаты двух его противоположных вершин $A(-3; -6)$, $C(5, 12)$ и точки $N(1; 9)$, являющейся серединой стороны BC .

- 6. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $2x^2 = 2y^2 + 3xy + 7.$

- 7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) угол при вершине B равен 80° , а точка M внутри треугольника расположена так, что $\angle MAC = 30^\circ$, а $\angle MCA = 10^\circ$. Найдите величину угла BMC .

- 8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$25x^5 + 25(a-1)x^3 - 4(a-7)x = 0$$

имеет ровно 5 различных решений, а сами решения, упорядоченные по возрастанию, образуют арифметическую прогрессию.

2004 год

Механико-математический факультет

- 1. Решить неравенство

$$\frac{\log_4(x+1) - \lg(x+1)}{\lg(1-x) - \log_{25}(1-x)} \leq \log_4 25.$$

- 2. Решить неравенство

$$\frac{(x^2 + 3x + 4)^2 - 2|x^3 + 3x^2 + 4x| - 35x^2}{2x^2 - 5x - 3} \geq 0.$$

- 3. Выпуклый многогранник $KLMNFE$ имеет пять граней: KLE , MNF , $KNFE$, $LMFE$ и $KLMN$. Точки A и B расположены соответственно на ребрах KN и LM так, что отрезок AB делит площадь параллелограмма $KLMN$ пополам. Точка D является серединой ребра EF и вершиной пирамиды $DKLMN$, объем которой равен 5. Найти объем многогранника $KLMNFE$, если известно, что объем пирамиды $EFAB$ равен 8.

- 4. Решить уравнение

$$\sqrt{3} \sin 2x = 2 \sin 2x + \sin x + \cos x - 1.$$

- 5. Дорога проходит последовательно через пункты A , B , C и D . Расстояние от B до C равно 12 км. Из A в D выехал с постоянной скоростью мотоциклист. Одновременно с ним из B в D отправились с постоянными скоростями пешеход и велосипедист. Когда мотоциклист догнал пешехода, велосипедист обгонял их на 6 км. В пункте C мотоциклист догнал велосипедиста, и доехав до D , сразу поехал обратно в A , встретившись с пешеходом во второй раз в C . Найти расстояние между A и B , если известно, что время от начала движения до момента повторной встречи мотоциклиста и пешехода в 4 раза больше, чем время от начала движения до того момента, когда мотоциклист впервые догнал велосипедиста.
- 6. В остроугольном треугольнике KLN высоты пересекаются в точке H , а медианы в точке O . Биссектриса угла K пересекает отрезок OH в такой точке M , что $OM : MH = 3 : 1$. Найти площадь треугольника KLN , если $LN = 4$, а разность углов L и N равна 30° .

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - 3 \cos(\arctg(2\sqrt{2})) + \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \right) \cdot x = 2^{\log_{\sqrt{2}} 3} - 9.$$

- 2. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 4}{\sqrt{15 + 2x - x^2}} \geq |x| - 2.$$

- 3. Решите уравнение

$$2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - 4x \right) - \sin \left(3x - \frac{5\pi}{16} \right) = -1.$$

- 4. Окружность с центром в точке M касается сторон угла AOB в точках A и B . Вторая окружность с центром в точке N касается отрезка OA , луча BA и продолжения стороны угла OB за точку O . Известно, что $ON : OM = 12 : 13$. Найдите отношение радиусов окружностей.

- 5. Для каждого значения параметра a найдите число решений уравнения

$$\frac{2}{16^x} - \frac{1}{8^x} - \frac{a+8}{4^x} + \frac{4-2a}{2^x} - a^2 + 4a + 5 = 0.$$

- 6. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Через точку B_1 проведена плоскость P , пересекающая ребро AD в точке K , а ребро CD — в точке N . Прямые AA_1 и CC_1 эта плоскость пересекает в точках L и M соответственно. Известно, что $DN : DC = 3 : 4$, $BC = DK$ и $KN > DN$. Объем многогранника $ABCNKL B_1 M$ относится к объему призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ как $49 : 144$. Найдите отношение длины отрезка DK к длине отрезка AD .

Факультет вычислительной математики и кибернетики (отделение бакалавров)

- 1. Решите неравенство

$$\log_{1-3x}(12x - 1) \geq 0.$$

- 2. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{13 + 4\sqrt{3}} - 2^{2,5} \cdot \cos 15^\circ + 1 \right) \cdot x = 3^{\log_{\sqrt{3}} 2} - 4.$$

- 3. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 9}{\sqrt{28 + 3x - x^2}} \geq |x| - 3.$$

- 4. При всех значениях параметра c решите неравенство

$$9^x - c \geq 2 \cdot 3^{x+1}.$$

- 5. Решите уравнение

$$2 \cos^2 \left(\frac{2\pi}{5} + 3x \right) + \sin(5x) = -1.$$

- 6. Окружность с центром в точке M касается сторон угла AOB в точках A и B . Вторая окружность с центром в точке N касается отрезка OA , луча BA и продолжения стороны угла OB за точку O . Известно, что $ON : OM = 5 : 13$. Найдите отношение радиусов окружностей.

- 7. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Через точку B_1 проведена плоскость P , пересекающая ребро AD в точке K , а ребро CD — в точке N . Прямые AA_1 и CC_1 эта плоскость пересекает в точках L и M соответственно. Известно, что $DN : DC = 2 : 5$, $BC = DK$ и $KN > DN$. Объем многогранника $ABCNKL B_1 M$ относится к объему призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ как $84 : 225$. Найдите отношение длины отрезка DK к длине отрезка AD .

Физический факультет

- 1. Решить уравнение

$$\cos x - \cos 3x = \sqrt{7} \cdot \sin 2x.$$

- 2. Решить неравенство

$$\frac{2}{4 - \sqrt{x}} < 1.$$

- 3. Решить уравнение

$$\frac{5^x}{2^{x-1} - 5^x} = 8 - \frac{2^{x+1}}{5^x}.$$

- 4. В правильной треугольной пирамиде отношение бокового ребра к высоте пирамиды равно 2. Найти отношение радиуса вписанного в пирамиду шара к стороне основания пирамиды.

- 5. Решить неравенство

$$\log_5(2+x)(x-5) > \log_{25}(x-5)^2.$$

- 6. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса тупого угла BAD пересекает сторону CD в точке M такой, что $DM : MC = 2 : 1$, $\angle CAM = \alpha$. Найти $\angle BAD$.

- 7. При каких значениях p уравнение

$$4 \left(x - \sqrt{p \cdot 4^p} \right) x + 4(4^p - 1) + p = 0$$

имеет корни и каковы знаки корней при различных значениях p ?

- 8. Сторона KL прямоугольника $KLMN$ служит высотой конуса с вершиной L , радиус основания этого конуса в три раза длиннее отрезка NK , $KL = 6$. Шар касается плоскости прямоугольника $KLMN$ в точке M и имеет единственную общую точку с конусом. Найти радиус шара.

Химический факультет и факультет наук о материалах

- 1. Решить неравенство

$$\frac{19 - x^2}{3 + 4x + x^2} \geq 1.$$

- 2. Решить уравнение

$$\sqrt{1 + 4 \cos x} = 1 - 3 \cos x.$$

- 3. Решить неравенство

$$\sqrt{\log_6 x + 4} < \sqrt{\log_6 x} + \sqrt{\log_6 x - 1}.$$

- 4. Известно, что трапеция $KL MN$ — равнобедренная, $KN \parallel LM$ и $KN < LM$. Трапеция $NK PM$ также равнобедренная, причём $KP \parallel NM$ и $KP > NM$. Найти LN , если известно, что синус суммы углов $\angle NLM$ и $\angle KPN$ равен $\frac{3}{5}$, а $LP = 6$.
- 5. На рёбрах NN_1 и KN куба $KL MN K_1 L_1 M_1 N_1$ отмечены такие точки P и Q , что $\frac{KQ}{QN} = \frac{1}{4}$, $\frac{NP}{PN_1} = 4$. Через точки M_1, P, Q проведена плоскость. Найти расстояние от точки K до этой плоскости, если длина ребра куба равна 3.
- 6. Найти все значения параметров a и b , при которых среди корней уравнения

$$(a^2 + 2ab - b^2 - 7)^2 - (2a^2 - 5ab + b^2 + 1)(x - 7)5^x + \operatorname{tg}^2 x = 0$$

есть два различных корня с равными абсолютными величинами.

Биологический факультет, факультет фундаментальной медицины, факультет биоинженерии и биоинформатики

- 1. Решить уравнение

$$\sqrt{2x + 1} = |2x - 2|.$$

- 2. Решить уравнение

$$\sin x \cos 3x = \sin 3x \cos 5x.$$

- 3. В равнобокой трапеции с основаниями 1 и 9 расположены две окружности, каждая из которых касается другой окружности, двух боковых сторон и одного из оснований. Найти площадь трапеции.
- 4. Решить неравенство

$$\log_{(3^x-3)^2}(9^{x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 3^{x+1} + 36) - \log_{(3^x-3)^{-2}}(3^{2x-1} - 3^{x+1} + 6) \geq \frac{3}{2}.$$

- 5. Около шара радиуса 2 описана правильная шестиугольная пирамида с высотой 5, а около неё описан второй шар. Найти радиус второго шара.

Факультет почвоведения

- 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^2 - 5x$ при $x \in [-1; 4]$.

- 2. Решить уравнение

$$|2x + 1| + 4x + 4 = 0.$$

- 3. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 + 7x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 3} = -\sqrt{2x^2 + 9x + 3}.$$

- 4. Решить неравенство

$$\log_{0,1}(10^x - 9) \geq x - 1.$$

- 5. Найти все значения x , удовлетворяющие неравенству $-\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}$ и являющиеся решениями уравнения

$$\sqrt{-\operatorname{tg} x} = \sqrt{-\operatorname{tg} 7x}.$$

- 6. Вокруг квадрата со стороной 3 описана окружность. На окружности отмечена точка, расстояние от которой до одной из вершин квадрата равно 2. Найти расстояние от этой точки до трёх других вершин квадрата.

- 7. Доказать, что график функции

$$y = 2x + \log_3 \left(\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 10x + 24} \right)$$

имеет центр симметрии, и найти координаты (x, y) этого центра симметрии.

Геологический факультет

- 1. Решите неравенство

$$\frac{|x-3|}{x-3} \leq 5 - x^2.$$

- 2. Какие значения может принимать $\cos x$, если $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$?

- 3. Решите неравенство

$$\sqrt{289 - x^2} \leq x + 17.$$

- 4. В треугольнике ABC угол B прямой, точка M лежит на стороне AC , причём $AM : MC = \sqrt{3} : 4$. Величина угла ABM равна $\frac{\pi}{3}$, $BM = 8$. Найдите величину угла BAC и расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников BCM и BAM .

- 5. Решите неравенство

$$\log_{5-x}(x^2 - 14x + 49) - 2\log_{5-x}(8x - x^2 - 7) + 2 \leq 0.$$

- 6. Две группы геологов исследуют маршрут, проходящий от пункта A через пункт B до пункта C . Первая группа проходит весь маршрут за 2, а вторая — за 3 дня. Расстояние между B и C вдвое меньше расстояния между A и B . Скорости движения групп на участках AB и BC постоянны, но на участке AB скорости обеих групп в m раз больше, чем их скорости на участке BC . Группы выходят одновременно из A и C навстречу друг другу. Если первая группа выходит из A , а вторая из C , то они встречаются в B . Если же первая выходит из C , а вторая из A , то они встречаются в пункте D . Какую часть от длины всего маршрута составляет расстояние между B и D ? Чему равно значение m ?

- 7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\sin x}{\cos(x-y)} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \frac{\cos y}{\cos(x-y)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

- 8. Основанием пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной длины $4\sqrt{2}$. Ребра SB и SC равны, шар касается сторон основания, плоскости грани SBC , а также ребра SA . Чему равен радиус шара, если $SA = 3\sqrt{2}$?

Географический факультет

- 1. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^{10} - 1}}{x - 2} \geq 0.$$

- 2. Решить уравнение

$$\frac{\sin 4x}{\cos x - \cos 3x} = 0.$$

- 3. Пункты A и B соединены двумя дорогами. Первая дорога разделена паромной переправой с одним паромом. На второй дороге препятствий нет. Переправа на пароме занимает $\frac{1}{2}$ часа. Паром работает без перерывов. Из пункта A по первой дороге выезжает мотоцикл, скорость движения которого по дороге равна 30 км/ч. Одновременно с ним из пункта B по той же дороге выезжает велосипед со скоростью 10 км/ч. Мотоцикл без задержки переправляется паромом и встречает велосипед, ожидающий паром. После прибытия в пункт B мотоцикл без остановки возвращается по второй дороге и прибывает в пункт A на 15 минут раньше велосипеда, затратив на обратный путь на $\frac{1}{2}$ часа больше, чем на путь из A в B . Найти:

а) разность между длинами второй и первой дорог, не учитывая длину переправы;

б) длину второй дороги, если известно, что, поехав обратно по первой дороге, мотоцикл прибыл в пункт A одновременно с велосипедом.

- 4. В выпуклом четырёхугольнике $KLMN$ точки A, B, C, D — середины сторон KL, LM, MN, NK соответственно. Известно, что $KL = 3$. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O . Площади четырёхугольников $KAOD, LAOB$ и $NDOD$ равны соответственно 6, 6 и 9. Найти:

а) площадь четырёхугольника $MCOB$;

б) отрезок MN .

- 5. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} |x + a| + |y - a| + |a + 1 + x| + |a + 1 - y| = 2, \\ y = 2|x - 4| - 5 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

- 6. Сколько цифр содержится в десятичной записи 9998-го члена последовательности a_n , если $a_1 = 0$, $a_{n+1} = 5a_n + 500$, $\lg 5 = 0,698970 \dots$?

Экономический факультет
(отделение экономики)

- 1. Вычислите произведение всех положительных корней уравнения

$$\sqrt{2}x^3 + \frac{2 \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)}{x} + \frac{6\sqrt{11}x}{\sqrt{3} \operatorname{ctg}\left(\frac{23\pi}{6}\right)} = 0.$$

- 2. Решите неравенство

$$\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \log_2(5 - x^2 + 4x) \geq 4 \cos(\pi x) + 4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

- 3. Площадь равнобедренного треугольника PRQ равна 12. На боковых сторонах PR и RQ взяты соответственно точки B и C так, что вокруг четырехугольника $PBCQ$ можно описать окружность и $PQ : BC = 3 : 2$. Найдите площадь треугольника APQ , где A — точка пересечения отрезков PC и BQ .

- 4. Решите неравенство

$$\log_{2-x}(1 - 2x) \cdot \log_{1-4x+4x^2}(x^2 + 6x + 9) + \log_{\frac{1}{2} - \frac{x}{2x-4}}(x^2 + 4x + 3) \leq 0.$$

- 5. Автофургон грузоподъемностью 339 кг перевозит ящики с виноградом и яблоками. Вес и стоимость одного ящика с виноградом составляют 15 кг и 10 условных единиц, ящика с яблоками — 27 кг и 8 условных единиц соответственно. Известно, что количество загруженных на автофургон ящиков с виноградом составляет не более 70% от количества загруженных ящиков с яблоками. Определите наибольшую возможную суммарную стоимость всех ящиков с виноградом и яблоками, перевозимых автофургоном при данных условиях.

- 6. Найдите наименьшее значение z , при котором имеет решение система

$$\begin{cases} z - 8 \cos^2 \frac{3y}{8} - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{3y}{8} = 2 \cos^2 2x, \\ 2\pi(1 + |x|) \cos 3y + |x|(\pi \sin^2 3y - 16 - 2\pi) = 0. \end{cases}$$

Экономический факультет
(отделение менеджмента)

- 1. Вычислите сумму всех решений уравнения

$$2 \cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \frac{3x}{4} \operatorname{ctg}\left(\frac{10\pi}{3}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}x}.$$

- 2. Решите уравнение

$$\cos^2(\pi x) \cdot \log_3(16x - 7 - 4x^2) = 3 \cos(2\pi x) + 3 \sin^2(\pi x).$$

- 3. Медиана RM прямоугольного треугольника PQR ($\angle R = 90^\circ$) равна $\frac{5}{4}$.
Найдите площадь треугольника PQR , если его периметр равен 6.
- 4. Решите неравенство

$$2 \log_{x+4}(2x+7) \cdot \log_{4x^2+28x+49}(2-x) + \log_{\frac{1}{x+4}}(x^2-5x+6) \geq 0.$$
- 5. Паром грузоподъемностью 111 тонн перевозит микроавтобусы и грузовики при условии полной загрузки. Количество загруженных на паром микроавтобусов составляет не более 70% от количества загруженных на паром грузовиков. Вес и стоимость одного микроавтобуса составляют 5 тонн и 5 тысяч условных единиц, грузовика — 9 тонн и 4 тысячи условных единиц соответственно. Определите наибольшую возможную суммарную стоимость всех микроавтобусов и грузовиков, перевозимых паромом при данных условиях.
- 6. Найдите наименьшее значение v , при котором имеет решение система

$$\begin{cases} \pi^2 v - 16x^2 = 16\pi x, \\ 2\pi(1 + |x|) \sin 3y = |x|(2\pi + 8 - \pi \cos^2 3y). \end{cases}$$

Факультет психологии

- 1. Решить уравнение $25^x - 10 \cdot 5^x - 3 = 0.$

- 2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{x-1}{x+3}} \left(\frac{x+7}{6} \right) \leq 1.$$

- 3. Решить уравнение

$$\sqrt{21} \cos x \operatorname{ctg} x - \sqrt{7} \cos x - \sqrt{7} \operatorname{ctg} x = 0$$

и найти сумму его корней, принадлежащих отрезку $[-\pi, \pi]$.

- 4. Через вершины K и M прямоугольного треугольника KML с катетом $KM = 7$ проходит окружность диаметра 8. Прямая LN касается этой окружности в точке N . Найти величину угла KMN и длину второго катета KL , если луч NK делит угол $LNМ$ пополам.

- 5. Найти все значения параметра a , при которых уравнение

$$|x^2 - 16|x|| = a(x - 9)$$

имеет ровно три различных корня.

Филологический факультет

- 1. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2 - x + \frac{3-a}{2a+1} = 0$$

не имеет решений?

- 2. Решить уравнение

$$2 \sin^2 4x - 5 \sin \left(\frac{\pi}{2} - 4x \right) + 1 = 0.$$

- 3. Решить уравнение

$$(x - 3) \cdot (x^2 + 2) = 12 - 3^{x-1} - \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{3})^{x+1}.$$

- 4. Из точки M на плоскость α опущен перпендикуляр MH длины 3 и проведены две наклонные, составляющие с перпендикуляром углы по 30° . Угол между наклонными равен 60° .

а) Найти расстояние между основаниями A и B наклонных.

б) На отрезке AB как на катете в плоскости α построен прямоугольный треугольник ABC (угол A — прямой). Найти объём пирамиды $MABC$, зная, что $\cos \angle BCM = \frac{3}{4}$.

- 5. Бюро переводов получило заказ на перевод трёх текстов одинакового объёма. Переводчица Сидорова на перевод первого и второго текстов в сумме потратила 1 час 21 минуту, а на перевод первого и третьего — 1 час 18 минут. Оказалось также, что второй текст она переводила с такой же скоростью, как в среднем первый и третий. За какое время был выполнен весь перевод?

- 6. Дана система уравнений

$$\begin{cases} y = a|x - 2a|, \\ |x| = b + |y|. \end{cases}$$

а) При каких значениях параметров a и b эта система относительно неизвестных x и y имеет бесконечно много решений?

б) На плоскости (x, y) изобразить множество точек, координаты которых таковы, что система относительно неизвестных a и b имеет ровно три решения.

Социологический факультет

- 1. Решить неравенство

$$\frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 + 2x + 15} \leq 0.$$

- 2. Решить уравнение

$$4 \sin^2 3x - 2 \cos^2(x - \pi) - \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} = \sin \left(2x - \frac{\pi}{2} \right).$$

- 3. Популярность продукта A за 2002 год выросла на 10%, в следующем году снизилась на 20%, а в конце 2004 года сравнялась с популярностью продукта B . Популярность продукта B в 2002 году выросла на 20%, затем на протяжении одного года не изменялась, а за 2004 год снизилась на 10%. Как изменилась популярность продукта A за 2004 год, если в начале 2002 года она составляла $\frac{3}{4}$ от популярности продукта B ?

- 4. В треугольнике ABC угол при вершине B равен $\frac{\pi}{2}$, а длины отрезков, соединяющих центр вписанной окружности с вершинами A и C , равны 3 и $\sqrt{2}$ соответственно. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .
- 5. Три числа, являющиеся длинами рёбер прямоугольного параллелепипеда с диагональю $2\sqrt{6}$, образуют арифметическую прогрессию. Кубы этих чисел тоже образуют арифметическую прогрессию. Найти эти числа.
- 6. Для каждого положительного значения параметра c изобразить множество тех пар (b, a) , для каждой из которых уравнение

$$-2ax^2 - bx + c + \frac{a}{8} = 0$$

имеет два различных положительных корня, и указать все значения параметра b , при каждом из которых множество соответствующих значений a является интервалом.

Институт стран Азии и Африки

- 1. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 49} \cdot (x + 5) < 0$.
- 2. Решите уравнение

$$\cos^3 x - \sin^4 x = -1.$$

- 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xyz, \\ y^2 + z^2 = 2xyz, \\ z^2 + x^2 = 2xyz. \end{cases}$$

- 4. Решите уравнение

$$(\log_3(3^{-2x} + 1) + x) \cdot (2\log_9(3^{2x} + 1) - x - 2) = 3.$$

- 5. Два круга, расстояние между центрами которых равно $\sqrt{3}$, имеют радиусы $\sqrt{3}$ и 3. Найдите отношение площади наибольшего круга, вписанного в общую часть данных кругов, к площади общей части.

- 6. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $\frac{x^2}{64} + \frac{z^2}{49}$, если величины x, y, z, w удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y - 51 = 0, \\ z^2 + w^2 + 2z + 8w - 32 = 0, \\ xw + yz + 4x - 3w + y - 2z - 70 \geq 0. \end{cases}$$

Факультет государственного управления

- 1. Фирма совершала сделки по покупке и продаже автомобилей одной марки, покупая один автомобиль по 7000 у. е. и продавая по 9000 у. е. Всего

по этим сделкам за день прошли 32 автомобиля. Сколько автомобилей фирма продала, если по итогам дня у неё образовался нулевой баланс?

- 2. Решите уравнение

$$\cos 3x - 2 \cos 6x - \cos 9x = -2.$$

- 3. Длины трёх сторон четырехугольника, вписанного в окружность радиуса 2, совпадают и равны $\sqrt{2}$. Найдите длины его диагоналей.
- 4. Брокерская фирма выставила на торги акции двух компаний: нефтяной компании — по 100 долларов за акцию и газовой компании — по 65 долларов 60 центов за акцию. Всего было 200 акций. Все акции газовой компании были проданы, а часть акций нефтяной компании осталась непроданной. Общая сумма выручки оказалась равной 13120 долларов. Найдите сумму выручки, полученной за акции газовой компании.
- 5. Найдите все значения x , удовлетворяющие неравенству

$$\max \left(\log_2(x+3), \sqrt{2x^2+x-9} \right) > 1.$$

- 6. Каково минимальное число гирь, необходимых для того, чтобы взвесить любой груз массой от 2 до 40 килограммов на рычажных (чашечных) весах, если известно, что этот груз может весить только целое число килограммов?
- 7. На плоскости Oxy найдите наименьшее расстояние между такими двумя точками с координатами (x, y) , что x и y являются целыми числами и удовлетворяют уравнению

$$9 \cdot \frac{y}{x} - \frac{x}{y} + \frac{55}{xy} = 0.$$

Высшая школа бизнеса

- 1. Решите неравенство

$$\frac{2-x}{|x+2|} \geq 1.$$

- 2. Решите уравнение

$$\log_{\frac{1}{2}}(2 \sin x) + \log_2(\sqrt{3} \cos x) = -1.$$

- 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{y+2} = 1, \\ x - y = 22. \end{cases}$$

- 4. Найдите периметр треугольника KLM , если известны координаты его вершин $K(-4; -3)$, $L(2; 5)$ и точки $P(5; 1)$, являющейся серединой стороны LM .
- 5. Сколько времени в течение суток на электронном табло вокзальных часов, которые показывают время в диапазоне от 00:00 до 23:59, присутствует хотя бы одна цифра 5?

- 6. Найдите все пары целых неотрицательных чисел $(m; n)$, являющихся решениями уравнения

$$2m^2 + 3m = 2nm + n + 41.$$

- 7. Найдите наименьшее значение выражения $2x - 4y$ на множестве переменных x, y , удовлетворяющих условию $4x^2 + 9y^2 = 36$.

- 8. Найдите все значения параметра $a \in [-6; 6]$, при которых неравенство

$$(a + 3) \cdot ((x + 1)(a + 2) + 3x) > 0$$

выполняется при любых $x \geq 0$.

2005 год

Олимпиада "Ломоносов"

Результаты победителей математического тура этой олимпиады учитывали следующие факультеты: механико-математический, ВМиК, физический, химический, почвоведения, геологический, экономический, наук о материалах.

- 1. Вычислить

$$\frac{(x - y)(x^4 - y^4)}{x^2 - y^2} - \frac{2xy(x^3 - y^3)}{x^2 + xy + y^2}$$

при

$$x = 1, \underbrace{2 \dots 22}_{46}, \quad y = -2, \underbrace{7 \dots 78}_{45}.$$

- 2. Решить неравенство

$$\frac{3 \cdot 2^{1-x} + 1}{2^x - 1} \geq \frac{1}{1 - 2^{-x}}.$$

- 3. Найти площадь трапеции $ABCD$ с боковой стороной $BC = 5$, если расстояния от вершин A и D до прямой BC равны 3 и 7 соответственно.

- 4. Решить уравнение

$$\log_4(4 \sin^2 2x) = 2 - \log_2(-2 \operatorname{tg} x).$$

- 5. На окружности взята точка A , на ее диаметре BC — точки D и E , а на его продолжении за точку B — точка F . Найти BC , если $\angle BAD = \angle ACD$, $\angle BAF = \angle CAE$, $BD = 2$, $BE = 5$ и $BF = 4$.

- 6. Решить неравенство

$$5|x| \leq x(3x + 2 - 2\sqrt{8 - 2x - x^2}).$$

- 7. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 5, 12 и 13, а ее высота образует с высотами боковых граней (опущенными из той же вершины) одинаковые углы, не меньшие 30° . Какой наибольший объем может иметь такая пирамида?

- 8. Найти все значения a , при которых уравнение

$$4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$$

имеет хотя бы один корень.

- 9. Группа отдыхающих в течение 2 ч 40 мин каталась на моторной лодке по реке с постоянной скоростью (относительно воды) попеременно то по течению, то против: в каждую сторону — не меньше, чем по 1 ч. В итоге лодка прошла путь в 40 км (относительно берега) и, отчалив от пристани A , причалила к пристани B на расстоянии 10 км от A . В какую сторону текла река? Какова при этих условиях максимальная скорость ее течения?

- 10. При каждом натуральном n тело Φ_n в координатном пространстве задано неравенством

$$3|x|^n + |8y|^n + |z|^n < 1,$$

а тело Φ — объединение всех тел Φ_n . Найти объем Φ .

Механико-математический факультет

- 1. Согласно расписанию, автобус курсирует по маршруту из пункта A в пункт B и обратно с постоянной скоростью и без остановок. На пути из A в B он был вынужден на некоторое время остановиться, поэтому на обратном пути он увеличил скорость на 25%. Приехав в A с 10-минутным отклонением от расписания, он уменьшил свою последнюю скорость на 24% и прибыл в B вовремя. Какова была продолжительность вынужденной остановки?

- 2. Найти $\log_2 \frac{2x}{2^x}$ при условии

$$|\log_{\sqrt{2}} x^{\frac{x}{2}} - 2 \log_2 x| + ||2 - x| - |\log_2 x|| \leq (x - 2) \log_8 x^3.$$

- 3. Решить неравенство

$$\frac{3 - x - \sqrt{5 - x^2}}{\cos \frac{2x - 7}{4} \cos \frac{x - 5}{4}} \geq 0.$$

- 4. На основании BC трапеции $ABCD$ взята точка E , лежащая на одной окружности с точками A , C и D . Другая окружность, проходящая через точки A , B и C , касается прямой CD . Найти BC , если $AB = 12$ и $BE : EC = 4 : 5$. Найти все возможные значения отношения радиуса первой окружности к радиусу второй при данных условиях.
- 5. Пусть X — сумма корней уравнения

$$a \cos x = \sqrt{2} + 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$$

на промежутке $[0; 2\pi)$, а Y — сумма корней уравнения

$$a \cos 2y - 2 \sin 2y = a - 3 \sin y$$

на том же промежутке. Найти все значения a , при которых

$$\operatorname{ctg} \frac{X - Y}{2} = \sqrt{3}.$$

- 6. Найти объем тетраэдра $ABCD$ с ребрами $AB = 3$, $AC = 5$ и $BD = 7$, если расстояние между серединами M и N его ребер AB и CD равно 2, а прямая AB образует равные углы с прямыми AC , BD и MN .

Факультет вычислительной математики и кибернетики (олимпиада, апрель 2005)

Результаты олимпиады засчитывались при приеме на контрактное отделение.

- 1. Решите неравенство

$$6 \log_{2x} x + 2 \log_{4 \cdot \sqrt{x}} (2x) \geq 1.$$

- 2. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sin 2(x + y) = 1, \\ xy = 9. \end{cases}$$

- 3. Найдите все пары целых x и y , удовлетворяющие равенству

$$4x^2 - 2xy + 2y^2 + y - 2x - 1 = 0.$$

- 4. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно. Отрезки AN и CM пересекаются в точке L . Площади треугольников AML , CNL и ALC равны соответственно 1, 6 и 4. Найдите площадь треугольника MBN .

- 5. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Известно, что длина перпендикуляра, опущенного из основания H высоты пирамиды SH на грань SDC , равна $\sqrt{6}$, а угол наклона бокового ребра SB к плоскости основания равен $\frac{\pi}{3}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $SABCD$.

- 6. Решите уравнение

$$12 \cos 2x + 8 |\sin x| \sqrt{3 + |\sin x| - 3 \cos 2x} = 11.$$

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- 1. Решите неравенство

$$\log_2 \left(\frac{x^2 + |x - 3| + 3}{x + 1} \right)^2 - |\log_2 x - 2| > \log_2 x + 2.$$

- 2. Решите уравнение

$$\sqrt{\operatorname{ctg} x + 1} = -\sqrt{15} \cdot \sin x.$$

- 3. Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, являются арифметическими прогрессиями, $a_{11} = 32$, $b_{21} = 43$. Последовательность $\{c_n\}$ определяется равенствами $c_n = (-1)^n \cdot a_n + (-1)^n \cdot b_n$. Сумма первых сорока членов последовательности $\{c_n\}$ равна 100, а сумма первых ее двадцати

трех членов равна -60 . Найдите b_{40} и сумму первых ста членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$.

- 4. На стороне AB выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбрана точка M так, что $\angle AMD = \angle ADB$ и $\angle ACM = \angle ABC$. Утроенный квадрат отношения расстояния от точки A до прямой CD к расстоянию от точки C до прямой AD равен 2, $CD = 20$. Найдите радиус вписанной в треугольник ACD окружности.
- 5. Найдите все значения параметра a , принадлежащие отрезку $[0, \pi]$, при которых уравнение

$$\sin^5(3x + a) = \cos(\pi \cdot [x])$$

имеет на отрезке $[1, \pi]$ нечетное число решений. (Здесь $[x]$ — целая часть числа x , т.е. наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $[x] \leq x$).

- 6. На гранях ABC , ABD , ACD и BCD тетраэдра $ABCD$ выбраны соответственно точки K , L , M и N так, что $KL \parallel CD$, $KM \parallel BD$, $KN \parallel AD$. Отношение объема тетраэдра $ABCD$ к объему тетраэдра $KLMN$ равно 64. Известно, что

$$2(AD \cdot KM + BD \cdot KN) = AD \cdot BD.$$

Найдите отношение площадей треугольников ABD и KMN .

Химический факультет

- 1. Решить уравнение $|2x + 1| = |x + 2|$.
- 2. Решить неравенство $\sqrt{3} \cdot 4^x \leq \sqrt{2} \cdot 9^x$.
- 3. Решить тригонометрическое уравнение $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} 4x + \cos 5x$.
- 4. Найти число n сторон выпуклого n -угольника, если каждый его внутренний угол не менее 143° и не более 146° .
- 5. Найти все пары целых чисел (x, y) , удовлетворяющих уравнению $\sqrt{2x - y - 3} + \sqrt{2y - x + 3} = 2\sqrt{3 - x - y}$.
- 6. При каких значениях параметра a уравнение

$$|x| + \left| \frac{x+1}{3x-1} \right| = a$$

имеет ровно три решения?

Биологический факультет

- 1. Решить уравнение $x^2 + 2|x| - 3 = 0$.

- 2. Решить уравнение

$$\cos x - \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}.$$

- 3. Диагонали трапеции равны 12 см и 6 см, а сумма длин оснований равна 14 см. Найти площадь трапеции.

- 4. Решить неравенство

$$\sqrt{x-1} < 3-x.$$

- 5. На беговой дорожке стадиона длиной 400 м одновременно со старта в одном направлении начинают забег два спортсмена на дистанцию 10 км. Каждый из них бежит со своей постоянной скоростью. Первый спортсмен приходит на финиш на 16 мин 40 с раньше второго и через 43 мин 20 с после того, как он второй раз на дистанции (не считая момента старта) обогнал второго спортсмена. Известно, что скорость первого спортсмена больше $100 \frac{\text{м}}{\text{мин}}$. Сколько всего раз первый спортсмен обогнал второго на дистанции после старта?

- 6. Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 22y + 122} = 2\sqrt{37} - \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2}, \\ \log_{(x+1)} 4 + \log_4 y = 0. \end{cases}$$

- 7. Задана функция f , причем $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для всех рациональных чисел x, y . Известно, что $f(10) = -\pi$. Найти $f(-\frac{2}{7})$.

Факультет почвоведения

- 1. Решить уравнение

$$(6x-15)^7 = (x-1)^{14}.$$

- 2. Решить уравнение

$$\sin(\sqrt{3} \arcsin x) = 1.$$

- 3. Решить неравенство

$$|x-1| \leq |x|.$$

- 4. Грузовики трех типов: A , B и C возили кирпич. В первый день работали по пять грузовиков каждого типа и выполнили весь объем работы за 3 часа 12 минут. Во второй день за 6 часов 40 минут этот же объем работы выполнили по два грузовика типов A и B и четыре грузовика типа C . За сколько часов был бы выполнен весь объем работы, если бы кирпич возили два грузовика типа A и два грузовика типа B ?

- 5. Для каких значений параметра p отношение суммы коэффициентов многочлена $(px^2 - 7)^{18}$ к его свободному члену минимально?

- 6. На плоскости даны точки с координатами $A(1,2)$, $B(2,1)$, $C(3,-3)$, $D(0,0)$. Они являются вершинами выпуклого четырехугольника $ABCD$. В каком отношении точка пересечения диагоналей S делит диагональ AC ?

Географический факультет

- 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 12 \sin^2 x - \sin^2 y = 3, \\ 6 \sin x + \cos y = -2. \end{cases}$$

- 2. Произведение длины средней линии трапеции и длины отрезка, соединяющего середины ее диагоналей, равно 25. Найти площадь трапеции, если ее высота втрое больше разности оснований.

- 3. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{1-x}}(1+5x) \geq -2.$$

- 4. Найти периметр фигуры, точки которой на координатной плоскости
- (x, y)
- удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y > ||x - 2| - 1|, \\ x^2 + y^2 < 4x + 2y - 3. \end{cases}$$

- 5. В цехе имелось
- N
- одинаковых станков, которые, работая вместе, вытачивали в день 5850 готовых деталей. После модернизации число производимых в день каждым станком готовых деталей возросло на 20%. Это позволило по крайней мере без сокращения общего объема продукции цеха уменьшить число станков максимум на 4. Найти
- N
- .

- 6. Угол между прямыми, каждая из которых содержит по одной образующей конуса, равен
- 45°
- . Прямая, перпендикулярная обеим этим образующим, пересекает плоскость основания конуса под углом
- $\frac{\pi}{8}$
- . Найти угол боковой развертки конуса, если известно, что он больше
- 270°
- .

Факультет психологии

- 1. Решить уравнение

$$|x - 2| + 2|x + 1| = 9.$$

- 2. Решить неравенство

$$\frac{4^x + 5}{2^x - 11} \geq -1.$$

- 3. Решить уравнение

$$\sqrt{2 \cos^2 x - \sqrt{3}} + \sqrt{2} \sin x = 0.$$

- 4. В выпуклом четырехугольнике
- $ABCD$
- диагонали
- BD
- и
- AC
- равны стороне
- AB
- . Найти величину угла
- BCD
- и сторону
- AB
- , если угол
- CDA
- прямой,
- $BC = 4$
- ,
- $AD = 5$
- .

- 5. Зенон не раз наблюдал забавную игру Ахилла с черепахой: Ахилл и черепаха приближались друг к другу вдоль тропинки, стартуя с разных концов тропинки. Двигались они только навстречу друг другу, причем,

когда черепаха стояла, Ахилл шел навстречу ей, а когда черепаха ползла навстречу Ахиллу, Ахилл стоял в течение всего времени ее движения. Продвигались они по тропинке друг к другу каждый со своей постоянной скоростью, одной и той же в разных играх, причем скорость идущего Ахилла была в 50 раз больше скорости ползущей черепахи. Игра заканчивалась, когда Ахилл и черепаха сходились в одной точке тропинки.

В первой игре, начав сближаться по первой тропинке, они сошлись не ранее, чем через 15 минут. Во второй игре, сближаясь по второй тропинке, они сошлись не позже, чем через полторы минуты. В третьей игре они сошлись по третьей тропинке за 11 минут, причем в ходе этой игры Ахилл двигался в общей сложности в течение 1 минуты, а черепаха — в течение 10 минут. Известно, что сумма длин первой и третьей тропинок равна длине второй тропинки.

Каково отношение расстояния, пройденного Ахиллом навстречу черепахе за время всех трех игр, к расстоянию, на которое продвинулась черепаха навстречу Ахиллу за время всех трех игр?

- 6. Найти все значения параметра a , при каждом из которых функция

$$f(x) = \frac{4 \sin x + a}{4a - 2 \sin x}$$

принимает все значения из отрезка $[0; 1]$.

Социологический факультет

- 1. Решить уравнение

$$\sqrt{16 + x^2} - 16x = 4.$$

- 2. Решить уравнение

$$2 \cdot 4^{3x} - 5 \cdot 8^x + 2 = 0.$$

- 3. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия содержит член $b_n = \frac{1}{8}$. Отношение суммы членов прогрессии, стоящих перед b_n , к сумме членов, стоящих после b_n , равно 14. Найти n , если сумма всей прогрессии равна 2.

- 4. Высота треугольника длиной 1 делит угол треугольника в отношении $2 : 1$ и делит основание треугольника на части, большая из которых равна $\frac{4}{3}$. Определить площадь треугольника.

- 5. Решить неравенство

$$\log_{0,5}(\sqrt{5-x} - x + 5) > 0.$$

- 6. Студенты, проживающие в одной комнате, решили купить электрический чайник, при этом каждый внес одинаковую сумму. Однако в последний момент один студент отказался, и каждому из оставшихся пришлось добавить 100 рублей. Сколько студентов проживало в комнате и какова цена чайника, если известно, что она заключена в пределах от 1000 до 1500 рублей?

Филологический факультет

- 1. Решить уравнение $|x^2 - 3|x| + 1| = 1$.
- 2. На вступительном экзамене по математике 15% поступающих не решили ни одной задачи, 144 человека решили задачи с ошибками, а число верно решивших все задачи относится к числу не решивших вовсе, как 5 : 3. Сколько человек экзаменовалось по математике в этот день?
- 3. Решить неравенство $\log_2(x+1) > \log_{x+1} 16$.
- 4. Найти площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника, катеты которого являются корнями уравнения $2x^2 - 6x + 1 = 0$.
- 5. Решить уравнение $2 + \sin x = 3 \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.
- 6. Биссектриса CD угла ACB при основании равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) делит сторону AB так, что $AD = BC$. Найти длину биссектрисы CD и площадь треугольника ABC , если его основание BC равно 2.
- 7. При каких целых a неравенство $2 \log_{\frac{1}{2}} a - 3 + 2x \log_{\frac{1}{2}} a - x^2 < 0$ верно для любого значения x ?

Геологический факультет

- 1. Решите неравенство $(|x| - 1)(2x^2 + x - 1) \leq 0$.
- 2. Решите неравенство $\sqrt{-x^2 - x + 6} - x \geq 2$.
- 3. В треугольнике ABC угол C прямой, тангенс угла A равен $\frac{1}{4}$, медиана BD равна $\sqrt{5}$. Найдите площадь треугольника ABD и радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABD .
- 4. Найдите наименьший корень уравнения $\sqrt{\cos 2x + x - 11} = \sqrt{x - 15 - 5 \cos x}$.
- 5. В арифметической прогрессии квадрат суммы третьего и четвертого ее членов равен сумме второго и пятого ее членов. Чему равна сумма первых шести членов этой прогрессии?
- 6. Решите неравенство $\log_x \left(x + \frac{1}{3} \right) \leq \log_{\sqrt{2x+3}} \left(x + \frac{1}{3} \right)$.

- ▶ 7. Найдите все значения, которые может принимать сумма $x+a$ при условии $|2x+4-2a|+|x-2+a|\leq 3$.
- ▶ 8. В треугольной пирамиде $SABC$ плоские углы ABC и SAB прямые, двугранный угол между плоскостями ABS и ABC равен $\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{10}}{3}\right)$. Найдите длину высоты пирамиды, опущенной из вершины B на плоскость ASC , если $BC=7$, $AB=4$.

Экономический факультет (отделение экономики)

- ▶ 1. Решите уравнение

$$\sqrt{\log_{\frac{1}{9}} \operatorname{ctg} \frac{2x}{9}} + \sqrt{\log_{\frac{1}{8}} \sin 4x} = 0.$$

- ▶ 2. Найдите сумму всех целых значений, которые принимает функция $y = \frac{x}{\sqrt{5}} - \frac{x^2}{20} + 6$ при $x \in [2; 12]$.
- ▶ 3. Вновь созданное акционерное общество продало населению 1000 своих акций, установив скидку 10% на каждую пятую продаваемую акцию и 25% на каждую тринадцатую продаваемую акцию. В случае, если на одну акцию выпадают обе скидки, то применяется большая из них. Определите сумму, вырученную от продажи всех акций, если цена акции составляет 1000 рублей.
- ▶ 4. Решите неравенство $\log_{2+\sqrt{5}}(4-x) - \log_{9-4\sqrt{5}}(4x^2+28x+49) + \log_{\sqrt{5}-2}(x^2+x-6) \leq 0$.
- ▶ 5. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон в точках K , N и M . Известно, что в треугольнике KNM угол $\angle M$ равен 75° , произведение всех сторон равно $9+6\sqrt{3}$, а вершина K делит отрезок AC пополам. Найдите длины сторон треугольника ABC .
- ▶ 6. Найдите все рациональные решения уравнения $\sqrt{y \cdot (x+1)^2 - x^2 + x + 1} + \log_{\left(\frac{y+21}{21}\right)} \cos^2 \pi y = 0$.
- ▶ 7. Фигура F задается на координатной плоскости неравенством
$$\frac{3\pi^2 - 2 \arcsin\left(\frac{y-x+9}{13}\right) \cdot \arccos\left(\frac{10+2x+5y}{18}\right)}{|x-4| \cdot \left(\left|\sqrt{9\sqrt{128}-97+x}\right| + |y+5|\right)} \geq 0.$$

В каких пределах изменяются площади всевозможных кругов, целиком принадлежащих F ?

Московская школа экономики

- ▶ 1. Решите уравнение $|2x-4|+4=2x$.
- ▶ 2. Решите неравенство $\sqrt{x^2+2x}-x>1$.
- ▶ 3. Решите уравнение $1+\log_4(x+2)^2=\log_2(2x+8)$.

- 4. Найдите все решения уравнения

$$6 \cos \left(\frac{15\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(\frac{x}{2} \right) - \cos x = 3,$$

принадлежащие отрезку $[-2; 10,99]$.

- 5. Найдите четыре числа, которые образуют арифметическую прогрессию, если сумма крайних равна 18 и второе число меньше третьего на 20%.

- 6. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 < 5, \\ 4y \leq x + 11. \end{cases}$$

- 7. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается стороны BC в точке M . Найдите площадь треугольника ABC , если $AC = 21$, $BM = 9$, а угол ABC равен 60° .

- 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$(a-1) \cdot 4^x + (2a-3) \cdot 6^x = (3a-4) \cdot 9^x$$

имеет единственное решение?

Институт стран Азии и Африки

- 1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} \leq 1.$$

- 2. Решите уравнение $\cos 4x = 4 \cos x \cdot \cos 2x - 1$.

- 3. Решите уравнение

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+4x+3} = \sqrt{(x+2)^3}.$$

- 4. Магазин закупил некоторое количество товара и начал его реализацию по цене на 25% выше цены, назначенной производителем, чтобы покрыть затраты, связанные с его транспортировкой, и другие дополнительные расходы. Оставшуюся после реализации часть товара магазин уценил на 16% с тем, чтобы покрыть только затраты на закупку этой части товара у производителя и его транспортировку. Сколько процентов от цены, назначенной производителем, составляла цена транспортировки товара?

- 5. Решите неравенство

$$\log_{(4|x|+1)}(6x+2) - \log_{(6x+2)}(4|x|+1) < 0.$$

- 6. В выпуклом четырехугольнике с вершинами в точках A, B, C, D заданы длины отрезков $AD = 2$, $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 2(\sqrt{3} - 1)$. Величины углов DAB и ABC равны $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{3}$ соответственно. Вычислите все углы четырехугольника.

- 7. Фигура на плоскости (x, y) состоит из всех точек, через которые не проходит ни одна из кривых, задаваемых соотношением

$$(p^4 + 4p^2 + 16)^2 + (x^2 - y^2)^2 = \\ = 16(p^3 + 4p)xy + 2(p^4 + 12p^2 + 16)(x^2 + y^2)$$

при различных действительных значениях p . Найдите длину линии, ограничивающей эту фигуру.

Факультет государственного управления

- 1. Можно ли разделить сумму в 196 рублей на 16 разных частей так, чтобы ближайшие по величине части отличались на 50 копеек?

- 2. Решите неравенство

$$1 < \frac{\sqrt{2}(x-4)}{\sqrt{x^2-8x+17}}.$$

- 3. В четырехугольнике $ABCD$ найдите точку E так, чтобы отношение площадей треугольников EAB и ECD было равно $1/2$, а треугольников EAD и EBC — $3/4$, если известны координаты всех его вершин: $A(-2, -4)$, $B(-2, 3)$, $C(4, 6)$, $D(4, -1)$.

- 4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x - \sin 1 = 0, \\ \cos x - \cos 1 = 0. \end{cases}$$

- 5. Тема сделал несколько мелких покупок в супермаркете, имея при себе сто рублей. Давая сдачу с этой суммы, кассир ошиблась, перепутав местами цифры, и выплатила рублями то, что должна была вернуть копейками, и, наоборот, копейками то, что полагалось вернуть рублями. Купив в аптеке набор пипеток за 1 руб. 40 коп., Тема обнаружил ошибку кассира и, пересчитав деньги, нашел, что оставшаяся у него сумма втрое превышает ту, которую ему должны были вернуть в супермаркете. Какова стоимость всех покупок Темы?

- 6. Найдите все значения a , для которых при любом положительном b уравнение

$$a \log_{\left(\frac{1}{x}-2\right)} 4 = \log_2 \left(\frac{1}{x}-2\right) - b$$

имеет хотя бы одно решение, меньшее $\frac{1}{3}$.

- 7. Для того, чтобы сделать полный круг по кольцевому маршруту, автомобилю требуется 150 л бензина. На маршруте расположены пять промежуточных пунктов, в каждом из которых имеется запас в 30 л бензина. Покажите, что найдется пункт, в котором автомашина с пустыми баками и достаточным запасом пустых канистр может заправиться, стартовать и, пополняя запас бензина в четырех встречных пунктах, сделать полный круг.

Факультет глобальных процессов

- 1. В турнире борцов участвуют 127 спортсменов. Борец выбывает из соревнований сразу после поражения в поединке. Сколько поединков требуется провести, чтобы выявить победителя турнира?
- 2. Решите неравенство

$$\frac{1}{2x^2 + 3x} \leq \frac{1}{3x - 2x^3}.$$

- 3. Решите неравенство

$$\log_{(0,5 - |2x^2 - 5x + 2|)}(0,5 + |8x^2 - 2x - 1|) \geq 1.$$

- 4. Найдите площадь трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$), вписанной в окружность с центром в точке O , если ее высота равна 2, а угол COD равен 60° .
- 5. Выясните, верно ли следующее утверждение: множество значений функции $y = \cos 2x - 3 \sin x$ принадлежит отрезку $[-4; \sqrt{5}]$. Ответ надо обосновать.
- 6. Общий процент прибыли за весь товар, проданный в трех магазинах, расположенных в разных районах города, составил 26,8%. Через первый магазин было продано 60% всего товара, через второй — 40% оставшейся части товара. С какой прибылью продан товар через третий магазин, если прибыль от продажи в первом составила 30%, а во втором — 25%?
- 7. Верхняя грань $ABCD$ куба $ABCD A' B' C' D'$ ($AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ — боковые ребра) является одновременно основанием правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, у которой высота вдвое меньше длины ребра куба. Найдите угол между прямыми $A'B$ и AS .
- 8. Переменные x, y связаны условием $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 10 = 0$. Найдите все значения параметра a , при которых разность между наибольшим и наименьшим значением выражения $2ax - 3y - 10$ больше 12.

2006 год

Олимпиада "Ломоносов"

- 1. Вычислить

$$\log_4 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{16}}}}_{40}.$$

- 2. Что больше: $\operatorname{tg} \left(\frac{11\pi}{6} \right)$ или меньший корень квадратного трехчлена $11x^2 - 17x - 13$?

- 3. Решить уравнение

$$\cos(x^2 + x) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0.$$

- 4. Точки A , B и C лежат на одной прямой. Отрезок AB является диаметром одной окружности, а отрезок BC — диаметром второй окружности. Прямая, проходящая через точку A , пересекает первую окружность в точке D и касается второй окружности в точке E . Известно, что $BD = 9$, $BE = 12$. Найти радиусы окружностей.

- 5. Из пункта A в пункт B в 8:00 выехал велосипедист, а через некоторое время из B в A вышел пешеход. Велосипедист прибыл в B через 6 часов после выхода оттуда пешехода. Пешеход пришел в A в 17:00 того же дня. Скорости велосипедиста и пешехода постоянны. Какую долю пути из A в B проехал велосипедист до его встречи с пешеходом?

- 6. Решить неравенство $\sqrt{4-x} - 2 \leq x|x-3| + 4x$.

- 7. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\cos 2x - 2a \sin x - |2a - 1| + 2 = 0$$

имеет решения и все его положительные корни образуют арифметическую прогрессию.

- 8. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SA перпендикулярно плоскости ABC , $\angle SCB = 90^\circ$, $BC = \sqrt{5}$, $AC = \sqrt{7}$. Последовательность точек O_n строится следующим образом: точка O_1 — центр сферы, описанной около пирамиды $SABC$, и для каждого натурального $n \geq 1$ точка O_n — это центр сферы, описанной около пирамиды $O_{n-1}ABC$. Какую длину должно иметь ребро SA , чтобы множество $\{O_n\}$ состояло ровно из двух различных точек?

- 9. На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник $m \times n$ клеток, причем числа m и n взаимно просты и $m < n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 его клеток. Найти все возможные значения m и n .

- 10. Решить неравенство $4(1 - \operatorname{tg} x)^{2004} + (1 + \operatorname{tg} x)^{2006} \geq 2^{2006}$.

Механико-математический факультет

- 1. Игорь и Володя решали задачу: некоторое заданное трехзначное число прологарифмировать по основанию 2, из полученного числа вычесть некоторое заданное натуральное число, а затем разность поделить на то же самое натуральное число. Игорь перепутал и в первом действии прологарифмировал по основанию 3, а Володя посчитал правильно. Когда они сверили свои результаты, оказалось, что полученные числа взаимно обратны. Найти исходное трехзначное число.

- 2. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{1+3^{-x}}}{\sqrt{1+3^{-x}} - \sqrt{1-3^{-x}}} - \frac{3^{-x} - 1}{\sqrt{1-9^{-x}} + 3^{-x} - 1} \geq \frac{1 + \sqrt{1-9^{-x}}}{3^{-x}}$$

- 3. Две сферы касаются друг друга внешним образом. Радиус одной сферы в три раза больше радиуса другой. Скрещивающиеся прямые a и b параллельны некоторой плоскости, проходящей через центры сфер. Каждая из прямых a и b касается обеих сфер, а расстояние между этими прямыми равно диаметру меньшей сферы. Найти угол между прямыми a и b .
- 4. Решить уравнение $|1 - 2\sin x + \cos x| + 2\sin x + 1 = \cos 2x$.
- 5. Отрезок KB является биссектрисой треугольника KLM . Окружность радиусом 5 проходит через вершину K , касается стороны LM в точке B и пересекает сторону KL в точке A . Найти угол K и площадь треугольника KLM , если $ML = 9\sqrt{3}$, $KA : LB = 5 : 6$.
- 6. Найти минимальное значение выражения $|2x - y - 1| + |x + y| + |y|$, где x и y — произвольные действительные числа.

Факультет вычислительной математики и кибернетики
(олимпиада, апрель 2006)

- 1. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} (x + 2y)^{x-y} = 25, \\ 2 \cdot \log_5(x + 2y) + x - y = 4. \end{cases}$$

- 2. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{x^2 - 22x + 121}{x^2 - 24x + 140}} \geq 50x - 2x^2 - 309.$$

- 3. В треугольнике ABC проведена медиана AM . Известно, что $AM : BC = \sqrt{13} : 2$, а угол BAC равен 30° . Найдите углы ABC и ACB , считая, что угол ABC не меньше угла ACB .
- 4. Найдите все решения неравенства

$$\operatorname{tg} x > \frac{9 - 3 \cos 2x}{3 \sin 2x - 2},$$

удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{8} \leq x < \frac{\pi}{2}$.

- 5. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является трапеция $ABCD$, у которой $AD \parallel BC$. На ребре SC выбрана точка K так, что $CK : KS = 2 : 5$. Плоскость, проходящая через точки A , B и K , пересекает ребро SD в точке L . Известно, что объемы пирамид $SABKL$ и $SABCD$ относятся, как $95 : 189$. Найдите отношение длин оснований трапеции $ABCD$.

- 6. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$2(1 + \cos 2x)^2 \cdot |\sin(2x + a)| =$$

$$= 2 \cos 2x - 2 \cos(4x + 2a) - \cos(6x + 2a) - \cos(2x + 2a)$$

имеет решения.

**Факультет вычислительной математики и кибернетики
(отделение специалистов)**

- 1. Из города A в город B в 6 часов утра выехал грузовой автомобиль. Шесть часов спустя из города B в город A по той же дороге выехал навстречу ему легковой автомобиль. Автомобили движутся с постоянными скоростями. По предварительной договоренности они одновременно приехали в поселок C , расположенный на дороге между A и B . Разгрузка и оформление документов длились пять часов. Затем грузовой и легковой автомобили продолжили каждый свой путь. Легковой и грузовой автомобили прибыли соответственно в города A и B одновременно в 23 часа того же дня. Найдите время прибытия автомобилей в населенный пункт C .

- 2. Решите уравнение

$$\log_{\frac{13-|2x-1|}{12}} (\sin 2x - 2 \sin x + 1) = \log_{\frac{13-|2x-1|}{12}} (\cos x).$$

- 3. Решите неравенство $11\sqrt{2x - \sqrt{48x - 144}} > 2x - 12$.
- 4. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC . Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC . Расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC соответственно равны 10, 8 и 6. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.
- 5. При каждом значении параметра d решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - y^2 - dx + 3dy - 2d^2} + \sqrt{x - y + d} \cdot \sqrt{4 - 2x + d} + \\ + \sqrt{-2x^2 - 2xy + (5d + 4)x + (d + 4)y - 2d^2 - 8d} = 4.$$

- 6. Две касающиеся друг друга сферы вписаны в двугранный угол. Первая сфера касается граней этого двугранного угла в точках A и B соответственно. Вторая сфера касается одной из граней этого двугранного угла в точке C . Точки A и C лежат в разных гранях. Первая сфера пересекает отрезок AC в точке K , отличной от A , а вторая сфера пересекает тот же отрезок в точке L , отличной от C . Длина отрезка KL в 7 раз меньше длины отрезка AC . Найдите длину отрезка AC , если известно, что расстояние между точками B и C равно $2\sqrt{7}$.

Химический факультет и факультет наук о материалах

- 1. Решить неравенство $\sqrt{1 - |x|} \geq x - 2$.
- 2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{x+3}{x-2} \right) > 2$.
- 3. Решить уравнение $\cos x + \sin x + \cos 3x + \sin 3x = -\sqrt{6} \cos x$.
- 4. Биссектрисы внутренних углов в параллелограмме $ABCD$ образуют четырехугольник $EFGH$, каждая вершина которого образована как пересечение двух биссектрис. Найти сумму квадратов всех сторон в четырехугольнике $EFGH$, если $AB = CD + \frac{3}{2}$.
- 5. В прямой круговой конус вписан шар. Отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара равно $49 : 12$. Найти отношение удвоенного объема шара к объему конуса.
- 6. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{(x^2 + |x|)(x^2 + 5|x| + 6)} + 1 = 3|x| - 3ax - a^2 + 1$ имеет корни как большие -3 , так и меньшие -3 ?

Биологический факультет

- 1. Решить неравенство $\sqrt{x+1}(x^2 + 3x - 4) \geq 0$.
- 2. Решить уравнение $3 \cos 2x + 11 \sin x = 7$.
- 3. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$, $BC = 3$, $CD = 2$, $AD = 1$ вписан в круг. Найти радиус этого круга.
- 4. Решить уравнение $\arcsin(2x+1) + \log_3(2 \arcsin(2x+1)) - 3 \arccos(6x+3) + \log_{\frac{1}{3}} \arccos(6x+3) = 0$.
- 5. Из пунктов A и B , расстояние между которыми равно 2 км, вниз по течению реки одновременно начинают движение соответственно плот и лодка. В тот же момент времени из пункта B навстречу плоту начинает движение катер. Собственная скорость лодки равна скорости течения, собственная скорость катера в два раза превышает скорость течения. Встретив плот, катер мгновенно разворачивается и следует до встречи с лодкой, после чего снова разворачивается и движется в сторону плота до встречи с ним, затем опять к лодке и т.д. Сколько раз катер встретит плот за время, в течение которого плот преодолеет расстояние, равное 1000 км?
- 6. В кубе $ABCD A' B' C' D'$ со стороной 8 проведена диагональ AC' и на ней отмечена точка E так, что $AE = 5$. Через точку E проведена плоскость, перпендикулярная AC' . Найти площадь образовавшегося сечения куба.

Факультет почвоведения

- 1. Найти $\sin\left(\frac{5\pi}{8} + 2\alpha\right)$, если известно, что $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$.

- 2. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} = 2\sqrt{x^3}.$$

- 3. Решить неравенство

$$(3\sqrt{x})^{\log_2 x} \geq 1.$$

- 4. Из деревни в одном и том же направлении выходят три пешехода: второй — через 2 минуты после первого, а третий — через 3 минуты после второго. Через 5 минут после своего выхода из деревни третий пешеход догнал второго, а еще через 2 минуты он догнал первого пешехода. Через сколько времени после своего выхода из деревни второй пешеход догонит первого?
- 5. Найти наименьшее положительное число α , при котором синус α градусов равен синусу α радиан.
- 6. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 9$, $BC = 8$, $AC = 7$ и AD — биссектриса угла BAC . Окружность проходит через точку A , касается стороны BC в точке D и пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно. Найти длину отрезка EF .
- 7. Определить, при каких значениях параметра b при любых значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x + 6y + 4 = 0, \\ y + ax + ab = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения (x, y) .

Географический факультет

- 1. Решить уравнение

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 3(x - 1).$$

- 2. Числа y и z таковы, что последовательность $1, \sqrt{y}, \sqrt{z}$, а также последовательность $1, y - 1, z - y$ являются арифметическими прогрессиями. Найти разность второй прогрессии.

- 3. Решить уравнение

$$2 \sin x - \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x - 1 = 0.$$

- 4. Длина дороги, соединяющей два населенных пункта, равна 280 километров. Легковой автомобиль проезжает дорогу за 4 часа, а грузовик —

за 5 часов. По дороге оба автомобиля движутся с постоянными скоростями, кроме участков, где в соответствии с ограничениями их скорость равна 40 километров в час. При отсутствии этих ограничений скорости легковой автомобиль проезжал бы дорогу на 1 час и 10 минут быстрее грузовика. Найти а) суммарную длину участков, где скорость ограничена 40 километрами в час; б) скорости легкового автомобиля и грузовика.

- 5. Периметр трапеции $ABCD$ равен 44. Окружность пересекает основание AB в точках K и L , сторону BC — в точках M и N , основание CD — в точках P и R , сторону AD — в точках S и T , причем $AK < AL$, $CN < CM$, $CP < CR$, $AT < AS$. Известно, что $KL = MN = 1$, $PR = ST = 7$, $AK = 5$, $CP = \frac{1}{2}$. Найти длины оснований трапеции.

- 6. При каких значениях параметра c число решений уравнения

$$2x \arcsin(\sin x) = c \cdot 3^{\log_3 x} + 3$$

конечно?

Факультет психологии

- 1. Решить уравнение

$$|7^x - 3| = 7^x + 1.$$

- 2. Решить неравенство

$$\sqrt{\log_{x-1}(x-2)} < \sqrt{2}.$$

- 3. Решить уравнение

$$\log_2(3|\sin x| - |\cos x|) + \log_2 |\cos x| = 0.$$

- 4. Прямая, проходящая через точку A , пересекает окружность в точках B и C (точка B лежит между точками A и C). Другая прямая, проходящая через точку A , пересекает окружность в точках D и E (точка D лежит между точками A и E). Известно, что продолжения отрезка BD за точку D и отрезка CE за точку E пересекаются в точке F . Кроме того, $FE = 1$, $AC = 2AE$. Найти FD .

- 5. При всех a решить систему неравенств

$$\begin{cases} |2x + 2a| > |x| + a, \\ ax < 0. \end{cases}$$

- 6. Решить уравнение

$$9 \cos 2x + 9 \cos 6x = 36 \cos x \cos 3x + 140\sqrt{3} \sin x \sin 2x - 162.$$

Филологический факультет

- 1. Решить неравенство

$$\frac{5-4x}{|x-2|} \leq |2-x|.$$

- 2. Окружности радиусов 7 и 3 касаются внутренним образом. В большей окружности существуют ровно три различные хорды, имеющие одинаковую длину и касающиеся меньшей окружности. Найдите длины отрезков, на которые эти хорды делятся точками касания.

- 3. Найдите все решения (x, y, z) уравнения

$$x^2 - 2x \sin \pi y - \cos 2x + 2 \cos^2 x + \sqrt{-4xz - z^2 - 3} = \\ = (1 + 2xz) \log_2^2 \frac{2y}{z}.$$

- 4. Накануне экзамена Лиза и ее товарищ искали на Воробьевых горах четырехлистный клевер, приносящий, по народной примете, удачу. В первый день товарищ нашел на 20 процентов больше четырехлистников, чем Лиза. Во второй день, наоборот, товарищ нашел на 30 процентов меньше четырехлистников, чем Лиза в этот день. Всего за два дня Лиза нашла на 10 процентов больше четырехлистников, чем ее товарищ. Какое минимальное количество четырехлистников нашли студенты?
- 5. В правильную треугольную пирамиду вписан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ объема 8 так, что его грань $A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит в плоскости основания пирамиды — треугольника со стороной 6, ребро CD противоположного основания лежит в боковой грани пирамиды, а вершины A и B принадлежат другим боковым граням. Найдите высоту пирамиды.
- 6. Для каждого натурального значения параметра k найдите площадь фигуры, задаваемой на плоскости (x, y) условиями

$$\begin{cases} \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \sin y \leq 0 \end{cases} \\ -\pi k \leq x \leq \pi k \\ -\pi k \leq y \leq \pi k. \end{cases}$$

Геологический факультет

- 1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 9}{|x| - 3} (x + 4) \geq 0.$$

- 2. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{5}{2}x^2 - x^3} \geq \sqrt{6x - \frac{5}{2}x^2}.$$

- 3. В прямоугольном треугольнике ABC длина гипотенузы AB равна 5, разность углов BAC и ABC равна $\pi/10$, точка D — середина AB . Чему равно расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников ACD и BCD ?

- 4. Решите неравенство

$$(\log_{|x+2|} 4) \cdot (\log_4 (x^2 + x - 2)) \leq 1.$$

- 5. В сосуде объемом 5 литров находилось некоторое количество 30%-ного раствора кислоты. Затем в сосуд было добавлено какое-то количество 40%-ного раствора такой же кислоты, в результате чего сосуд был заполнен полностью. После этого из сосуда было отлито 0,5 литра полученного раствора и затем опять налито такое же количество 40%-ного раствора. В результате сосуд оказался заполненным 34%-ным раствором. Сколько литров раствора было в сосуде первоначально? Процентные содержания растворов считаются объемными.

- 6. Найдите корни уравнения

$$\frac{\sqrt{3}(\sin 2x + \cos 3x)}{\cos 2x - \sin 3x} = 1,$$

расположенные в интервале $(1; 2)$.

- 7. Плоскость пересекает боковые ребра SA и SB треугольной пирамиды $SABC$ в точках K и L соответственно и делит объем пирамиды пополам. В каком отношении эта плоскость делит медиану SN грани SBC , если $\frac{SK}{SA} = \frac{2}{3}$, $\frac{SL}{SB} = \frac{4}{5}$?

- 8. Найдите значения a , при которых наибольшее значение функции $f(x) = 2x^2 + x(5 - 3a) + a^2 - 3a + 4$ на отрезке с концами $a - 1$ и -4 минимально. Укажите это значение.

Экономический факультет (отделение экономики)

- 1. Решите уравнение

$$2\sqrt{2x^2 - x + 8} = x - 2x^2 + 7.$$

- 2. Решите неравенство

$$\log_{13-2x}(x^2 - x + 1) \cdot \log_{7-x}(13 - 2x) < \log_{2x-1}(2 - 2x - (x - 1)^2 + x^2).$$

- 3. Найдите все значения x из интервала $(8; 12)$, для которых справедливо неравенство

$$2 \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{6} \right) \sin x = \sqrt{6 - 6 \cos \left(\frac{14\pi}{5} \right)}.$$

- 4. Две бригады однотипных тракторов задействованы на вспашке поля. Время вспашки поля одной первой бригадой отличается от времени вспашки поля одной второй бригадой не более, чем на $\frac{1}{25}$ часть времени вспашки поля одним трактором. Если сначала восьмая часть первой бригады вспашет первую половину поля, а затем пятая часть второй бригады вспашет оставшуюся половину поля, тогда затраченное время на вспашку поля составит $\frac{21}{9}$ от времени вспашки поля одним трактором. Определите количество тракторов в каждой бригаде.

- 5. В прямоугольном треугольнике ADC гипотенуза DC является хордой окружности радиуса 1, которая пересекает катеты AD и AC в точках E и B соответственно. Найдите DB , если $\angle DBE = 30^\circ$, $S_{DEC} = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$.
- 6. Найдите все значения a , при которых неравенство

$$4a^2 \cdot \sqrt{2 - \frac{6}{\pi} \arcsin(\sqrt{3} - 2x)} + \frac{12a}{\pi} \arccos(2x - \sqrt{3}) - 8a^2 - 3a \leq 1$$

выполняется для любых $x \in \left[\frac{2\sqrt{3}-1}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4} \right]$.

- 7. Найдите площадь фигуры, задаваемой на координатной плоскости двойным неравенством

$$x - |1 - x^2| + |x| + |3x - 3| + |x + 1| - 7 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}.$$

Московская школа экономики

- 1. Решите уравнение $\sqrt{x+3} = 9 - x$.
- 2. Решите неравенство

$$\log_{0,5}(\log_3(x-2)) \geq 1.$$

- 3. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{1 + 2 \cos 2x} = 0.$$

- 4. Антикварный магазин продал картину со скидкой в 10% по сравнению с первоначально назначенной ценой и получил при этом 8% процентов прибыли. Сколько процентов прибыли магазин предполагал получить первоначально?
- 5. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| < y - 1, \\ y + |x - 1| < 2. \end{cases}$$

- 6. Треугольник ABC , длины сторон которого образуют арифметическую прогрессию, вписан в окружность радиуса $\frac{14}{\sqrt{3}}$. Найдите периметр треугольника, если он меньше 40 и $AC = 14$.
- 7. При всех значениях параметра b решите неравенство

$$2(b-1) \cdot \sqrt{3x+1} + 1 \geq 3bx + b - 3x.$$

Институт стран Азии и Африки

- 1. Решите неравенство

$$\frac{5x+1}{(x+2)(x-3)} \geq 1 + \frac{16}{x-3}.$$

- 2. Решите уравнение

$$3 + 6 \cos 2x + 3 \cos 4x + 2 \cos 6x = 0.$$

- 3. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{243 + 9x - 2x^2}{2x + 3}} > 9 - x.$$

- 4. В треугольнике ABC проведены медиана AE и биссектриса CD , пересекающиеся в точке M . Через точку M проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника PBQ , если длина стороны AC равна $3\sqrt{3}$, длина стороны BC равна $4\sqrt{3}$, величина угла ACB равна 60° .

- 5. Решите уравнение

$$12 \cdot (3^{4x^2+2x-1} - 1)^2 - \left(3^{2(x-1)+4x^2} + \frac{1}{3}\right) \cdot (3^{4x^2+2x+1} - 3) = 16.$$

- 6. Решите неравенство

$$\left(3 - \log_{|2x+\frac{1}{2}|} \left(\frac{1}{4} - x\right)\right) \cdot \log_3 \left(\frac{1}{4} - x\right) < 2 \log_3 \left|2x + \frac{1}{2}\right|.$$

- 7. Точки K, L, M, N с координатами $(-2; 3), (1; 4), (3; 2), (-1; -1)$ лежат на сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ соответственно. Найдите его площадь.

Факультет государственного управления

- 1. На розовом кусте каждое утро, начиная с понедельника, расцветают пять бутонов. Каждое утро садовник срезает три из них. Из скольких роз будет состоять букет, если в ближайшее воскресенье садовник срежет все розы?

- 2. Решите уравнение

$$\sqrt{x^4 - 10x^2 + 25} = \sqrt{x^4 - 4x^2 + 4}.$$

- 3. В прямой угол равнобедренного треугольника с гипотенузой $6\sqrt{2}$ вписан круг радиуса 2. Найдите площадь той части круга, которая лежит вне этого треугольника.

- 4. Решите уравнение $\sin |1 - 2x| + \cos x = 0$.

- 5. Четыре отраслевых предприятия K, L, M, N , обсуждая планы объединения усилий, утсановили, что без K три оставшихся будут контролировать 55% рынка отрасли; без L три другие — 60%; K, L, N без M — 66%; три предприятия без N — 73% рынка отрасли. Какова доля каждого из этих предприятий на рынке?

- 6. Найдите значения a , для которых неравенство

$$(a + b + 36)x^2 - 5(x - 1)(b + 1) \leq 0$$

имеет решение при любом b .

- 7. Химический комбинат получил заказ на изготовление этилового спирта, соляной кислоты и дистиллированной воды. Для готовой продукции

потребовалась 21 железнодорожная цистерна. При перекачивании были использованы три специализированных насоса: сначала первый насос заполнил четыре цистерны этиловым спиртом, затем второй насос заполнил шестнадцать цистерн соляной кислотой и в завершение третий насос заполнил одну цистерну дистиллированной водой. Найдите минимально возможное время, затраченное на перекачивание всей продукции, если известно, что суммарная производительность всех насосов равна семи цистернам в сутки.

Факультет глобальных процессов

- 1. Решите неравенство $(|x + 1| + |2x - 1|) \cdot \lg \left(\frac{\pi}{\sqrt{10}} \right)^{2x} \geq 0$.
- 2. Прибыль P предприятия за год определяется соотношением $P = A\sqrt{X} - X$, где X — расходы на производство, A — некоторая положительная постоянная. В 2004 году прибыль P оказалась положительной и составила 40% от расходов X . В 2005 году расходы выбраны так, чтобы прибыль была максимальной. Найдите отношение расходов в 2004 году к расходам в 2005 году.
- 3. Решите неравенство $\frac{|x^2 + x - 12|}{x - 3} \geq 1$.
- 4. Решите уравнение $\log_{|\cos \frac{\pi}{2}|} |1 - 2 \cos \frac{\pi}{6}| = \log_{\cos |\frac{\pi}{2}|} \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.
- 5. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 6$ и $BC = 4$ проведена биссектриса BL , точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности, $BO : OL = 3 : 1$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABL .
- 6. Найдите минимально возможный объем прямого кругового конуса, описанного вокруг шара единичного радиуса.
- 7. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} \operatorname{arctg}(25^x - 9 + a - y) = 0, \\ y - 5^{-x} + \sqrt{a - 1} = 0 \end{cases}$$
 имеет единственное решение $(x_0; y_0)$, удовлетворяющее условию $x_0 \leq 0$.
- 8. Сравните числа $x_* = \sqrt{1 + 2^{\frac{1}{16}}}$ и k_* , где k_* — корень уравнения

$$(k^2 - 1)^8 = \frac{1}{2(k - 1)}.$$

2007 год

Олимпиада «Ломоносов»

Олимпиада «Ломоносов» по математике, приравненная к III этапу Всероссийской олимпиады школьников, проводится с 2005 г. ежегодно в апреле–мае. В 2007 г. всем победителям этой олимпиады был засчитан максимальный балл по математике при подаче ими документов в июне на следующие факультеты МГУ: механико-математический, ВМиК, физический, химический, наук о материалах, биологический, биоинженерии и биоинформатики, почвоведения, географический, геологический и физико-химический.

- 1. Вычислить $(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \beta - \cos \beta)$, если
 $\sin(\alpha + \beta) = 0,8$ и $\cos(\alpha - \beta) = 0,3$.

- 2. Решить уравнение

$$\sqrt{2^{(x^2)}} = (2^{\sqrt{x}})^5.$$

- 3. Какие значения может принимать выражение
 $\log_{b_{11}b_{50}}(b_1b_2 \dots b_{60}),$
 где $b_1, b_2, \dots$ — геометрическая прогрессия?

- 4. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{8-x} - |2x-1|}{\sqrt{x+7} - |2x-1|} \leq 1.$$

- 5. На стороне AB треугольника ABC взята такая точка D , что окружность, проходящая через точки A , C и D , касается прямой BC . Найти AD , если $AC = 9$, $BC = 12$ и $CD = 6$.

- 6. Натуральные числа a , b и c таковы, что
 $\text{НОК}(a, b) = 60$ и $\text{НОК}(a, c) = 270$
 $(\text{НОК}(x, y) — \text{наименьшее общее кратное чисел } x \text{ и } y).$ Найти $\text{НОК}(b, c)$.

- 7. Определить, под каким углом видно из начала координат (т. е. внутри какого наименьшего угла с вершиной в точке $(0, 0)$ помещается) множество, заданное на координатной плоскости неравенством

$$14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 < 0.$$

- 8. Грани двугранного угла пересекают боковую поверхность цилиндра радиусом 5, образуя сего осью углы в 70° и 80° , а ребро двугранного угла перпендикулярно этой оси и удалено от нее на расстояние 11. Найти объем части цилиндра, расположенной внутри двугранного угла.

- 9. Найти все значения $x \in (0; \pi]$, удовлетворяющие уравнению

$$|\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x| + |\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x| = \operatorname{tg} 3x.$$

- 10. В течение четверти учитель по пению ставил детям оценки «1», «2», «3», «4» и «5». Среднее арифметическое всех оценок Вовочки оказалось равным в точности 3,5. И тогда, по предложению Вовочки, учитель заменил одну его оценку «4» парой оценок «3» и «5». Доказать, что от этого средняя оценка Вовочки по пению увеличилась. Найти наибольшее возможное ее значение после такой замены:
- а) одной оценки «4»;
 - б) всех его оценок «4»?

Механико-математический факультет

- 1. Учитель назвал Пете натуральное число и попросил найти сумму его логарифмов по основаниям 3 и 75. Однако Петя по ошибке не сложил эти логарифмы, а перемножил их, получив неверный ответ, который оказался вдвое меньше верного. Какое число назвал ему учитель?
- 2. Графики функций
- $$f(x) = 2x^2 - 2x - 1 \quad \text{и} \quad g(x) = -5x^2 + 2x + 3$$
- пересекаются в двух точках. Найти коэффициенты a и b в уравнении прямой $y = ax + b$, проходящей через те же точки.
- 3. Решить уравнение
- $$3 \cos x |3 \sin x + \cos x| = \sin x |\cos x - 3 \sin x|.$$
- 4. Точки A , B , C лежат на окружности радиуса 2 с центром O , а точка K — на прямой, касающейся этой окружности в точке B , причем $\angle AKC = 46^\circ$, а длины отрезков AK , BK , CK образуют возрастающую геометрическую прогрессию (в указанном порядке). Найти угол AKO и расстояние между точками A и C . Какой из углов больше: ACK или AOK ?
- 5. Найти наибольшее значение выражения
- $$\sqrt{(x-1)(y-x)} + \sqrt{(7-y)(1-x)} + \sqrt{(x-y)(y-7)}$$
- при $x \in [-2; 3]$ и $y \in [0; 11]$.
- 6. Два конуса имеют общую вершину и единственную общую образующую, которая составляет с их осями углы в 30° и 45° . Двугранный угол расположен так, что каждая его грань касается каждого из конусов по разным образующим. Найти величину этого угла.

Факультет вычислительной математики и кибернетики
(отделение специалистов)

- 1. Найдите все решения уравнения

$$2 \sin \left(x + \frac{7\pi}{25} \right) \cdot \sin \left(3x + \frac{18\pi}{25} \right) = \cos 4x + 2^{\cos \frac{2\pi}{3}},$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{10}; \frac{4\pi}{5} \right]$.

- 2. Решите неравенство

$$\log_{x+2}(2-x) \geq \frac{|\log_5(2x+3) - 1|}{\log_5(x+2)}.$$

- 3. В треугольнике ABC точка D является основанием высоты, опущенной из точки A на сторону BC . Окружность диаметра $2\sqrt{3}$ проходит через точки B и D и касается внешним образом окружности, описанной около треугольника ACD . Известно, что $AC = 4\sqrt{3}$, а величина угла ABC равна 30° . Найдите длину стороны BC .

- 4. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} x - y \leq -25, \\ x^2 - y \leq 8, \\ 4x + y \leq 1. \end{cases}$$

- 5. Дана треугольная призма $ABC A_1 B_1 C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$). На ребре CC_1 выбрана точка D . Сечение, проходящее через точки A, B_1 и D , делит призму на два многогранника $ABCDB_1$ и $B_1 AA_1 C_1 D$, отношение объемов которых равно $13 : 17$. В каком отношении точка D делит ребро CC_1 ?

- 6. Какие значения может принимать $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$, если при этих α, β, γ многочлен от x

$$x^4 + 2^{\sin \alpha} x^2 + x \cdot \sqrt{2^{1-\sin \beta} - \cos \gamma} + \sin^2 \beta + \cos^2 \gamma$$

является квадратом некоторого многочлена относительно x ?

Факультет вычислительной математики и кибернетики
(отделение бакалавров)

- 1. Найдите наибольший общий делитель чисел $n = 720, m = 756, k = 468$.

- 2. Найдите все решения уравнения

$$2 \cos \left(x + \frac{8\pi}{23} \right) \cdot \cos \left(3x + \frac{15\pi}{23} \right) = 2^{-\cos \frac{\pi}{3}} - \cos 4x,$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

- 3. Решите неравенство

$$\log_{x+1}(4-x) \geq \frac{|\log_{15}(4x+3) - 1|}{\log_{15}(x+1)}.$$

- 4. В треугольнике ABC точка D является основанием высоты, опущенной из точки A на сторону BC . Окружность диаметра 2 проходит через точки B и D и касается внешним образом окружности, описанной около треугольника ACD . Известно, что $DC = 4$, а величина угла ABC равна 60° . Найдите длину стороны AC .

- 5. Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq x + 29, \\ x^2 - y \leq 14, \\ 2x + y \leq 12. \end{cases}$$

- 6. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$). На ребре CC_1 выбрана точка D . Сечение, проходящее через точки A, B_1 и D , делит призму на два многогранника $ABCD B_1$ и $B_1AA_1C_1D$, отношение объемов которых равно $5 : 8$. В каком отношении точка D делит ребро CC_1 ?

Физический факультет

- 1. Решить уравнение

$$\frac{\sin 5x - \sin 3x}{2 \sin x} = 1.$$

- 2. Решить уравнение

$$\frac{(\sqrt{3})^{2x} + 5 \cdot 3^{2-x} - 14}{49 - 7^x} = 0.$$

- 3. Решить уравнение

$$\sqrt{x-2} - \sqrt{2x+2} = \sqrt{2x-5} - \sqrt{3x-1}.$$

- 4. Окружность радиуса 2, вписанная в $\triangle KLM$, касается стороны LM в точке N . Отрезок KN является медианой треугольника и $KN = 8$. Найти площадь $\triangle KLM$.

- 5. Решить неравенство

$$\log_4(x^2 - 4)^2 + \log_2 \frac{x-1}{x^2-4} > 0.$$

- 6. В $\triangle KLM$ через точку N высоты KN проведены прямые, перпендикулярные к сторонам KL и KM и пересекающие их в точках A и B соответственно. Отрезок AB равен a , а радиус описанной около $\triangle KLM$ окружности равен R . Найти площадь $\triangle KLM$.

- 7. Для каждого значения a из промежутка $(-3; 0)$ найти число различных решений уравнения

$$(2x^2 - 5ax + 3a62)\sqrt{x - \frac{2}{a}} = 0.$$

- 8. Сфера радиуса $(1/2)\sqrt{17}$ касается всех сторон правильного $\triangle LMN$. Точка S такова, что плоскости SLM , SMN и SNL касаются сферы. Расстояние от точки S до плоскости LMN равно 8. Найти объем пирамиды $SLMN$.

Химический факультет и факультет наук о материалах

- 1. Решить уравнение

$$(x^2 - 7|x| + 6)\sqrt{4x + 23} = 0.$$

- 2. Решить неравенство

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{2x + 12} \leq 1 - \frac{\sqrt{x^2 + 8x + 16}}{x + 4}.$$

- 3. В прямоугольном треугольнике DEF на гипотенузу опущены медиана DM и высота DQ . Известно, что $MD = \frac{\sqrt{17}}{2}$ и $\sin \angle DMQ = \frac{8}{17}$. Найти катеты треугольника DEF .
- 4. Положительные числа b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 образуют геометрическую прогрессию, а числа $b_5, 6b_3, 27b_1$ арифметическую. Найти знаменатель прогрессии b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 .
- 5. Прямая l_1 проходит через точки $(-3, 2)$ и $(1, 1)$ координатной плоскости. Прямая l_2 проходит через точку $(-5, 4)$ и перпендикулярна прямой l_1 . Найти координаты точки пересечения прямых l_1 и l_2 .
- 6. Решить уравнение

$$\log_{\cos x}(\cos^2 x + \sin^2 x) - 2 \sin^2 x + 5 \sin 2x = 0.$$

- 7. За 2005 год число книг в фонде библиотеки поселка увеличилось на 0,4%, а за 2006 год — на 0,8%, оставшись при этом меньше 50 тысяч. На сколько книг увеличился фонд библиотеки поселка за 2006 год?
- 8. Найти все значения параметра a , при каждом из которых среди корней уравнения

$$ax^2 + (a + 4)x + a + 1 = 0$$

имеется ровно один отрицательный.

Физико-химический факультет

Биологический факультет

См. вариант химического факультета.

Факультет фундаментальной медицины

См. вариант химического факультета.

Факультет биоинженерии и биоинформатики

См. вариант химического факультета.

Геологический факультет

► 1. Решите неравенство $|x - 12| \leq \frac{x}{12 - x}$.

► 2. Решите уравнение $\frac{\cos 2x + \sin x}{\cos x} = \frac{1}{2} \cos x$.

► 3. Решите неравенство

$$\sqrt{2^{x^2-4} - 1} \cdot (x^2 - 7x + 6) \leq 0.$$

► 4. Площадь четырехугольника $ABCD$ равна 9, радиус вписанной в него окружности равен 1, а длины сторон AB и BC равны 3 и 5 соответственно. Чему равны длины сторон AD и CD ?

► 5. Решите неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_x \left(\log_2 \left(\frac{x^2-2x}{2x-1}\right)\right)} \leq 1$.

► 6. Сумма первых пятнадцати членов арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, больше 337, но меньше 393. Чему равен восьмой член этой прогрессии, если известно, что он кратен четырем?

► 7. Числа x, y, z таковы, что

$$\begin{cases} x + 1 = z + y, \\ xy + z^2 + 14 - 7z = 0. \end{cases}$$

При каких значениях z сумма $x^2 + y^2$ максимальна? Найдите это максимальное значение.

► 8. В каком отношении делит объем куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, где $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, плоскость, проходящая через вершину A и центры граней $A_1 B_1 C_1 D_1$ и $B_1 C_1 C B$?

Факультет почвоведения

- 1. Решить уравнение

$$||x - 1| - 7| = 10.$$

- 2. Решить неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 7}} + x \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 - 7}} + 9.$$

- 3. Сумма положительной бесконечно убывающей геометрической прогрессии в 4 раза больше ее второго члена. Во сколько раз второй член меньше первого?

- 4. Решить уравнение

$$\sin^2 11x = \cos^2 17x.$$

- 5. Решить неравенство

$$\log_x^3 16 + 2 \log_x^2 16^2 + 4 \log_x 16^4 \geq 0.$$

- 6. Решить систему

$$x + y + xy = 7$$

$$x^2 + y^2 + xy = 13.$$

- 7. Найти все значения параметра
- a
- , при каждом из которых система

$$(5 - 2\sqrt{6})^x + (5 + 2\sqrt{6})^x - 5a = y - |y| - 8,$$

$$x^2 - (a - 4)y = 0$$

имеет единственное решение.

- 8. Периметр равнобедренного треугольника
- ABC
- равен 18. Через середину
- D
- основания
- AB
- проведена прямая, пересекающая сторону
- BC
- в точке
- K
- и делящая площадь треугольника
- ABC
- в отношении
- $5 : 2$
- , при этом угол
- ADK
- равен
- 135°
- . Найти площадь треугольника
- ABC
- .

Географический факультет

См. вариант химического факультета.

Факультет психологии

См. вариант химического факультета.

Филологический факультет

- 1. Решить уравнение

$$-x - 3\sqrt{-x} = 10.$$

- 2. Решить неравенство

$$\frac{(x-2)(x-5)(x-8)}{(x+2)(x+5)(x+8)} \geq -1.$$

- 3. Один рабочий бригады, состоящий из 5 человек, производит в среднем 14 деталей в час, причем каждый из рабочих производит в час целое число деталей, не превышающее 16. Сколько деталей в час может делать при этих условиях рабочий с самой низкой производительностью?

- 4. Решить систему

$$x^2 - 2y - 3 = 0,$$

$$y^2 + 2x - 3 = 0.$$

- 5. Решить уравнение

$$5 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 4 \sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) - 1.$$

- 6. Периметр треугольника ABC равен 36, а площадь равна 60. Найти стороны AB и AC , если $BC = 10$.

- 7. Решить неравенство

$$\log_{(x+3)^2}(2x^2 + 9x + 21) \geq \log_{(x+3)^2}(x^2 - x).$$

- 8. При каких значениях c уравнение

$$-\sqrt{16 - x^2} = c + x$$

имеет единственное решение?

Социологический факультет

См. вариант филологического факультета

Экономический факультет (отделение экономики)

- 1. Для каждого значения x , удовлетворяющего условию

$$x^2 - |x| - 42 = 0,$$

найдите все числа y , для которых выполнено неравенство

$$-7\sqrt{y^2 - 10y + 34} \geq 4x + 7.$$

- 2. Найдите все решения уравнения $\cos 3x = \sin x$, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам:

$$\sin x \geq 0, \quad \cos x \leq 0.$$

- 3. Решите неравенство

$$\left(x^2 - \log_2\left(\frac{3^x}{5}\right) - \log_3(5^x)\right) \cdot \log_5(125 \cdot 25^{x-3}) < 0.$$

- 4. Бригаде грузчиков выделена некоторая сумма денег на разгрузку баржи, однако 3 человека заболели и в работе не участвовали. Оставшиеся выполнили задание, заработав каждый на 1,5 тысячи рублей больше, чем в

случае работы в составе полной бригады. Определите выделенную бригаде сумму денег, если 5%-ный сбор за ее банковский перевод обошелся работодателю дополнительно в величину, находящуюся в пределах от 1,2 до 1,6 тысяч рублей.

- 5. Внутри треугольника ABC взята точка K так, что треугольник ABK равносторонний. Известно, что расстояние от точки K до центра окружности, описанной около треугольника ABC , равно 6 и величина угла ACB равна $\arcsin \frac{5}{2\sqrt{13}}$. Найдите длину стороны AB .

- 6. Найдите все значения a , при которых функция

$$f(x) = |2 - x| \cdot x + \arcsin\left(\frac{a}{10}\right)$$

не является монотонно возрастающей на отрезке числовой оси, который соединяет корни квадратного трехчлена

$$x^2 - (a^2 - 8a + 14)x + (a^2 - 6a + 6)(8 - 2a).$$

- 7. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$, не являющийся ромбом. Вершины A , B и C расположены на некоторой сфере так, что прямая AD проходит через центр этой сферы. Вершина S , также лежащая на данной сфере, равноудалена от концов диагонали AC основания. Найдите наибольшее возможное значение объема пирамиды, если $AC = 2\sqrt{3}$, $BD = 2$.

Экономический факультет (отделение менеджмента)

- 1. Три числа $8x$, $3 - x^2$ и -4 в указанном порядке образуют убывающую арифметическую прогрессию. Найдите x и укажите разность этой прогрессии.

- 2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 = 81, \\ x + 1 = -2\sqrt{y^2 + 10y + 41}. \end{cases}$$

- 3. Найдите все решения уравнения $\sin x = \sin 3x$, удовлетворяющие условию $\sin x < 0$.

- 4. Решите неравенство

$$(3x - 4) \cdot \left(x^2 - \left(\log_3 4 + \frac{5}{4} \right) x + \frac{5 \log_3 4}{4} \right) > 0.$$

- 5. Для рытья котлована первоначально планировалось использовать звено экскаваторов одной модели, однако перед началом работы в звено было добавлено дополнительно 4 экскаватора той же модели. В результате котлован был вырыт на 3 часа ранее первоначально запланированного срока. Определите время, за которое котлован мог быть вырыт одним экскаватором, если в этом случае, при расходе топлива 20 кг в час,

необходимое для работы экскаватора количество топлива находится в пределах от 1,2 до 1,71 тонн.

- 6. Диагональ AB выпуклого четырехугольника $AKBC$ делит его на два треугольника, один из которых равносторонний. Известно, что величина угла ACB равна $\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{4}{\sqrt{43}}$, а расстояние от точки K до центра окружности, описанной около треугольника ABC , равно 6. Найдите радиус этой окружности.

Экономический факультет (вечернее отделение)

- 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 = 49, \\ 4x + 7 = -7\sqrt{y^2 - 10y + 34}. \end{cases}$$

- 2. Найдите все решения уравнения $\cos x + \cos 3x = 0$, удовлетворяющие условию $\cos x < 0$.

- 3. Решите неравенство

$$\left(x^2 - \left(\frac{4}{3} + \log_3 5 \right) x + \frac{4 \log_3 5}{3} \right) \cdot (2x - 3) < 0.$$

- 4. Охранная фирма выделила некоторую сумму денег на оплату дежурства своих сотрудников во время проведения футбольного матча, однако перед началом матча количество дежурных пришлось увеличить на 2 человека. За работу каждому из дежурных было начислено на 400 рублей меньше, чем в случае работы в первоначальном составе. Определите выделенную охранной фирмой сумму денег, если 3%-ный сбор за ее банковский перевод обошелся фирме дополнительно в величину, находящуюся в пределах от 0,996 до 1,14 тысяч рублей.

- 5. Внутри треугольника ABC взята точка K так, что треугольник ABK — равносторонний. Известно, что расстояние от точки K до центра окружности, описанной около треугольника ABC , равно 6, а величина угла ACB равна $\arcsin \frac{5}{2\sqrt{13}}$. Найдите длину стороны AB .

- 6. Найдите все значения a , при которых функция

$$f(x) = 8x|x| - |64x| + 5\sqrt{117} \cdot a$$

является монотонно возрастающей на отрезке числовой оси, который соединяет точки с координатами $a^2 - 3a$ и $3a - 5$.

- 7.

В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$, не являющийся ромбом. Вершины A , B и C расположены на некоторой сфере так, что прямая AD проходит через центр этой сферы. Вершина S , также лежащая на данной сфере, равноудалена от концов диагона-

ли AC основания. Найдите наибольшее возможное значение объема пирамиды, если $AC = 2\sqrt{3}$, $BD = 2$.

Московская школа экономики

- 1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} \leq x - 1.$$

- 2. Решите уравнение

$$\log_{(-2 \cos x)} (3 \sin x - \cos 2x) = 0.$$

- 3. Решите неравенство

$$\left| \frac{x}{10} - \frac{1}{5} \right| \geq \left| \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \right|.$$

- 4. Решите уравнение

$$4 \cdot 25^{\sqrt{x}} - 23 \cdot 5^{\sqrt{x}} + 15 = 0.$$

- 5. Для перевозки 90 т груза затребовали некоторое количество одинаковых грузовиков. В связи с тем, что на каждую машину погрузили на 0,75 т меньше, дополнительно было затребовано еще 4 грузовика. На сколько процентов увеличилось число грузовиков по сравнению с первоначальной заявкой?

- 6. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$x^2 - 14x + 4y^2 + 32y + 88 = 0.$$

- 7. Диагонали вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Найдите периметр и площадь треугольника ABC , если $BC = CD = 6$, $AB = 7$ и $CE = 3$.

- 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$16^x - 3 \cdot 2^{3x+1} + 2 \cdot 4^{x+1} - (4 - 4a) \cdot 2^{x-1} - a^2 + 2a - 1 = 0$$

имеет три различных корня?

Институт стран Азии и Африки

- 1. Решите неравенство $|x + 3| \cdot (|x - 1| - 3) \leq 0$.

- 2. Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк $1/6$ часть от всей суммы, которую он должен был банку к этому времени. А еще через год в счет полного погашения кредита фермер внес в банк сумму, на 20% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

- 3. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_4 \frac{x^2 - 2x}{x + 10} \right) \geq 0.$$

- 4. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1} + \sqrt{6x + 2y - x^2 - y^2 - 9} + \\ + \sqrt{x + y - 1} = 2\sqrt{x - y + 1} \cdot \sin z + 6 \sin^2 \frac{z}{2}.$$

- 5. В треугольнике ABC проведена прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Известно, что $AB = 3$, $AC = \sqrt{5}$, длина медианы, проведенной из вершины A к стороне BC , равна $\sqrt{6}$, и длины отрезков AP , PQ , QC равны между собой. Найдите длину отрезка PQ .

- 6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$6x^2 + 4a^2 + 6ax - 3x - 24a + 35 < 0$$

содержит хотя бы одно целое число.

- 7. Определите, какая из двух пирамид, $SABC$ или $QKNM$, имеет меньший объем, если длины ребер SA , SB , SC и QK , QN , MN равны 2, а длины ребер AB , BC , AC и KN , KM , QM равны $\sqrt{3}$.

Факультет государственного управления

- 1. На велотреке, имеющем форму окружности, из диаметрально противоположных точек одновременно стартуют два велосипедиста со скоростями 775 и 800 метров в минуту соответственно. Сколько полных кругов пройдет первый велосипедист к моменту, когда его догонит второй, если длина велотрека равна четверти километра?

- 2. Решите уравнение

$$\left| \left| \sin x - \frac{1}{4} \right| - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{3} \left(\sin x + \frac{1}{4} \right).$$

- 3. Диагональ разбивает выпуклый четырехугольник на два равных треугольника со сторонами длиной 5, 12 и 13. Найдите радиус наименьшего круга, в который можно поместить такой четырехугольник.

- 4. Решите неравенство

$$\sqrt{(\log_4 x)^2 - 2} \geq \log_2 \frac{x}{4} - 1.$$

- 5. Город административно поделен на пять частей: западную, северную, восточную, южную и центральную. Средняя цена дизельного топлива по бензозаправочным станциям восточного района составляет 18 рублей за литр, в западном — 18 рублей 35 копеек, в центральном — 20 рублей с полтиной, в северном районе — 17 рублей с четвертью соответственно, в южном — совпадает со средней ценой по всем бензозаправкам города. Известно, что в центральной части бензозаправочных станций в полтора раза больше, чем в западной, а на востоке — на треть больше, чем на западе. Во сколько раз бензозаправочных станций в северном районе

меньше, чем на востоке, если средняя цена дизтоплива по заправочным станциям города составляет 18 рублей 60 копеек?

- 6. Найдите значения a и b , при которых система

$$\begin{cases} |bx| - |y| = 2a, \\ (x - b)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

- 7. Общество рыболовов и охотников, две трети членов которого — рыболовы, а одна треть — охотники, решило переизбрать правление. Председатель общества подготовил проект состава правления из 100 человек. Какое наибольшее число охотников можно было включить в проект состава правления, чтобы за него проголосовало более половины членов общества, если известно, что за проект проголосует столько процентов рыболовов, сколько рыболовов в предложенном проекте, и столько процентов от числа охотников, сколько в нем охотников?

Факультет глобальных процессов

См. вариант факультета почвоведения.

Дополнительный набор

В конце августа 2007 г. при проведении дополнительного набора на платные образовательные программы для абитуриентов механико-математического, ВМиК, химического, биологического, почвоведения, географического, наук о материалах, фундаментальной медицины, психологии, биоинженерии и биоинформатики и московской школы экономики факультетов был организован централизованный вступительный экзамен по математике.

- 1. Решить уравнение

$$\lg \sqrt{x} - \frac{1}{2} \sqrt{\lg y} = 3.$$

- 2. Решить уравнение

$$\cos^4 x + \sin^3 x = 1.$$

- 3. На координатной плоскости расположен квадрат. Две его вершины имеют координаты $(4, -5)$ и $(-6, 5)$. Найти координаты двух других его вершин.

- 4. Решить неравенство

$$3^{-\frac{1}{x}+2} - 2 \cdot 9^{\frac{1}{x}+\frac{1}{4}} \leq 27^{-\frac{1}{x}}.$$

- 5. Основанием пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник $ABCD$, площадь которого равна Q . Ребро SA перпендикулярно плоскости основания, а ребра SB и SD наклонены к ней под углами δ и γ . Найти объем пирамиды.

- 6. Решить неравенство

$$\left(\arcsin x - \frac{\pi}{6}\right) \lg\left(x^2 + \frac{9}{25}\right) > 0.$$

- 7. Около окружности радиуса R описана равнобокая трапеция. Площадь четырехугольника, вершинами которого служат точки касания окружности и трапеции, равна S . Найти площадь трапеции.
- 8. К десятичной записи целого числа $n \neq 0$ приписали справа какую-то цифру. К получившемуся новому числу прибавили квадрат числа n , а потом вычли 3. Получилось число $14n$. Какое число n было взято и какая цифра была приписана?

2008 год

Олимпиада «Ломоносов»

- 1. Найти k , если
$$\frac{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2k}} + 4} + 4}{\frac{1}{\sqrt{5}-2k}} + 4 = \sqrt{5} + 2.$$
- 2. Какое наибольшее число раз можно последовательно взять логарифм по основанию 3 от числа 27^{81} (первый раз логарифм берется от этого числа, а затем всякий раз — от числа, полученного в предыдущий раз)?
- 3. При каких значениях a существует единственное решение системы
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4; \\ (x-3)^2 + (y+4)^2 = a? \end{cases}$$
- 4. Лиса преследовала кролика по прямолинейной дорожке, ведущей к норе кролика. Их скорости были постоянны. В некоторый момент расстояние от кролика до норы было равно 7 м, а до лисы — 13 м. В некоторый следующий момент расстояние между кроликом и норой стало вдвое меньше расстояния между ним и лисой. Успела ли лиса догнать кролика, прежде чем тот юркнул в нору?
- 5. Найти радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием 6, если синус одного его угла равен косинусу другого.
- 6. Решить неравенство $\sqrt{25^x - 2^{3-x}} < 7 \cdot 2^{-x/2} - 2 \cdot 5^x$.
- 7. Решить уравнение $2 + \cos x = \sqrt{3} \left| \sin \frac{3x}{4} \right| \sin x$.
- 8. Основанием прямой призмы $ABCA'B'C'$ служит прямоугольный треугольник с катетами $AB = 3$ и $AC = 4$. Через середину бокового ребра $BB' = 10$ параллельно AC проведена прямая l . Какие значения может принимать площадь параллелограмма, у которого две вершины — точки

A и B , а остальные две вершины лежат на прямых $A'C$ и l соответственно?

- 9. Найти все натуральные значения n , удовлетворяющие уравнению

$$2002 \left[n \sqrt{1001^2 + 1} \right] = n \left[2002 \sqrt{1001^2 + 1} \right],$$

где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее числа x .

- 10. На числовой прямой отмечены 4 синие точки, соответствующие первым членам геометрической прогрессии с первым членом -2 и знаменателем -2 , а также 4 зеленые точки, соответствующие первым членам некоторой арифметической прогрессии с первым членом -5 . Какова при этом наименьшая возможная сумма длин 4 отрезков с разноцветными концами, включающими все 8 отмеченных точек? (Каждая из 8 точек является концом одного из отрезков.)

Механико-математический факультет

- 1. Решить неравенство

$$||1 - x^2| - |x^2 - 3x + 2|| \geq 3|x - 1|.$$

- 2. Игорь решал тригонометрическое уравнение и получил ответ

$$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{4\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ в конце учебника выглядел иначе:

$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Правильный ли ответ получил Игорь? Привести пример тригонометрического уравнения с ответом как в учебнике.

- 3. Решить систему

$$\begin{cases} \log_2(2x^3 + 4x^2y - 3x^2) = \log_{11}(4xy^2 + 24y^3 - 12y^2) \\ \log_{11}(x^3 + 6x^2y - 3x^2) = \log_2(8xy^2 + 16y^3 - 12y^2). \end{cases}$$

- 4. Окружность радиуса 6 проходит через вершину B треугольника ABC и пересекает его стороны AB и BC в точках E и F соответственно. Центр O окружности лежит на стороне AC , $AO = 12$, $CO = 10$, $\angle OBC = \angle BCO + \angle EOA$. В каком отношении прямая BO делит отрезок EF ? Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

- 5. Найти все функции f , удовлетворяющие уравнению

$$f(x) + (x - 2)f(1) + 3f(0) = x^3 + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- 6. Через центр сферы проведены несколько плоскостей. Окружности, по которым эти плоскости пересекают сферу, пересекаются в 22 различных точках, причем в 12 из этих точек пересекаются по две окружности, а в остальных 10 точках — по три. Сколько плоскостей было проведено?

- 1. Числа a и b таковы, что многочлен $P(x) = -2x^3 + ax + b$ при каждом целом x принимает целое значение, кратное 3. Какое наименьшее положительное значение может принимать $P\left(\frac{5}{2}\right)$?
- 2. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{4 + \sin^2 x} = a - \cos x$$
 имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$.
- 3. Группа самолетов, пятая часть из которых — бомбардировщики, вылетела с аэродрома. При этом не более 10 из них полетели на запад, а остальные — на восток. Оказалось, что число самолетов, полетевших на восток, больше 50 %, но меньше 55 % от общего количества. Сколько самолетов полетели на запад?
- 4. Длины оснований трапеции равны 4 и 9, а длины боковых сторон равны 6 и 5. Найти геометрическое место точек, у каждой из которых на контуре этой трапеции имеется не менее двух ближайших. Найти суммарную длину линий, составляющих это геометрическое место точек. (Для точки контура ближайшей к ней является она сама.)

Химический, географический, биологический, психологии, биоинженерии и биоинформатики, фундаментальной медицины, наук о материалах и физико-химический факультеты

- 1. Решите уравнение

$$\frac{\cos 2x}{1 - \sqrt{2} \sin x} = 0.$$
- 2. Найдите $\log_3 x$, если $x < 3$ и

$$\log_3(3x) \cdot \log_3(9x) \cdot \log_3(27x) = \log_3^3 x + 23.$$
- 3. Решите неравенство

$$\arccos 3x \leq \arccos \sqrt{6 - 15x}.$$
- 4. Около треугольника ABC с высотами BB' и CC' описана окружность радиуса 6. Найдите радиусы окружностей, описанных около треугольников $BB'C$ и $AB'C'$, если $\cos A = -1/3$.
- 5. Среди 30 ненулевых чисел, среднее арифметическое которых равно 4, есть числа обоих знаков. Какие из следующих утверждений про эти числа *обязательно* справедливы (а какие — не обязательно):
 - а) среднее арифметическое положительных чисел больше 4;
 - б) отрицательных чисел меньше, чем положительных;
 - в) сумма модулей отрицательных чисел меньше, чем сумма положительных;
 - г) модуль наибольшего отрицательного числа меньше, чем наибольшее положительное число?

- 6. Найдите радиус наибольшего шара, который можно разместить в проволочном *каркасе* прямоугольного параллелепипеда размером $4 \times 8 \times 9$.
- 7. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение
- $$x^4 + (a+1)x^3 + (2a+1)x^2 - (a+1)x + 1 = 0$$
- на промежутке $(-\infty; -1)$ имеет не менее двух корней.

Факультеты почвоведения, глобальных процессов и высшая школа современных социальных наук

- 1. Найдите область определения функции

$$y = \frac{2x+7}{x+2+\sqrt{2x+7}}.$$

- 2. Ученик шел от дома до школы со скоростью 3 км/ч и опоздал на урок на 1 мин. В другой раз он пошел со скоростью 4 км/ч и пришел за 3 мин до начала урока. С какой скоростью ему нужно идти в следующий раз, чтобы прийти в точности к началу урока?

- 3. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} + 2\alpha\right)$, если $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ и $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < 0$.

- 4. Решите неравенство

$$\log_{(8x^2)}(-4x^3) \geq 1.$$

- 5. Один из школьников Алик, Боря, Витя или Гоша разбил в классе стекло. На вопрос, кто это сделал, они дали следующие противоречивые ответы.

Алик: стекло разбил Витя.

Боря: ни Витя, ни Алик этого не делали.

Витя: Боря стекла не разбивал.

Гоша: это сделал Боря.

Можно ли по этим ответам однозначно определить виновника, если солгать мог только он сам, а также не более чем один из остальных троих?

- 6. Стороны AD и BC четырехугольника $ABCD$ параллельны. Биссектрисы его углов A и D пересекаются в точке M , лежащей на стороне BC , а биссектрисы углов B и C — в точке N , лежащей на стороне AD . Найдите длины всех сторон четырехугольника $ABCD$, если $AM = 6$ и $BN = 4$.
- 7. Определите, какое наименьшее значение может принимать выражение
- $$|x - 3y - 4| + |3y + 8 - x| + \sqrt{x^2 - xy - 2y^2},$$
- и найдите суммарную длину линий, состоящих из всех точек (x, y) координатной плоскости, в которых это значение достигается.

Социологический факультет

- 1. Решите неравенство

$$|x| \leq \frac{18 - 3x}{|x|}.$$

- 2. Вычислите

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha \quad \text{при } \alpha = \frac{\pi}{8}.$$

- 3. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 80° . Найдите угол между высотой и медианой, проведенными к гипотенузе.

- 4. Решите уравнение

$$(x^2)^{\log_3 x} = \frac{x^5}{9}.$$

- 5. Среди учеников начальной школы провели опрос: кто любит зиму, а кто — лето. Оказалось, что 90% любителей зимы любят и лето, а 72% любителей лета любят и зиму. Зато 10% всех опрошенных не любят ни зимы, ни лета. Сколько процентов опрошенных любят только один из этих сезонов, но не любят другой? Каким при этом могло быть наименьшее число опрошенных?

- 6. Изобразите на координатной плоскости множество решений уравнения

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{y+3} = \sqrt{x+y} + 2.$$

- 7. Найдите наименьшее и наибольшее значения параметра a , при которых уравнение

$$\arcsin(ax) = 3 \arccos x + \frac{\pi}{6}$$

имеет хотя бы одно решение.

Централизованный экзамен для поступающих на договорные образовательные программы

- 1. Решите уравнение

$$|x|(2-x) = 5x.$$

- 2. Вычислите

$$\log_2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \log_2(1 - \cos \alpha) - 2 \log_2 \sin \alpha, \quad \text{где } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

- 3. Два друга шли по узкому мосту и, пройдя $\frac{3}{7}$ его длины, увидели приближающийся к мосту грузовик. Тогда они бросились бежать в противоположные стороны, но с одинаковой скоростью. С одним из них грузовик поравнялся у начала моста, а с другим — у конца. Во сколько раз скорость грузовика превышала скорость бегущих?

- 4. Решите неравенство

$$3^{1+3x^2} + 3^{1-x^2} \leq 10 \cdot 3^{x^2}.$$

- 5. При каких значениях x числа

$$x + \sqrt{2x} - 4 \quad \text{и} \quad 4 + \sqrt{2x} - x$$

имеют противоположные знаки?

- ▶ 6. Внутри треугольника ABC взята такая точка O , что $AO = 5$, а вписанные в треугольники AOB и BOC окружности касаются друг друга. Найдите CO , если $AB = 9$ и $BC = 8$.
- ▶ 7. Что больше:
 $3\log_8 9 \cdot \log_{10} 11 \cdot \dots \cdot \log_{30} 31$ или $5\log_{32} 31 \cdot \log_{30} 29 \cdot \dots \cdot \log_{10} 9$?
- ▶ 8. На диагональ куба, соединяющую две его противоположные вершины, спроектировали все остальные его вершины. Сколько различных точек образовали полученные проекции на этой диагонали и в каком отношении они ее разделили?
- ▶ 9. Найдите все a , при каждом из которых среди решений неравенства

$$\log_5(x^2 + 2ax - a + a^2) \leq 1$$
 найдутся два числа, разность которых равна 1.

2009 год

Олимпиада «Ломоносов»

- ▶ 1. На сколько одно из двух положительных чисел больше другого, если их среднее арифметическое равно $2\sqrt{3}$, а среднее геометрическое равно $\sqrt{3}$?
- ▶ 2. В свежих грибах содержание воды колеблется от 90% до 99%, а в сушеных — от 30% до 45%. В какое *наибольшее* число раз при этих ограничениях может уменьшиться вес грибов в результате сушки?
- ▶ 3. При каждом значении a найдите все значения x , удовлетворяющие уравнению

$$\log_5 \left(\frac{(x+1)^2}{x} - a \right) = \log_5 \frac{(x+1)^2}{x} - \log_5 a.$$
- ▶ 4. Можно ли данный двугранный угол величиной 90° пересечь плоскостью так, чтобы в полученном сечении образовался угол величиной 110° ?
- ▶ 4. Каким может быть *наибольший общий делитель* натуральных чисел m и n , если при увеличении числа m на 6 он увеличивается в 4 раза?
- ▶ 5. Сколько решений на отрезке $[0; \pi]$ имеет уравнение $5 \sin x + 4 = |5 \cos x + 2|$?
- ▶ 6. Две окружности касаются внешним образом: друг друга в точке A , а третьей окружности — в точках B и C . Продолжение хорды AB первой окружности пересекает вторую окружность в точке D , продолжение хорды AC пересекает первую окружность в точке E , а продолжения хорд BE и CD — третью окружность в точках F и G соответственно. Найдите BG , если $BC = 5$ и $BF = 12$.

- 7. Настенные часы сломались, отчего минутная стрелка стала в произвольные моменты времени мгновенно менять направление своего движения на противоположное, вращаясь со своей *прежней* угловой скоростью. Все потенциальные показания (в минутах) этой стрелки *целиком* заполняют промежуток $[0; 60)$.

а) Может ли такая стрелка в течение одного часа *бесконечно* много раз показать каждое из двух чисел 15 и 45?

б) Какое наибольшее количество раз в течение трех суток может встретиться *самое редкое* (за эти трое суток) показание такой стрелки?

- 8. Найдите все пары (x, y) , при каждой из которых для чисел

$$u = \sqrt{4 + x^3 - 9x} - x - 3^y \quad \text{и} \quad v = 2 - x - 3^y$$

справедливы *сразу все три* следующих высказывания: если $|u| > |v|$, то $u > 0$, если $|u| < |v|$, то $0 > v$, а если $|u| = |v|$, то $u > 0 > v$.

Механико-математический факультет

В 2009 г. вступительный экзамен на механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова состоял из двух частей: письменной и устной. На решение четырех задач письменной части был отведен 1 час 40 минут, а затем, после небольшого перерыва, абитуриенты тянули билеты с двумя заданиями и в течение часа готовились к устному ответу. Ввиду большого количества абитуриентов экзамен проводился в две смены.

Задачи для первой смены

- 1. Найти все значения переменной x , при которых все указанные функции $y = \sqrt{11 + 24x - 17x^2}$, $y = \arccos(x^2 - 2x + 1)$, $y = \log_3(x^2)$ имеют смысл и хотя бы одна из них обращается в нуль.
- 2. После рыбалки в ведре у Бориса (ведро у него вмещает не более 100 рыб) оказалось карасей на 25% меньше, чем у Андрея. Зато Андрей поймал других рыб на 25% меньше, чем Борис. Сколько всего рыб поймал Андрей, если известно, что это количество составляет 55% от общего количества пойманных Борисом и Андреем рыб?
- 3. Окружность радиуса 2 с центром на основании равнобедренного треугольника касается его боковых сторон. Одну из точек касания соединили отрезком с противолежащей вершиной основания. Этот отрезок делится высотой треугольника, проведенной к основанию, в отношении 4 : 3, считая от вершины. Найти площадь треугольника.

- 4. Найти все целые значения x из отрезка $[19; 29]$, удовлетворяющие неравенству

$$\frac{a^6 + 8a^5 - 2}{a^x} \leq 1,$$

где a — корень уравнения $y^{17} + 2y^{11} + 4y^5 = 1$.

- 5. а) Сформулировать и доказать формулы преобразования суммы и разности синусов в произведение, суммы и разности косинусов в произведение.

б) Решить уравнение $\cos 4x + \sin\left(2x - \frac{a\pi}{64}\right) = \sin 3x$, где a — наименьшее из таких двузначных натуральных чисел, при приписывании которых справа к числу 20092009 полученное десятизначное число делится на 36.

- 6. Наибольшая сторона четырехугольника равна 3, наименьшая сторона равна 1. Найти остальные его стороны, если известно, что тангенсы всех четырех внутренних углов четырехугольника равны между собой.

Задачи для второй смены

- 1. Найти все значения аргумента x , при каждом из которых соответствующее значение функции

$$f(x) = \frac{2 \cos \frac{\pi(15+x)}{6} + 1}{\sqrt{14 + 5x - x^2}}$$

положительно.

- 2. В некоторой компании каждый сотрудник либо правдивец (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет). Каждого из сотрудников спросили про каждого из остальных, правдивец тот или лжец. Всего было получено 32 ответа «правдивец» и 40 ответов «лжец». На сколько отличается в этой компании количество сотрудников-правдивцев от количества сотрудников-лжецов?
- 3. В треугольнике ABC сторона AB равна 38, а медиана CM наклонена к AB под углом 40° и равна 19. В этот треугольник вписана окружность. Найти периметр треугольника, вписанного в эту окружность и подобного треугольнику ABC .
- 4. При всех значениях параметра c решить систему

$$\begin{cases} \frac{9}{\sqrt{x+c}} + \frac{16}{\sqrt{y-c}} \leq 22 - \sqrt{x+c} - 4\sqrt{y-c}, \\ 2^{x-11} \log_2(4-y) = 1. \end{cases}$$

- 5. а) Сформулировать и доказать теорему Пифагора.

б) Окружность радиуса 2 вписана в равнобоковую трапецию. Точка касания делит боковую сторону трапеции в отношении 1 : 4. Найти площадь трапеции.

- 6. Найти все значения параметра c , при каждом из которых множество всех точек координатной плоскости, координаты которых (x, y) удовлетворяют системе
- $$\begin{cases} x^2 + y^2 - 16x + 10y + 65 \\ x^2 + y^2 - 14x + 12y + 79 \leq 0, \\ (x - c)(y + c) = 0 \end{cases},$$
- является отрезком.

Факультет биоинженерии и биоинформатики

- 1. Решить неравенство

$$\frac{x^2 + 3x + 7}{x - 3} \geq -1.$$

- 2. Решить уравнение $|x^2 - 5x + 3| = x - 3$.

- 3. Решить неравенство $(x^2 - 7x + 6)\sqrt{x^2 - 10x + 21} \geq 0$.

- 4. Решить уравнение $8 \cos^2(5x) - 4 \cos^2(10x) = 1$.

- 5. Центр описанной около треугольника окружности лежит на одной из сторон этого треугольника, а длины сторон этого треугольника образуют геометрическую прогрессию. Найти тангенс наименьшего угла этого треугольника.

- 6. Решить уравнение

$$\log_{(20+x^2)} \sin(\pi x) = -3 \log_{(20-x^2)} \left(\sqrt{x + 2\sqrt{x} + 1} - \sqrt{x} \right).$$

- 7. На одном из оснований прямого кругового цилиндра отмечена точка A , а на другом — точка B , длина отрезка AB равна 17. Известно, что высота этого цилиндра не превосходит 15, а сумма площадей оснований не превосходит 32π . (а) Чему может равняться объем этого цилиндра? (б) Какова минимально возможная площадь поверхности шара, содержащего такой цилиндр?

- 8. Найти все значения y , при каждом из которых числа

$$\cos(\arcsin(y + 1)), \quad |y + 1|, \quad 2^{y^2 + 2y + 2},$$

взятые в некотором порядке, являются подряд идущими членами некоторой арифметической прогрессии.

- 9. Найти все значения параметра b , при каждом из которых уравнение $b \cdot 3^{-2x} + b + 1 = -3^{-4x-1}$ имеет ровно два корня, больший из которых не меньше $\frac{1}{2}$.

Экзамен, альтернативный ЕГЭ по математике

Абитуриенты, относящиеся к установленным Министерством образования и науки РФ категориям, а именно: инвалиды, выпускники средних профессиональных учебных заведений, лица, имеющие среднее (полное)

общее образование, полученное до 1 января 2009 г., и др., при отсутствии результатов ЕГЭ имели право сдавать вступительные испытания, проводимые МГУ самостоятельно.

Приводим задания, которые предлагались абитуриентам механико-математического, химического, физико-химического, биологического, почвоведения, географического, фундаментальной медицины, наук о материалах, биоинженерии и биоинформатики, социологического, филологического, глобальных процессов, высшая школа современных социальных наук и психологии факультетов.

- 1. Какое из чисел больше,

$$\frac{(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{25})}{25(5\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{2})} \quad \text{или} \quad \left(\frac{3}{25} - 0,29\right) \cdot \frac{25}{26} : \frac{17}{4} ?$$

Ответ обосновать.

- 2. Найти область определения функции $y = \sqrt{\frac{x+5}{1-x}} \cdot \frac{3}{x^2-4}$.

- 3. Суммарное количество жителей в четырех деревнях равно 2009. Количество жителей в деревне А относится к количеству жителей в деревне Б как 2 : 3, количество жителей в деревне Б к количеству жителей в деревне В — как 4 : 5, количество жителей в деревне В к количеству жителей в деревне Д — как 5 : 2. (а) Найти количество жителей деревни Д. (б) На сколько процентов количество жителей деревни Д меньше, чем количество жителей деревни А?

- 4. Трапеция, диагонали которой взаимно перпендикулярны, вписана в окружность. Найти площадь этой трапеции, если ее средняя линия равна $\sqrt{7}$.

- 5. Решить неравенство $\sqrt{4x^3 - 9x^2 + 2} - \sqrt{x - x^2} > 0$.

- 6. Решить уравнение $\sin(2x) + \cos(2x) = |\sin(2x)|^{-1}$.

- 7. Найти все значения x , удовлетворяющие неравенству

$$|8 + x| \left(\log_{\frac{1}{3}}(x + 16) + 2 \right) (\log_3(x^2) - 4) \geq 0.$$

- 8. Найти минимально возможное значение площади полной поверхности правильной треугольной пирамиды, у которой расстояние от середины высоты, опущенной на основание, до боковой грани равно 2.

- 9. Найти все натуральные числа, которые оканчиваются на 1837 (год смерти А. С. Пушкина), а после вычеркивания последних четырех цифр уменьшаются в целое число раз.

Централизованный экзамен для поступающих на договорные образовательные программы

- ▶ 1. Что больше: $(\sqrt{125}\sqrt[3]{8} + \sqrt{4 \cdot 5^{-3}})\sqrt{\frac{125}{81}}$ или $5^{3 \log_5 3}$? Ответ обосновать.
- ▶ 2. Решить
 - а) уравнение $(\sqrt{5-x} + 1 + x)(7-x) = 0$;
 - б) неравенство $(\sqrt{5-x} + 1 + x)(7-x) > 0$.
- ▶ 3. Решить неравенство

$$\frac{7x^4}{5x+6-4x^2} \leq 0.$$
- ▶ 4. Окружность радиуса $\sqrt{5}$ вписана в равнобедренный треугольник и делит пополам высоту треугольника, проведённую к основанию. Найти площадь треугольника.
- ▶ 5. Решить неравенство

$$\frac{5}{3 + \sqrt{x^2 - 4x + 4}} < 5 - 2 \left| 1 - \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \right|.$$
- ▶ 6. Решить уравнение $2 \cos^2 x - 5 \sin 2x + \frac{6t}{\pi} = 0$, где $t = \arccos(\cos \frac{23\pi}{3}) - \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$.
- ▶ 7. Пятая часть персонала фирмы работает в транспортном отделе, еще 52 сотрудника — в отделе продаж, остальные — в нескольких цехах, численность каждого из которых составляет $1/7$ от общей численности персонала фирмы. Чему равна общая численность персонала фирмы?
- ▶ 8. Высота правильной треугольной пирамиды, проведённая из одной из вершин основания к противоположной боковой грани, равна 4. Какие значения может принимать площадь полной поверхности такой пирамиды?
- ▶ 9. Найти все такие значения c , при каждом из которых графики функций $y = 3^{2x^2+4x} + 3$ и $y = c(3^{x^2} \cdot 3^{2x} + 1)$ имеют ровно две общие точки.

2010 год

Олимпиада «Ломоносов»

- ▶ 1. Решите неравенство

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{(\log_2 3)^{4-x^2}} \leq (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-(\log_3 2)^{2x-1}}.$$
- ▶ 2. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята точка E , а на боковых сторонах AB и BC точки D и F так, что $DE \parallel BC$ и

$EF \parallel AB$. Какую часть площади треугольника ABC занимает площадь треугольника DEF , если $BF : EF = 2 : 3$?

- 3. Два вкладчика вложили деньги в общее дело. После этого один из них добавил ещё 1 млн р., в результате чего его доля в общем деле увеличилась на 0,04, а когда он добавил ещё 1 млн р., его доля увеличилась ещё на 0,02. Сколько денег ему нужно добавить ещё, чтобы увеличить свою долю ещё на 0,04?

- 4. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{-x-2}} - \frac{1}{\sqrt{x+4}} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{(x+4)(-x-2)}}.$$

- 5. Числа 54 и 128 являются членами геометрической прогрессии. Найдите все натуральные числа, которые могут встретиться в этой прогрессии.
- 6. Проекция некоторой кривой в координатном пространстве на плоскости Oxz и Oyz удовлетворяют уравнениям

$$5x + \cos z = 0 \quad \text{и} \quad z = \arctg \sqrt{y-3}$$

соответственно. Найдите функцию $y = f(x)$, график которой состоит из тех и только тех точек, которые могли бы при этих условиях служить проекциями точек той же кривой на плоскость Oxy .

- 7. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 25^x - 13 \cdot 5^x + a < 0, \\ 12 \sin^4 \pi x - \cos 4\pi x = 11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

- 8. На ребре AS треугольной пирамиды $SABC$ отмечены такие точки M и N , что $AM = MN = NS$. Найдите площадь треугольника NBC , если площади треугольников ABC , MBC и SBC равны 1, 2 и $\sqrt{37}$ соответственно.
- 9. На доске написан квадратный трёхчлен $x^2 + 9x + 47$. Таня (по своему усмотрению) увеличивает или уменьшает на 1 коэффициент при x , после чего Ваня увеличивает или уменьшает на фиксированное число m свободный член, а далее эти действия повторяются. Как только написанный на доске многочлен имеет целый корень, Ваня получает оценку «пять». Может ли он обеспечить себе «пятёрку» при любых действиях Тани, если а) $m = 2$; б) $m = 3$?
- 10. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 1$ пересекаются в точке O . Две окружности, пересекающие основание BC в точках K и L соответственно, касаются друг друга в точке O , а прямой AD — в точках A и D соответственно. Найдите $AK^2 + DL^2$.

Механико-математический факультет

В 2010 г. вступительный экзамен на механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова проводился только в письменной форме (продолжительность экзамена — 4 часа).

- 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^y = 4^x + 8, \\ y = \frac{x+1}{\log_2 x}. \end{cases}$$

- 2. Решите неравенство

$$\frac{1-x}{x} > \sqrt{\frac{3x-2}{3x+4}}.$$

- 3. Найдите наименьшее из положительных значений функции

$$\frac{4}{3 \cos^2 x + 2 \sin x - 1}.$$

- 4. Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $\angle ABC = \frac{\pi}{12}$, $BC = 5$, $2AC > AB$, медиана CD образует со стороной AC треугольника угол величиной $\frac{5\pi}{12}$.

- 5. Из лесу выскочил заяц и помчался по прямой в направлении тернового куста. На полпути до куста заяц напоролся на колючку и стал бежать в полтора раза медленнее. Когда зайцу оставалось до куста 50 метров, из лесу (из того же места) выбежал волк и погнался за зайцем. Когда заяц добежал до куста, волку оставалось до него 10 метров. На каком расстоянии от леса находится терновый куст, если известно, что волк всё время бежал со скоростью, с которой первоначально бежал заяц?

- 6. В основании параллелепипеда лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 1$ и $BC = 4$, боковые ребра AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 перпендикулярны основанию и равны 1. Сфера касается прямой DC_1 в точке C_1 , прямой DB_1 в точке, лежащей внутри отрезка DB_1 , и проходит через точку D_1 . Найдите радиус сферы.

Факультет биоинженерии и биоинформатики, факультет наук о материалах

- 1. Решите уравнение

$$|-4^x + 2^{x+5} - 150| = 150.$$

- 2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x-y)\sqrt{y+1} = 0, \\ \sqrt{x^2+6x+y+10} = -y^2-8y+x+2. \end{cases}$$

- 3. а) Решите уравнение

$$\frac{9(\sin x + \cos x)^2}{\cos 2x} + \frac{32(1 + 7 \operatorname{ctg} x \operatorname{tg} 4x)}{\operatorname{tg} x + 7 \operatorname{tg} 4x} + 7 = 0.$$

б) Найдите сумму всех корней этого уравнения, принадлежащих отрезку $[0; 120\pi]$, и выясните, что больше: эта сумма или число 23040.

- 4. В 4-угольник $ABCD$ можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Каждая его диагональ делит его площадь в отношении 2 : 3. Найдите тангенсы всех углов 4-угольника $ABCD$ и радиус окружности, описанной около 4-угольника, если наибольшая сторона его имеет длину 24.

- 5. Решите неравенство

$$4 + (\cos x)(\log_3 x)(\log_4 81) + (\sin^2 x)(\log_2 x^8) \leq 2 \cos x - 4 \cos 2x + \log_{\sqrt{2}} x^4.$$

- 6. Найдите все значения x , при которых наименьшее из чисел $(x+1)^3$ и $x^2 - 3x - 2$ меньше чем наименьшее из чисел $x^3 + 3x^2 + 2x + 2$ и $x^2 + 5x + 4$.

Факультет государственного управления, социологический факультет, высшая школа современных социальных наук

- 1. Докажите, что при

$$a = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$$

число $6a - a^3$ — целое, и найдите это число.

- 2. Спортсмены Иванов и Петров участвовали в марафоне. Первую половину пути Иванов бежал в два раза быстрее Петрова. Потом он подвернул ногу и оставшуюся половину пути бежал в два раза медленнее Петрова. Петров же всё время бежал с постоянной скоростью и пробежал всю дистанцию за 4 часа. Сколько времени понадобилось Иванову, чтобы добраться до финиша?

- 3. Найдите $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$, если известно, что $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, а $\cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) < 0$.

- 4. Решите неравенство

$$4^{\log_9(x^2+4x-5)} \leq 2^{\log_3(1+8x-x^2)}.$$

- 5. В трапеции $ABCD$ основание AD в полтора раза длиннее основания BC , а длины боковых сторон AB и CD равны. На стороне BC взята такая точка K , что $BK = 2KC$. Прямые AK и CD пересекаются в точке E , а прямые DK и AB — в точке F . Найдите величину отношения $BF : CE$.
- 6. Найдите наименьшее и наибольшее значения параметра a , при которых уравнение

$$\sqrt{x-a} + \sqrt{x^3+1} = 2$$

имеет хотя бы одно решение.

Экзамен, альтернативный ЕГЭ по математике

Абитуриенты, относящиеся к установленным Министерством образования и науки РФ категориям, а именно: инвалиды, граждане иностранных государств, а также лица, уже имеющие высшее образование, и др., при отсутствии результатов ЕГЭ имели право сдавать вступительные испытания, проводимые МГУ самостоятельно.

- 1. Представьте число

$$\frac{1}{11} - \frac{1}{29} - 0,125$$

в виде несократимой обыкновенной дроби.

- 2. Решите неравенство

$$\frac{x+7}{x+1} \leq x+3.$$

- 3. Между пунктами А и Б, расположенными на берегу озера, курсирует катер. На сколько процентов увеличится время в пути из пункта А в пункт Б, если скорость катера уменьшится на 20%?

- 4. Решите уравнение $3\log_8(x+1) = \log_2 \sqrt{2x+5}$.

- 5. Стороны треугольника равны 3, 5, 7. Найдите величину большего из углов треугольника.

- 6. Решите неравенство $2 \cdot 3^x + 3^{1-x} \leq 7$.

- 7. Параллелограмм, одна из сторон которого равна 3, описан вокруг окружности радиуса 1. Найдите площадь параллелограмма.

- 8. Решите уравнение $2\sin^4 x + 7\cos^3 x = 2$.

- 9. Даны две окружности радиусов 2 и 3. Прямая касается обеих окружностей и пересекает отрезок, соединяющий их центры. Найдите расстояние между точками касания, если расстояние между центрами равно 7.

- 10. Студент Василий добирался от железнодорожной станции до деревни Бабушкино. Он ехал на автобусе до посёлка Дедушкино, где встретил знакомого, которых за 10 минут подвёз его до деревни на своей машине. Машина ехала в полтора раза быстрее автобуса. Когда пришло время уезжать, Василий за час доехал на велосипеде до посёлка Дедушкино, а оттуда на такси доехал до станции. Такси ехало в 6 раз быстрее велосипеда, и в итоге Василий на обратную дорогу от деревни до станции потратил ровно столько же времени, сколько потребовалось, чтобы добраться от станции до деревни. Сколько времени ушло у Василия на дорогу в один конец?

- 11. В основании правильной пирамиды $ABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Через середины ребер AD , BC и CS проведена плоскость.

Найдите периметр сечения пирамиды этой плоскостью, если длины боковых ребер пирамиды равны 7.

- 12. Найдите все целые положительные числа x и y , удовлетворяющие уравнению

$$y^3 = x^3 + 9x^2 + 17.$$

Централизованный экзамен для поступающих на договорные образовательные программы

- 1. Решите уравнение $|2x + 1| + 4x + 4 = 0$.

- 2. Пусть $a = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{2}$. Докажите, что число $a^2 + \frac{1}{a^2}$ целое, и найдите это число.

- 3. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{\operatorname{tg} 3x} = \sqrt{-\operatorname{tg} x},$$

удовлетворяющие неравенствам $0 \leq x < \pi$.

- 4. Решите неравенство

$$\log_{0,5}(2^{x+1} - 3) \geq x - 1.$$

- 5. Из города А в город Б выехал автобус и, проехав три четверти пути, встретился с выехавшей ему навстречу из Б машиной. Когда автобус приехал в Б, машине до А оставалась ещё треть пути. Какую долю пути преодолел автобус, когда машина выехала из Б, если их скорости постоянны?
- 6. В равносторонний треугольник со стороной 1 помещены две окружности одинакового радиуса. Каждая из них касается двух сторон треугольника и другой окружности. Найдите радиусы этих окружностей.

Экзамен по математике, альтернативный ЕГЭ, для иностранных граждан (выпускников ЦМО МГУ)

- 1. Решите неравенство

$$\frac{2}{x-2} \leq \frac{3}{x+1}.$$

- 2. Вчера лекарство в аптеке подорожало на 12%. Сколько стоило это лекарство до подорожания, если сегодня, после снижения цены на 5%, оно стоит 133 рубля?

- 3. Решите уравнение

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1+2x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3-x}.$$

- 4. Найдите площадь треугольника ABC , если его сторона BC равна 4, а углы A и B равны соответственно $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{8}$.

- 5. Найдите рациональное число, равное выражению

$$\log_{\sqrt{3}} \sqrt{2} \cdot \log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt{3}.$$

- 6. На плоскости расположен отрезок AB длины 24 и две точки P , Q . Точка P равноудалена от A и B на расстояние 15, а точка Q также равноудалена от A и B , но на расстояние 20. Найдите длину отрезка PQ , если известно, что она меньше длины отрезка AB .
- 7. Из деревни Аниково в деревню Волково вышел пешеход. Через 20 минут ему вслед выехал велосипедист и приехал в Волково на 5 минут раньше пешехода. Какую долю пути пешеход прошёл к моменту встречи с велосипедистом, если они всё время двигались с постоянными скоростями?
- 8. Из точки, взятой на окружности, проведены две хорды, образующие угол в 45° . Длина отрезка, соединяющего середины этих хорд, равна 2. Найдите длину радиуса окружности.

- 9. Решите уравнение

$$\frac{\cos x + \sin 2x}{\cos 3x} = 1.$$

- 10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + xy = 8x - 3y, \\ y^2 + 2xy = 3x - 2y. \end{cases}$$

- 11. Рёбра куба равны 1. Найдите расстояние между серединами его скрещающихся ребер.

- 12. Найдите все положительные числа x , удовлетворяющие неравенству

$$\log_3(x+1) \cdot \log_2(x^2 + 3x + 6) \leq 4.$$

2011 год

Олимпиада «Ломоносов»

- 1. Два поезда, содержавшие по 15 одинаковых вагонов каждый, двигались навстречу друг другу с постоянными скоростями. Ровно через 28 с после встречи их первых вагонов пассажир Саша, сидя в купе третьего вагона, поравнялся с пассажиром встречного поезда Валерой, а ещё через 32 с последние вагоны этих поездов полностью разъехались. В каком по счёту вагоне ехал Валера?
- 2. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} + 2x \geq 0, \\ -1 - x^2 \leq y \leq 2 + \sqrt{x}. \end{cases}$$

- 3. Из шара какого наименьшего радиуса можно вырезать правильную четырёхугольную пирамиду с ребром основания 14 и апофемой 12?
- 4. Решите неравенство

$$\log_5(5x^2 + 2x) \cdot \log_5\left(5 + \frac{2}{x}\right) > \log_5 5x^2.$$

- 5. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке K . Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке L , причём $AL = 10$. Найдите BL , если $AK : BK = 2 : 5$.
- 6. При каких значениях a , b и c множество действительных корней уравнения

$$x^5 + 2x^4 + ax^2 + bx = c$$

состоит в точности из чисел -1 и 1 ?

- 7. Какое наименьшее (одинаковое) число карандашей нужно положить в каждую из 6 коробок так, чтобы в любых 4 коробках нашлись карандаши любого из 26 заранее заданных цветов (карандашей имеется достаточное количество)?
- 8. Функция $y = f(t)$ такова, что сумма корней уравнения $f(\sin x) = 0$ на отрезке $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ равна 33π , а сумма корней уравнения $f(\cos x) = 0$ на отрезке $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ равна 23π . Какова сумма корней второго уравнения на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$?

Дополнительное вступительное испытание по математике

Начиная с 2011 года на некоторых факультетах МГУ проводится дополнительное (по отношению к ЕГЭ) вступительное испытание по математике.

- 1. Вычислите значение функции $x^2 - 0,625x - \frac{1}{8}$ в точке $x = \frac{4}{5}$.

- 2. Решите уравнение

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1.$$

- 3. Решите уравнение

$$\log_2(3x - 4) = \log_4(2 - x).$$

- 4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{5x+3}-1}{\sqrt{3x+2}-1} > 1.$$

- 5. Медианы AL и BM треугольника ABC пересекаются в точке K . Найдите длину отрезка CK , если $AB = \sqrt{3}$ и известно, что вокруг четырёхугольника $KLCM$ можно описать окружность.

- 6. Найдите наибольшее из значений функции

$$\frac{9^x}{4^x - 6^x + 9^x}$$

и точку x , в которой это значение достигается.

- 7. В закрытой коробке, имеющей форму куба со стороной 5, лежат два шара. Радиус первого из них равен 2. Этот шар касается плоскости основания и двух соседних боковых граней куба. Второй шар касается двух других боковых граней куба, плоскости основания и первого шара. Чему равен радиус второго шара?

- 8. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 + 4xy + 11y^2 \leq 1, \\ 4x + 7y \geq 3. \end{cases}$$

2012 год

Олимпиада «Ломоносов»

- 1. Найдите первый член арифметической прогрессии $a_1, a_2, \dots$, если $a_{13} = 0$, а произведение чисел $5^{a_1}, 5^{a_2}, \dots, 5^{a_{24}}$ равно их среднему арифметическому.

- 2. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$\left| \arccos \sin 6 - \frac{\pi x}{2} \right| = 6.$$

- 3. В группу из 17 детей присланы подарки двух видов: каждый подарок первого вида содержит 4 пряника и 9 конфет, а второго — 3 пряника и 11 конфет. Объединив эти подарки, все пряники разделили между детьми поровну. Могло ли случиться при этом, что конфеты разделить поровну не удалось?

- 4. Найдите все значения $a > 0$, при каждом из которых из неравенства $x^2 + y^2 \leq a$ следует неравенство $(|x| + 3)(|y| + 3) \leq 25$.

- 5. Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Продолжение отрезка BO за точку O пересекает описанную вокруг треугольника ABC окружность в точке D . Найдите угол B , если $OD = 4AC$.

- 6. Найдите область значений функции

$$f(x) = \log_2 x \cdot \log_2 \frac{64}{x} \cdot \sqrt{\log_3(27 - 3x) \cdot \log_3 \frac{9}{27 - 3x}}.$$

- 7. По деревянному бруску (прямоугольному параллелепипеду) высотой 25 и площадью основания 60 делаются последовательно два плоских параллельных наклонных среза: второй — на 2 ниже первого. После первого среза, наивысшая и наинизшая точки которого находятся на высоте 15 и 10, остаётся нижняя часть бруска, которую перед вторым срезом можно повернуть на любой угол вокруг вертикальной оси, проходящей через

центр симметрии основания бруска. Каков наименьший возможный объём верхнего кусочка, отсекаемого от этой части вторым срезом?

- 8. В течение дня выставку посетили по одному разу ровно 1000 человек, причём в любой момент на ней находилось менее 38 посетителей. Какое наибольшее количество человек, не встречавшихся (попарно) на выставке друг с другом, можно при этом гарантированно выбрать из всех посетителей?

Дополнительное вступительное испытание по математике

- 1. Найдите многочлен второй степени, если известно, что его корни равны $-\frac{4}{7}$ и $\frac{5}{3}$, а свободный член равен -2 .

- 2. Вычислите $\log_2 \log_{81} \frac{417}{139}$.

- 3. Решите неравенство

$$(9^x - 3^{x+2} + 14) \cdot \sqrt{4 - 2^x} \leq 0.$$

- 4. Решите уравнение

$$\sin 3x = \sqrt{2} \cos x - \sin x.$$

- 5. Найдите площадь фигуры, состоящей из точек (x, y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению

$$|x| + |x + 3y| + 3|y - 2| = 6.$$

- 6. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках D и E соответственно и пересекает сторону AC в точках F, G (точка F лежит между точками A и G). Найдите радиус этой окружности, если известно, что $AF = 5$, $GC = 2$, $AD : DB = 2 : 1$ и $BE = EC$.

- 7. Определите, при каких значениях параметра a уравнение

$$a\sqrt{x+y} = \sqrt{3x} + 2\sqrt{y}$$

имеет единственное решение (x, y) .

- 8. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник ABC со сторонами $AC = BC = 5$ и $AB = 6$, боковые ребра AS, BS и CS пирамиды равны соответственно 7, 7 и 4. Прямой круговой цилиндр расположен так, что окружность его верхнего основания имеет ровно одну общую точку с каждой из боковых граней пирамиды, а окружность нижнего основания лежит в плоскости ABC и касается прямых AC и BC . Найдите высоту цилиндра.

2013 год

Олимпиада «Ломоносов»

- 1. На покраску дома жёлтой краски потребовалось на 20 % больше, чем белой, а коричневой краски — на 25 % меньше, чем жёлтой. На сколько процентов коричневой и жёлтой краски суммарно потребовалось больше, чем белой?

- 2. Решите уравнение $\sqrt{6} \cos x + \sqrt{2} |\sin x| = 2$.

- 3. Решите неравенство

$$\log_{x^2+4x+3}(x-4)^2 \cdot \log_{-x^2+3x+4}(3-x)^3 \leq 0.$$

- 4. В трапеции $ABCD$, где $BC \parallel AD$, а диагонали пересекаются в точке O , на отрезке BC выбрана такая точка K , что $BK : CK = 2 : 3$, а на отрезке AD выбрана такая точка M , что $AM : MD = 3 : 2$. Найдите площадь треугольника COD , если $AD = 7$, $BC = 3$, $KM = 6$, а $\cos \angle CAD = \frac{1}{5}$.

- 5. Функция f с областью определения $D(f) = [1; +\infty)$ удовлетворяет равенству

$$f\left(\frac{4^y + 4^{-y}}{2}\right) = y$$

для любого $y \geq 0$. Для каждого значения $a \neq 0$ решите неравенство

$$f\left(\frac{a}{x+2a}\right) \leq 1.$$

- 6. В коробке у Маши лежат 25 новогодних шаров, которыми Маша начинает украшать ёлку. Каждый шар она сначала в течение 10 с выбирает в коробке, а затем в течение 15 с вешает на ёлку. Два её младших брата Саша и Паша незаметно снимают шары с ёлки и прячут среди своих игрушек. Дождавшись момента, когда Маша начинает искать в коробке очередной шар, один из братьев (но не оба) может снять с ёлки один шар, на что ему требуется ровно 10 с. После этого на то, чтобы спрятать украденный шар, у Саши уходит 50 с (после чего он готов красть с ёлки следующий шар), а у Паши — 1 мин и 50 с. Какое наименьшее число шаров может висеть на ёлке в тот момент, когда Маша повесит свой последний шар?
- 7. Три велосипедиста одновременно начинают двигаться в одной плоскости по трём концентрическим окружностям с общим центром O и радиусами 20 м — для первого, 40 м — для второго и 80 м — для третьего велосипедиста. В начальный момент времени велосипедисты находятся на одном луче с вершиной в точке O . Все велосипедисты движутся против часовой стрелки с постоянными скоростями, причём скорость первого

велосипедиста вдвое больше скорости второго, но вдвое меньше скорости третьего. Велосипедисты продолжают своё движение до тех пор, пока не закончит свой полный круг последний из них (тот, кто потратит на объезд своего круга больше всего времени). Сколько раз за это время они окажутся на одной прямой, не проходящей через центр O ?

- 8. В пирамиде $FABC$ выполнены равенства $AB = BC$, $FB = FK$, где K — середина отрезка AC , а тангенс угла между плоскостями FAB и ABC относится к тангенсу угла между плоскостями FBC и ABC как $1 : 3$. Некоторая плоскость, параллельная AB , делит ребро FC в отношении $1 : 4$, считая от вершины F , и проходит через основание O высоты FO пирамиды $FABC$. Найдите отношение объёмов многогранников, на которые эта плоскость делит пирамиду $FABC$.

Дополнительное вступительное испытание по математике

- 1. Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен 2. Один из его корней равен $\frac{5}{2}$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 3$.
- 2. Вычислите $\log_{12} 3 \cdot \log_9 12$.
- 3. Решите неравенство

$$9(1 + 5^{1-2x})^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(5^{2x} + 5)^{\frac{1}{2}} \geq 6^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{x}{2}}.$$

- 4. Решите уравнение

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sin 5x} + \frac{\cos x}{\cos 5x}.$$

- 5. В 14:00 из села Верхнее вниз по течению реки в сторону села Нижнее отправился катер «Быстрый». Когда до Нижнего оставалось плыть 500 метров, ему навстречу из Нижнего вышел катер «Смелый». В этот же самый момент «Быстрый», не желая встречи со «Смелым», развернулся и пошел обратно к Верхнему. В 14:14, когда расстояние по реке от «Быстрого» до Верхнего сравнялось с расстоянием по реке от «Смелого» до «Быстрого», на «Смелом» осознали, что они идут с «Быстрым» на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно к Нижнему. В исходные пункты катера вернулись одновременно в 14:18. Найдите расстояние по реке между Верхним и Нижним, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.
- 6. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r . Найдите r , если $R = 12$, а косинус угла между диагональю AC и основанием AD равен $\frac{3}{4}$.
- 7. В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC , такой что $AC = BC = 1$. На ребре $A'B'$ верхнего основания (параллельном AB) отмечена точка D так, что $A'D : DB' = 1 : 2$.

Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $ABC'D$, если высота призмы равна 1.

- 8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\sin\left(x + \frac{a}{x}\right) = x + 1$$

имеет бесконечно много решений.

2014 год

Олимпиада «Ломоносов»

- 1. Найдите все значения a , при каждом из которых сумма модулей корней квадратного трёхчлена $x^2 + 2ax + 4a$ равна 3.
- 2. Маша выписала на доске подряд все натуральные числа от 2 до 2015. Пришёл Ваня и заменил каждое из этих чисел суммой его цифр. Пришла Таня и сделала то же самое с получившимися числами. Так продолжалось до тех пор, пока на доске не осталось 2014 однозначных чисел (цифр). Какова сумма всех оставшихся чисел?
- 3. Среди всех прямоугольников, вершины которых лежат на сторонах данного ромба, а стороны параллельны диагоналям ромба, наибольшую площадь имеет прямоугольник, отношение сторон которого равно 2. Найдите острый угол ромба.
- 4. Найдите все пары (a, b) , при которых множество решений неравенства $\log_{2014}(x - a) > 2x^2 - x - b$ совпадает с промежутком $(0; 1)$.

- 5. Найдите все значения α , при каждом из которых нули функций

$$f(x) = \sin\left(\frac{3x}{2} - \alpha\right)$$

и

$$g(x) = 2 \sin 2x - 4 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}$$

строго чередуются на числовой оси.

- 6. Для охраны объекта в течение 5 суток заказчик договорился с охранниками о следующем: все они укажут отрезки времени своих предполагаемых дежурств с единственным условием, чтобы их объединение составляло заданные 5 суток, а он выберет из этих отрезков любой набор, удовлетворяющий тому же условию, и оплатит работу из расчёта 500 руб. в час каждому дежурному. Какая наименьшая сумма денег, заранее подготовленная заказчиком, позволит ему наверняка расплатиться с охранниками?

- 7. В правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ вписан шар радиуса $\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности вписанного в шар прямого кругового цилиндра, основание которого лежит в плоскости, проходящей через точку A и середины рёбер BB_1 и CC_1 .
- 8. Прямоугольная таблица состоит из 5681 одинаковой клетки. Петя и Вася пронумеровали клетки натуральными числами $1, 2, \dots, 5681$ подряд. Петя нумеровал клетки по строкам слева направо (сначала первую строку, затем вторую и т. д.), а Вася — по столбцам сверху вниз (сначала первый столбец, затем второй и т. д.). Оказалось, что ровно в 5 клетках их номера совпали. Чему равна сумма числа строк и числа столбцов в этой таблице?

Дополнительное вступительное испытание по математике

- 1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}(8 + 4\sqrt{3}).$$

- 2. Найдите максимальное значение функции $\log_{1/2}(x^2 - 6x + 17)$.

- 3. Найдите все положительные x , удовлетворяющие неравенству $x^{3x+7} > x^{12}$.

- 4. Решите уравнение

$$\cos^2 x - \cos x \sin^2 \left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12} \right) + \frac{1}{4} = 0.$$

- 5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A . Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 и Ω_2 и соответственно в точках B_1 и B_2 . Общая касательная к окружностям, проходящая через точку A , пересекает отрезок B_1B_2 в точке C . Прямая, делящая угол ACO_2 пополам, пересекает прямые O_1B_1 , O_1O_2 , O_2B_2 в точках D_1 , L , D_2 соответственно. Найдите отношение $LD_2 : O_2D_2$, если известно, что $CD_1 = CO_1$.

- 6. Найдите все положительные x, y , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^{3/2} + y = 16, \\ x + y^{2/3} = 8. \end{cases}$$

- 7. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{2}$. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней.

- 8. Пусть

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y, \\ g(x, y) &= -\sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y. \end{aligned}$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

2015 год

Олимпиада «Ломоносов»

- 1. В ящике лежат 100 разноцветных шариков: 28 красных, 20 зелёных, 13 жёлтых, 19 синих, 11 белых и 9 чёрных. Какое наименьшее число шариков надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них заведомо оказалось не менее 15 шариков одного цвета?
- 2. Найдите главный (наименьший положительный) период функции

$$y = (\arcsin(\sin(\arccos(\cos 3x))))^{-5}.$$

- 3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и DB перпендикулярны сторонам DC и AB соответственно. Из точки B проведён перпендикуляр на сторону AD , пересекающий AC в точке O . Найдите AO , если $AB = 4$, $OC = 6$.
- 4. Найдите наибольшее значение $x + y$, если числа x и y удовлетворяют неравенству

$$\log_{\frac{x^2+y^2}{4}} y \geq 1.$$

- 5. Отрезок $AB = 8$ пересекает плоскость α под углом 30° и делится этой плоскостью в отношении $1 : 3$. Найдите радиус сферы, проходящей через точки A и B и пересекающей плоскость α по окружности наименьшего радиуса.
- 6. Какие из следующих трёх значений a : а) $a = 0$, б) $a = \frac{3}{2}$, в) $a = 2$ — удовлетворяют следующему условию: для любого натурального n и для любого набора чисел $x_1, \dots, x_n \in [0; 3]$ уравнение

$$\sum_{i=1}^n |x - x_i| = an$$

имеет на отрезке $[0; 3]$ хотя бы один корень?

- 7. Каков минимальный объём пирамиды, у которой в основании лежит правильный треугольник со стороной 6, а все плоские углы при вершине равны между собой и не превосходят $2 \arcsin \frac{1}{3}$?
- 8. Маша, скучая на уроке математики, проделала с некоторым 2015-значным натуральным числом следующую операцию: от десятичной записи этого числа она отбросила последнюю цифру и к умноженному на 3 получившемуся числу прибавила удвоенную отброшенную цифру. С полученным числом она опять проделала ту же операцию и т.д. После многократного применения этой операции получающиеся у Маши числа перестали меняться, и тогда она остановилась.

а) Какое число оказалось у Маши в конце?

б) Какое наименьшее число могло быть у Маши в самом начале (укажите две его последние цифры)?

Дополнительное вступительное испытание по математике

- ▶ 1. Найдите $f(2)$, если $f(x) = \frac{x}{5} + \frac{3}{x} + \frac{1}{10}$.
- ▶ 2. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 - 7x + 5 = 0$.
- ▶ 3. Решите неравенство $\cos x + \sqrt{2} \cos 2x - \sin x \geq 0$.
- ▶ 4. Решите уравнение $\log_x |2x^2 - 3| = 4 \log_{|2x^2 - 3|} x$.
- ▶ 5. Окружность радиуса $\frac{3}{4}$ касается середины стороны BC треугольника ABC и пересекает сторону AB в точках D и E так, что $AD : DE : EB = 1 : 2 : 1$. Чему может равняться AC , если $\angle BAC = 30^\circ$?
- ▶ 6. Велосипедист Василий выехал из пункта А в пункт Б. Проехав треть пути, Василий наткнулся на выбоину, вследствие чего велосипед безнадёжно вышел из строя. Не теряя времени, Василий бросил сломавшийся велосипед и пошёл пешком обратно в пункт А за новым велосипедом. В момент поломки из пункта А выехал мотоциклист Григорий. На каком расстоянии от пункта А он встретит Василия, если пункт Б отстоит от пункта А на 4 км, а Василий доберется до пункта А тогда же, когда Григорий до пункта Б? Скорости велосипеда, мотоцикла и пешехода считать постоянными.
- ▶ 7. В правильную треугольную призму с основаниями ABC , $A'B'C'$ и боковыми рёбрами AA' , BB' , CC' вписана сфера. Найдите её радиус, если известно, что расстояние между прямыми AE и BD равно $\sqrt{13}$, где E и D — точки, лежащие на $A'B'$ и $B'C'$ соответственно, и $A'E : EB' = B'D : DC' = 1 : 2$.
- ▶ 8. Найдите все пары (α, β) , при которых достигается минимум выражения
$$\frac{4 - 3 \sin \alpha}{2 + \cos 2\alpha} + \frac{2 + \cos 2\alpha}{\beta^2 + \beta + 1} + \frac{\beta^2 + \beta + 1}{\sqrt{\beta} + 1} + \frac{\sqrt{\beta} + 1}{4 - 3 \sin \alpha}.$$

2016 год

Олимпиада «Ломоносов»

- ▶ 1. Незнайка прыгал от своего дома к дому Знайки. Три четверти пути он пропрыгал прыжками, длина которых равна двум его обычным шагам, а остальную четверть пути — прыжками, длина которых равна трем его обычным шагам. Оказалось, что прыжков в два шага было на 350 больше, чем прыжков в три шага. Сколько обычных шагов от

дома Знайки до дома Незнайки? Считайте, что все шаги у Незнайки одинаковые.

- 2. Найдите все решения уравнения $\operatorname{arctg}^2 x = 3 \operatorname{arctg}^2 x + \frac{\pi^2}{36}$.
- 3. Том Сойер, Сид Сойер и Гек Финн красили забор. Вначале Том красил один в течение времени, за которое Сид и Гек, работая вместе, могли бы покрасить половину забора. Затем красил один Сид в течение времени, за которое Том и Гек, работая вместе, могли бы покрасить $\frac{5}{4}$ всего забора. Потом красил один Гек в течение времени, за которое Том и Сид, работая вместе, могли бы покрасить четверть всего забора. В результате весь забор был покрашен. Во сколько раз быстрее они окончили бы работу, если бы с самого начала все время работали вместе? (Предполагается, что скорость работы каждого мальчика постоянна.)
- 4. В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно. Найдите длину стороны AC , если известно, что сумма векторов $3 \cdot \overrightarrow{AA_1} + 4 \cdot \overrightarrow{BB_1} + 5 \cdot \overrightarrow{CC_1}$ равна вектору с координатами $(2; 1)$.
- 5. Найдите все решения неравенства $(\log_{\frac{7}{8}}(2x-5) - \log_{\frac{7}{8}}(7-2x)) \left(\cos\left(x + \frac{7}{4}\right) - \cos(2x-1) \right) (|x-4| - |2x-5|) \geq 0$.
- 6. Найдите произведение всех значений x , при каждом из которых $(\sqrt{4-\sqrt{11}})^{x^2-9x+11}, 2^{x^2-9x+11}, (\sqrt{4+\sqrt{11}})^{x^2-9x+11}$ — арифметическая прогрессия.
- 7. Найдите наибольшее значение объема треугольной пирамиды, у которой противоположные ребра попарно равны, а сумма длин всех ребер равна $36\sqrt{2}$.
- 8. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из множества всех нечетных чисел, лежащих между 16 и 2016, чтобы ни одно из выбранных чисел не делилось ни на одно другое?

Дополнительное вступительное испытание по математике

- 1. Найдите $f\left(\frac{2}{7}\right)$, если $f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{3}{7}$.
- 2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2 + ax - 6 = 0$ равна 5. Найдите все возможные значения a .
- 3. Решите уравнение $2 \cos^2 x + 3 \sin 2x = 4 + 3 \cos 2x$.
- 4. Решите неравенство $\log_{1-\log_3 x}(1 + \log_x^2 3) \leq 1$.
- 5. Две окружности касаются внутренним образом в точке T . Хорда AB внешней окружности касается внутренней окружности в точке S . Прямая TS пересекает внешнюю окружность в точках T и C . Найдите пло-

шадь четырехугольника $TACB$, если известно, что $CB = BT = 3$, а радиусы окружностей относятся как $5 : 8$.

- 6. Ровно в 9:00 из пункта А в пункт Б выехал автомобиль. Проехав две третьих пути, наблюдательный водитель автомобиля заметил, что мимо него в сторону пункта А проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда автомобиль прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал автобус. Когда до пункта А оставалось две пятых пути, не менее наблюдательный водитель автобуса заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приедет велосипедист в пункт А, если известно, что автобус прибыл в пункт А ровно в 11:00? Скорости велосипедиста, автомобиля и автобуса считать постоянными.
- 7. В основании правильной пирамиды с вершиной S лежит шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 14. Плоскость π параллельна ребру AB , перпендикулярна плоскости DES и пересекает ребро BC в точке K так, что $BK : KC = 3 : 4$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскости BCS и AFS , параллельны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани CDS .
- 8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{106 + \log_a^2 \cos ax + \log_a \cos^{10} ax} + \sqrt{58 + \log_a^2 \sin ax - \log_a \sin^6 ax} + \sqrt{5 + \log_a^2 \operatorname{tg} ax + \log_a \operatorname{tg}^2 ax}$$

и все пары (a, x) , при которых оно достигается.

Ответы, указания, решения

1. Домашние задания

- **УРОК 1.** 1. $\pi + 2n\pi, \pm \frac{4}{3}\pi + 4n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 2. $2n\pi, (-1)^n \frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 3. $\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, \pm \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 4. $\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$. 5. $\pm \arccos(\frac{\sqrt{29}-2}{5}) + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 6. $(-1)^n \arcsin(\frac{1-\sqrt{10}}{3}) + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 7. $\pm \arccos(1-\sqrt{2}) + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 8. $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. 9. $(-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 10. $\pm \arccos(\frac{\sqrt{19}-2}{5}) + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 11. Выразить $\cos 2x$ и $\sin 3x$ через $\sin x$. Ответ: $n\pi, (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 12. $2\pi + 4n\pi, (-1)^n \frac{2}{3}\pi + 4n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 13. Выразите $\cos 4x, \sin^2 x$ и $\sin^2 2x$ через $\cos 2x$. Ответ: $n\pi, \pm \frac{\pi}{3} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 14. $\pm \arccos \frac{1}{3} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 15. $-\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 16. Воспользуйтесь тем, что $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$. Ответ: $\pm \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$. 17. $\emptyset$. 18. $(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}; \frac{1}{2} \cdot (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \frac{2k\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$. 19. $\frac{\pi}{8} + \frac{2n\pi}{4}, n \in \mathbf{Z}$. 20. $\arctg 3 + n\pi, \arctg 2 + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 21. $\frac{\pi}{8} + n\pi, ((-1)^n - 1) \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$. 22. $-\frac{\pi}{4} + n\pi, \arctg 2 + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 23. $\frac{1}{5}(-6 + (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi), n \in \mathbf{Z}$.
- **УРОК 2.** 1. $\frac{n\pi}{2}, \pm (-1)^n \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 2. $\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, \pm \arccos(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}) + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 3. Приводится к виду $(\sin x - \cos x)(1 + 2\sin x) = 0$. Ответ: $\frac{\pi}{4} + n\pi, (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 4. $-\frac{\pi}{4} + n\pi, \pm \frac{2\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 5. $\pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + n\pi, \pm \frac{1}{2} \arccos(-\frac{1}{4}) + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. Переписать уравнение в виде $5(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 3x) = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x$ и, расписав все через синусы и косинусы, привести правую и левую части к общему знаменателю. 6. $n\pi, \pm \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 7. $-\frac{\pi}{4} + n\pi, -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 8. $-\frac{\pi}{4} \pm \arccos(\frac{\sqrt{3}-1}{2}) + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$. Привести уравнение к общему знаменателю $\sin x \cdot \cos x$. После этого ввести новую переменную $y = \cos x - \sin x$. Тогда $\sin x \cos x = \frac{1-y^2}{2}$. 9. $-\frac{\pi}{4} + n\pi, (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$. 10. $n\pi, -\frac{\pi}{4} + n\pi, -\arctg 3 + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 11. $n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 12. $(-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, 2n\pi, -2\arctg \frac{1}{2} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$. Привести уравнение к виду $(2\sin x - 1)(2\cos x - \sin x - 2) = 0$. 13. $-\frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. Привести уравнение к виду $(\sin x + \cos x + 1)(\sin x + \cos x + \sin x \cos x - 2) = 0$. Приравнявая вторую скобку к нулю, сделайте подстановку $y = \sin x + \cos x$. 14. $-\frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 15. $\frac{\pi}{2} + n\pi, \pm \frac{\pi}{6} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 16. $n\pi, \pm \frac{2}{3}\pi + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 17. $(-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + n\pi, -\frac{\pi}{4} + (\pm \frac{3}{4}\pi + 2n\pi), n \in \mathbf{Z}$. Привести уравнение к виду

$(3 \sin x - 1)(\cos x - \sin x + 1) = 0$. 18. $\pi + 2n\pi$, $\arctg \frac{3}{2} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. Привести уравнение к виду $(\sin x + \cos x + 1)(2 \sin x - 3 \cos x) = 0$. 19. $\pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $\frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. Привести уравнение к виду $(2 \cos x - 1)(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - 2) = 0$. 20. $\pm \arccos \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2n\pi$, $\arctg 5 + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. Привести уравнение к виду $(\cos x + \sin^2 x)(\frac{1}{\cos x} - \frac{5}{\sin x}) = 0$.

- УРОК 3. 1. $\frac{\pi}{4} + n\pi$, $-\arctg 3 + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $2 \arctg(\frac{10 \pm \sqrt{87}}{\sqrt{20} \cdot 4}) + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $\arctg(\frac{-3 \pm \sqrt{191}}{26}) + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 4. $-\frac{\pi}{4} + n\pi$, $-\arctg 3 + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 5. $-\frac{\pi}{4} + n\pi$, $\arctg 5 + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 6. $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 7. $\arctg(\frac{\sqrt{5}-1}{2}) + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 8. $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $-2 \arctg \frac{9}{5} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 9. $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $-\frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 10. $\frac{2}{3} \arctg \frac{2}{3+\sqrt{13}} + \frac{2}{3}n\pi + \frac{2}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. 11. $\arctg \frac{1}{2} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. Раскрыть все двойные углы. Кубы сократятся при приведении подобных членов. 12. $\frac{\pi}{18} + \frac{n\pi}{9}$, $n \neq 9k+4$, $n, k \in \mathbf{Z}$. 13. $2 \arctg \frac{1}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 14. $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 15. $\pm(-1)^n \arcsin \frac{1}{4} + n\pi$, Zn . Записать уравнение в виде $4 \operatorname{tg} 3x - 4 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x + \operatorname{ctg} 2x$, расписать все через синус и косинус и привести левую и правую часть к общему знаменателю. 16. $\frac{\pi}{4} + n\pi$, $\arctg(-1 \pm \sqrt{2}) + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 17. $\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $\pm \frac{1}{2} \arccos(\frac{\sqrt{5}-1}{2}) + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 18. $\frac{\pi}{4} + n\pi$, $2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 19. $n\pi$, $\pm \arctg \frac{1}{\sqrt{2}} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. Представить уравнение в виде $4(\operatorname{tg} 4x - \operatorname{tg} 3x) = \operatorname{tg} 2x(\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 4x + 1)$ и заметить, что $\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 4x + 1 = \frac{\cos x}{\cos 3x \cos 4x}$. 20. $\log_2(\frac{\pi}{2} + n\pi)$, $n \geq 0$, $n \in \mathbf{Z}$.

- УРОК 4. 1. $2n\pi$, $\frac{3}{2}\pi + 2n\pi$, $\frac{3}{8}\pi + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $\frac{2}{5}n\pi$, $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $2n\pi$, $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $-\frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 4. $+\frac{\pi}{4} + n\pi$, $\frac{\pi}{3} + n\pi$, $-\frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 5. $n\pi$, $\pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 6. $\pm \frac{1}{2} \arccos(-\frac{1}{3}) + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 7. $\pm \arctg(\frac{2\sqrt{6}-3}{3}) + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 8. $\pm 1 \pm \sqrt{1 + \frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 0$. 9. $n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 10. $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $\pm \frac{1}{4} \arccos(\frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}) + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. 11. $\arctg(\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}) + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 12. $n\pi$, $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 13. $\pm \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 14. $\arctg(\frac{-4n-1 \pm \sqrt{(4n+1)^2+4}}{2}) + k\pi$, $k, n \in \mathbf{Z}$, $\arctg(\frac{4n+1 \pm \sqrt{(4n+1)^2-4}}{2}) + l\pi$, $n, l \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$. 15. $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 16. Решения есть только при $-2 \leq a \leq 2$. При таких a имеем $x = \pm \frac{1}{2} \arccos(\frac{a^2-2}{2}) + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 17. $\frac{-3 \pm \sqrt{2n+1}}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 0$. 18. $2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 19. $+\frac{1}{4} \arccos \frac{1}{6} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. 20. $\pm \frac{1}{6} \arccos(-\frac{1}{3}) + \frac{n\pi}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. 21. $-\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 22. $\pm \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 23. $\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$. 24. $\frac{n\pi}{4}$, $\pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 25. $(-1)^n \arcsin(\frac{1-\sqrt{3}}{2}) + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 26. $\pm \frac{2}{3}\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 27. $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $\pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 28. $\pi + 2n\pi$, $(-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{n\pi}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. 29. $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 30. $\pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 31. $\pm \frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 32. $\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{3}$, $\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. 33. $\frac{\pi}{16} + \frac{n\pi}{4}$, $\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. 34. $\frac{n\pi}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

- УРОК 5. 1. $(1+(-1)^n) \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $-\arccos \frac{2}{\sqrt{53}} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $\frac{2}{9}\pi + \frac{2}{3}n\pi$, $\frac{2}{3}\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 4. $-\arccos \frac{3}{5} + \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 5. $\emptyset$. 6. $\frac{\pi}{12} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. 7. $n\pi$, $-\frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 8. $\arccos \frac{3}{5} +$

$\frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 9. $-\frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 10. $\emptyset$. 11. $-\frac{\pi}{4} + n\pi, (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 12. $\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \arccos \frac{3}{\sqrt{10}} + (-1)^{n+1} \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 13. $\frac{\pi}{6} + 2n\pi, -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 14. $\pi + 2n\pi, -\arccos \frac{1}{\sqrt{5}} + (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 15. $-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \pm 2 \arccos \frac{1}{3} + 4n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 16. $\emptyset$. 17. $\frac{3}{4}\pi + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$.

Переписать уравнение в виде $\sin 18x \cdot \sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(3x + \frac{\pi}{4}) - \frac{3\sqrt{2}}{2}$ и представить левую часть как $\sqrt{1 + \sin^2 18x} \cdot \sin(x + \varphi)$, где $\cos \varphi = \frac{\sin 18x}{\sqrt{1 + \sin^2 18x}}$ и $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 18x}}$. После этого заметить, что левая часть не меньше $-\sqrt{2}$,

а правая — не больше $-\sqrt{2}$, откуда следует, что и левая и правая части равны $-\sqrt{2}$. 18. $\frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 19. Если $a = 2n\pi$, где n — целое число, то x — любое действительное число. Если $a \neq 2n\pi$, то $x = \pi + 2k\pi, x = a + \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. 20. Решения есть только при $a = \pm \arccos(-\frac{2}{\sqrt{7}}) + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$. Если $a = \arccos(-\frac{2}{\sqrt{7}}) + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, а если $a = -\arccos(-\frac{2}{\sqrt{7}}) + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$, то $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

- УРОК 6. 1. $x = \frac{\pi}{4} + n\pi, y = \operatorname{arctg} 2 + m\pi, z = \frac{3\pi}{4} - \operatorname{arctg} 2 - \pi(m+n), m, n \in \mathbf{Z}$ или $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi, y = -\operatorname{arctg} 2 + m\pi, z = \frac{5\pi}{4} + \operatorname{arctg} 2 - \pi(m+n), m, n \in \mathbf{Z}$. 2. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}(2l+k)\pi, \\ y = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}(l-k)\pi, \end{cases} k, l \in \mathbf{Z}; \begin{cases} x = -\pi - 2(2l+k)\pi, \\ y = -\frac{\pi}{2} - 2(k+l)\pi, \end{cases} k, l \in \mathbf{Z}; \begin{cases} x = -\pi + 2(2l-k)\pi, \\ y = \frac{\pi}{2} - 2\pi(l-k), \end{cases} k, l \in \mathbf{Z}; \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3}(k-2l), \\ y = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi(k+l), \end{cases} k, l \in \mathbf{Z}. \begin{cases} x = (k+l)\pi, \\ y = \frac{\pi}{2} + (k-l)\pi, \end{cases} k, l \in \mathbf{Z}; \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \\ y = \pm \frac{\pi}{6} + 2l\pi, \end{cases} k, l \in \mathbf{Z}; \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \\ y = \pm \frac{\pi}{6} + 2l\pi, \end{cases} k, l \in \mathbf{Z}$. 3. $x = \frac{1}{2}(-\frac{\pi}{3} + (-1)^n \arcsin(\frac{2-3\sqrt{3}}{6}) + n\pi), y = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{3} + (-1)^n \arcsin(\frac{2-3\sqrt{3}}{6}) + n\pi), n \in \mathbf{Z}$. 4. $x = n\pi, y = \frac{\pi}{3} - n\pi, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{\pi}{3} + n\pi, y = -n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 5. $x = \frac{1}{2}k\pi, y = (k-n)\pi, k, n \in \mathbf{Z}$. 6. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + (k-l)\pi, \\ y = \frac{l\pi}{2}, \end{cases} k, l \in \mathbf{Z}; \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + (k-2l)\pi, \\ y = l\pi. \end{cases} k, l \in \mathbf{Z}; \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \mp \frac{2}{3}\pi + (k-2l)\pi, \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + l\pi, \end{cases} k, l \in \mathbf{Z}$. 7. $x = (-1)^n \arcsin(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) + n\pi, y = \pm \arccos(2 - \sqrt{2}) + 2k\pi, n, k \in \mathbf{Z}$. 8. $x = 2\pi + 4k\pi, y = \pm \frac{\pi}{2} + 4l\pi, l, k \in \mathbf{Z}, x = \pm \frac{\pi}{2} 4k\pi, y = 2\pi + 4l\pi, l, k \in \mathbf{Z}$. 9. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, y = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \operatorname{arctg} \frac{5}{2} + \pi(m-n), n, m \in \mathbf{Z}$. 10. $x = -\frac{2}{7}, y = \pm \arcsin \frac{2}{\sqrt{7}} + n\pi, n \in \mathbf{Z}; x = -\frac{2}{7} - \frac{3\pi}{7}, y = \pm \arcsin \sqrt{\frac{4-\pi}{7}} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 11. $\begin{cases} x = (-1)^n (\pm \frac{\pi}{4}) + n\pi, \\ y = \mp \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} + k\pi, \end{cases} n, k \in \mathbf{Z}$. 12. $\begin{cases} \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \\ y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, \end{cases} n, k \in \mathbf{Z}$. 13. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + n\pi, y = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi, n, k \in \mathbf{Z}$. 14. $x = \pm \frac{\pi}{6} + (k+l)\pi, y = \pm \frac{\pi}{6} + (k-l)\pi, l, k \in \mathbf{Z}$. Важно проверить, что найденные решения входят

в ОДЗ. 15. $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(2k + l)\pi$, $y = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(2k - l)\pi$, $l, k \in \mathbf{Z}$. 16. $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi$, $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $n, k \in \mathbf{Z}$. 17. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $n, k \in \mathbf{Z}$. 18. Решения есть только при $-\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{6}{5\sqrt{2}} + n\pi \leq a \leq -\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{6}{5\sqrt{2}} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ и при $\frac{3\pi}{4} - \arcsin \frac{6}{5\sqrt{2}} + n\pi \leq a \leq \frac{3\pi}{4} - \arccos \frac{6}{5\sqrt{2}} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. При таких a имеем

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta + \pi(k + l), \\ y = -\alpha + \beta + \pi(l - k), \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\alpha + \beta + \pi(k + l), \\ y = \alpha + \beta + \pi(l - k), \end{cases} \quad \begin{cases} x = \alpha - \beta + \pi(k + l), \\ y = \alpha + \beta + \pi(l - k), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\alpha - \beta + \pi(k + l), \\ y = \alpha - \beta + \pi(l - k), \end{cases}, \quad k, l \in \mathbf{Z}, \text{ где } \alpha = \frac{1}{2} \arccos(\frac{5}{6}(\sin a + \cos a)) \text{ и } \beta = \frac{1}{2} \arccos(\frac{5}{6}(-\sin a + \cos a)).$$

19. Решения есть только при $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$. При таких a имеем $\begin{cases} x = \pm\alpha + k\pi, \\ y = \pm\beta + m\pi, \end{cases}$ или $\begin{cases} x = \pm\beta + k\pi, \\ y = \pm\alpha + m\pi, \end{cases}$, где $\alpha = \arccos \sqrt{\frac{3+\sqrt{3a}}{4}}$, $\beta = \arccos \sqrt{\frac{3-\sqrt{3a}}{4}}$. 20. Решение есть только при $|a| \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. При таких a имеем $\begin{cases} x = \frac{1}{2}((-1)^n \alpha + (-1)^l \beta + (n+l)\pi), \\ y = \frac{1}{2}((-1)^n \alpha - (-1)^l \beta + (n-l)\pi), \end{cases}$ где $\alpha = \arcsin(a^2 + a)$, $\beta = \arcsin(a^2 - a)$, $n, l \in \mathbf{Z}$. 21. При любых $a > 1$ решениями системы будут

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi(m + n), \\ y = \frac{\pi}{2} + n\pi, \end{cases} \quad m, n \in \mathbf{Z}, \text{ и } \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{a+1}{2a} + \pi(m + n), \\ y = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{a+1}{2a} + \pi n, \end{cases} \quad m, n \in \mathbf{Z}.$$

- **УРОК 7.** 1. Записать доказываемое равенство в виде $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x$ и проверить, что для правой части выполнены все условия определения арктангенса. 2. Проверить, что справа, по определению, стоит $\operatorname{arctg}(-x)$. 3. Проверить, что справа, по определению, стоит $\operatorname{arccotg}(-x)$. 4. Обозначить $\operatorname{arctg} x$ через α . Зная, что $\operatorname{tg} \alpha = x$, найти $\sin \alpha$. Не забыть, в каком промежутке лежит α . 5. Обозначить $\arcsin x$ через α . Зная, что $\sin \alpha = x$, найти $\operatorname{tg} \alpha$. Не забыть, в каком промежутке лежит α . 6. Обозначить $\arccos x$ через α . Зная, что $\cos \alpha = x$, найти $\operatorname{tg} \alpha$. Не забыть, в каком промежутке лежит α . 7. Использовать тождество $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$. 8. Проверить условия в определении арксинуса для левой части (ибо вы должны доказать, что левая часть есть арксинус сложного выражения в правой части). Данная формула не верна без указанных ограничений на x и y . Как вы используете их в своем доказательстве? 9. Не верно для $x = y = 1$. 10. Проверить условия в определении арктангенса для левой части (ибо вы должны доказать, что левая часть есть арктангенс сложного выражения в правой части). Данная формула не верна без указанных ограничений на x и y . Как вы используете их в своем доказательстве? 11. Не верно для $x = y = 1$. 12. $3\pi - 10$. 13. $4\pi - 10$. 14. $\frac{1}{5}$. 15. π . 16. 0. 17. $\pm \cos \frac{\pi}{18}$, $\pm \cos \frac{5\pi}{18}$. 18. $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- **УРОК 8.** 1. 3, 11. 2. $\emptyset$. 3. $(-\infty, 0]$. 4. $[1, +\infty)$. 5. $[-3, -2] \cup [2, 3]$. 6. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. 7. $[\frac{1}{2}, 3]$. 8. $\pm 3, \pm 1$. 9. $[1, 2) \cup (3, 4]$. 10. $(-\infty, 6]$.

11. $[-\frac{3}{2}, 0]$. 12. $\emptyset$. 13. -1 . 14. $\frac{4}{3}$, $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$. 15. $(-\infty, -1 - \sqrt{3}] \cup [1 - \sqrt{5}, +\infty)$. 16. $(-\infty, \frac{-2 - \sqrt{79}}{5}) \cup (\frac{-3 - \sqrt{34}}{5}, \frac{-3 + \sqrt{34}}{5}) \cup (\frac{-2 + \sqrt{79}}{5}, +\infty)$. 17. $[0, 2]$. 18. $(\frac{1}{2}, \frac{11}{2})$, $(\frac{3}{2}, \frac{11}{2})$. 19. $(2, 1)$, $(0, -3)$, $(-6, 9)$. 20. $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2})$.
- УРОК 9. 1. 1. 2. 2. 3. $(-\infty, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}) \cup (1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2})$. 4. $(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}) \cup (2, +\infty)$. 5. $(-4, -3) \cup (1, +\infty)$. 6. $(-\infty, -3) \cup (2, 3)$. 7. $(-\infty, -1)$. 8. $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$. 9. $(-\infty, 1) \cup (2, 3)$. 10. $(2, +\infty)$. 11. $(\frac{1}{2}, 1) \cup (2, +\infty)$. 12. $[-3, +\infty)$. 13. $(-\infty, -2) \cup (-1, 1)$. 14. $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$. 15. $(-\infty, -2] \cup [2, 3) \cup (4, +\infty)$. 16. $(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. 17. $(-2, 1) \cup (3, +\infty)$. 18. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. 19. $(-\infty, +\infty)$. 20. $(-\infty, 0)$.
- УРОК 10. 1. 2, -1. 2. 5. 3. 2. 4. 8. 5. -1. 6. 1. 7. 2. 8. $(-\infty, -\frac{7}{9})$. 9. $[-46, 3]$. 10. $[-27, 9]$. 11. $[1, \frac{3}{2})$. 12. $[2, 3]$. 13. $[-6, -4 + \sqrt{2})$. 14. $(-1, 15)$. 15. $[-5, -1) \cup (1, +\infty)$. 16. $[-6, 0) \cup (3, 4]$. 17. $[-5, -\frac{9 - \sqrt{61}}{8})$. 18. 3, $[-2, -1]$. 19. -3, 2. 20. 0, 3. 21. $[4, \frac{45}{11}) \cup (8, +\infty)$. 22. $[-1 - 2\sqrt{13}, -5) \cup (1, -1 + 2\sqrt{13}]$. 23. $[\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, +\infty)$. 24. -6, $[-1, +\infty)$. 25. $(-\infty, -\frac{1}{2})$. 26. -1. 27. $(-\infty, 7]$. 10. 28. $(-\infty, -7) \cup (-5, 3] \cup [2, +\infty)$. 29. $(-\infty, -7) \cup [2, +\infty)$. 30. $[-9, \frac{34 + 2\sqrt{29}}{5})$.
- УРОК 11. 1. $(-3, 12)$. 2. $\emptyset$. 3. $(t, \frac{1}{6}(1 - 4t))$, $t \in \mathbb{R}$. 4. Если $a = -1$, то $x = \frac{1}{2}(1 - t)$, $y = t$, где t может принимать любое действительное значение; если $a = 3$, то $x = \frac{1}{2}(1 + t)$, $y = t$, где t может принимать любое действительное значение; в остальных случаях $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$. 5. $(3, -1, 2)$. 6. 3. 7. Этому уравнению удовлетворяет только пара $(0, 0)$. 8. -1. 9. $x/z = \frac{1}{4}$, $y/z = \frac{1}{6}$. 10. 4. 11. $\frac{S}{v} = 5 + 5\sqrt{2} > 12$. 12. 11. 13. $\frac{6}{17}$. 14. $-\frac{1}{6}$. 15. $-\frac{1}{5}$. 16. $x = \frac{1080}{11}$, $y = \frac{1350}{11}$.
- УРОК 12. 1. $(1, 3)$, $(3, 1)$. 2. $(3, 2)$, $(-3, -2)$, $(-\frac{17}{2\sqrt{7}}, \frac{1}{2\sqrt{7}})$, $(\frac{17}{2\sqrt{7}}, -\frac{1}{2\sqrt{7}})$. 3. $(2, 1)$, $(-2, -1)$, $(-\frac{17}{\sqrt{39}}, \frac{1}{\sqrt{39}})$, $(\frac{17}{\sqrt{39}}, -\frac{1}{\sqrt{39}})$. 4. $(0, 0)$, $(2, -1)$, $(-\frac{10}{7}, -\frac{4}{7})$. 5. $(\frac{-1 + \sqrt{17}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{4})$, $(\frac{-1 - \sqrt{17}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{17}}{4})$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. 6. $(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2\sqrt{2}-1}}, \frac{2}{\sqrt{2\sqrt{2}-1}}, \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2\sqrt{2}-1}})$, $(-\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2\sqrt{2}-1}}, \frac{-2}{\sqrt{2\sqrt{2}-1}}, -\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2\sqrt{2}-1}})$, $(1, 0, -1)$, $(-1, 0, 1)$. 7. $(1, 1)$, $(-2, -2)$, $(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2})$, $(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2})$. 8. $(2, 1)$, $(-2, 1)$, $(2, -1)$, $(-2, -1)$. 9. $(1, 4)$, $(4, 1)$, $(\frac{-5 - \sqrt{41}}{2}, \frac{-5 + \sqrt{41}}{2})$, $(\frac{-5 + \sqrt{41}}{2}, \frac{-5 - \sqrt{41}}{2})$. 10. $(0, 0)$, $(-2, 1)$, $(1, -2)$, $(6, 3)$, $(3, 6)$. 11. $(3, 2)$, $(-3, -2)$. 12. $(0, 0)$. 13. $(5, -2)$. 14. $(\sqrt[3]{4}, 9)$. 15. $(\frac{1}{2}, 1)$. 16. $(2, 1)$. 17. $(1, 1)$, $(\frac{2\sqrt{6}-3}{15}, -\frac{4\sqrt{6}+9}{5})$, $(-\frac{2\sqrt{6}+3}{15}, \frac{4\sqrt{6}-9}{5})$. 18. $(1, -1)$. Доказать, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Выразить из первого уравнения y^2 через x и, используя полученное выражение, доказать, что $y^2 \leq 1$. После этого рассмотреть второе уравнение как квадратное относительно x и заметить, что его дискриминант неотрицателен только при $y \leq -1$. Отсюда следует, что $y = -1$ и можно легко найти x .

- **УРОК 13.** 1. 2,1 м; 3,6 м. 2. 4 сек, 6 сек. 3. 45 км. 4. 7 км/час. 5. Скорость 1-й лодки — 6 км/час, скорость второй — 21 км/час, $AB = 45$ км. 6. 12 мин, легковая машина проходит путь AB за 1 час 36 мин. 7. Не успели. 8. Разница во времени составила $\frac{26}{9}$ минут. Большинство уравнений составляется обычным образом. Условие о том, что бегуны были рядом, в некоторый момент и через 13 минут после этого момента, означает, что, во-первых, за 13 минут гонка не закончилась — отсюда получается неравенство. Во-вторых, разность скоростей бегунов, умноженная на 13, дает целое число кругов. Используя данные задачи, доказать, что это целое число равно единице. 9. на 48 минут раньше. 10. 10 час 29 мин. 11. 390 км. 12. 40 км/час по шоссе и 30 км/час по грунтовой дороге. Пусть x км/час — скорость движения автобуса по шоссе, а y км/час — по грунтовой дороге. Тогда $\frac{80}{x} + 2 = \frac{120}{y}$. Если n — число рейсов и t — время, потраченное на стоянки, то по условию имеем $\frac{160n}{x} + \frac{240n}{y} + t < 168$ и $(\frac{160n}{x} + \frac{240n}{y}) \cdot \frac{x+y}{2} = 2100$. Обозначив $\frac{x}{y}$ через z , приведем последнее уравнение к квадратному относительно z , считая n известным. Условие неотрицательности дискриминанта даст неравенство $n < 6$. Значит, $n = 5$. Дальше все легко находится. 13. Первая. 14. Не сможет. Разобрать два случая: автомобиль и мотоциклист встретились на грунтовой дороге, или они встретились на шоссе. В каждом из случаев составьте уравнения, найдите все величины и убедитесь, что автомобилист не успеет приехать в город до указанного времени. 15. 4 часа. 16. 4 км/час. 17. 50 км/час. 18. Пункт D находится ниже по течению. 19. В 4 часа 48 минут. 20. 40 км/час, 60 км/час. 21. 300 км.

- **УРОК 14.** 1. за $\frac{12}{7}$ дня. 2. 60 м^3 . 3. Объем бака A равен 3000 литров, первый насос накачивает 9000 литров в час, второй насос откачивает 6000 литров в час. 4. 2 часа 30 минут. 5. 15 л/мин, 20 л/мин. 6. через 18 минут. 7. в 1,5 раза больше. 8. 25 человек, 24 человека. Если в первой бригаде — x человек, во второй — y человек, а один человек роет t котлованов в час, то имеем $\frac{1}{tx} = \frac{1}{ty} - \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{t(x+5)} = \frac{1}{tx} - 2$. Исключая t , найдем, что $y = x - 1 - \frac{x-25}{4x+25}$. Из того, что y — целое число, следует, что $\frac{x-25}{4x+25}$ целое число. Но при натуральном x у этой дроби числитель больше знаменателя. отсюда следует, что она может принимать целые значения лишь при $x = 25$. 9. 390 минут 10. Новый пресс изготавливает 100 деталей в час, старый — 60 деталей в час. 11. Третья. 12. Пусть $T = \frac{-a-b+\sqrt{(a-b)^2+4abc^2}}{2(c+1)}$. Тогда первая машина выполняет работу за $a+T$ дней, вторая — за $b+T$ дней, третья — за $c+T$ дней. Число c может принимать любое значение, большее единицы. 13. 20 деталей в час и 18 деталей в час. 14. В 1,5 раза больше. 15. При $d = 10$. 16. Первый рабочий может выполнить всю работу за 2 часа, второй — за 4 часа.

- **УРОК 15.** 1. $\frac{mn}{m+n}$ кг. 2. 18 литров. 3. 60 литров. 4. 3480 кг. 5. 7 кг. 6. Первый слиток в два раза тяжелее второго. 7. 40%-ного раствора было 1 кг, а 60%-ного — 2 кг. 8. 5%, 10%. 9. 4 литра. 10. 10 литров и 90 литров. 11. 170 кг. 12. 15% и 40%. 13. 5 г и 20 г. 14. Вес первого куска — $0,8r - 24$,

вес второго — $32 - 0,8r$. Задача имеет решение при $31,25 \leq r \leq 33,75$.
15. 12,5 г. **16.** Нужно взять 4 кг 1-й смеси, 1 кг 2-й и добавить 2 кг вещества *Б*. **17.** 40% и 65%. **18.** Первая труба подает кислоту в 2 раза быстрее. **19.** 50%.

► **УРОК 16.** 1. 1 первый набор и 16 вторых. 2. 26 тетрадей в клетку и 31 тетрадь в линейку. 3. 20 рейсов. 4. 1 второклассник, 5 третьеклассников и 2 четвероклассника. 5. 23 учащихся. 6. 11 двенадцатиквартирных и 1 шестнадцатиквартирный дом. 7. 8 книг. 8. 12 листов. 9. 7 автоматов. Пусть автомат 1-го типа красит все детали за p часов, автомат второго типа — за q часов. Пусть x — число автоматов первого типа, y — число автоматов второго типа, а z — число деталей. Тогда, по условию, $px + qy = 55$ и $x \cdot \frac{z}{p} + y \cdot \frac{z}{q} = z$, т.е. $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$. Перемножив эти равенства, получим $(x + y)^2 + (\frac{z}{q} + \frac{z}{p} - 2)xy = 55$, откуда $x + y \leq 7$. Далее, разбирая все случаи $x + y = k < 7$, докажете их невозможность. Значит, искомая величина $x + y$ равна 7. **10.** 11 человек и 17 человек. **11.** 1575 шаров в первой коробке и 1995 шаров — во второй. **12.** 5 прессов. **13.** 33 ученика. **14.** 1-й работал 3 дня, 2-й — 2 дня. **15.** 726 долларов.

► **УРОК 17.** 1. 2. 2. 4. 3. 135. 4. $a = -82/9$. 5. 18. 6. 749. 7. 3. 8. 2. 9. 50. **10.** Не могут. Предположим противное. Тогда найдутся числа a_1 и d и натуральные числа k, l, m такие, что $\sqrt{2} = a_1 + (k - 1)d$, $\sqrt{3} = a_1 + (l - 1)d$ и $\sqrt{5} = a_1 + (m - 1)d$. Вычитая первое равенство из второго и второе из третьего, и деля одно из получившихся равенств на другое, получим, что $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{l-k}{m-l}$. Путем нескольких возведений в квадрат доказать, что последнее равенство невозможно. **11.** Известно, что $a^2 + c^2 = 2b^2$. Надо установить, что $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} = \frac{2}{a+c}$. Это можно сделать просто приводя требуемое равенство к общему знаменателю и упрощая. Ввиду эквивалентности преобразований заключить, что доказываемое равенство имеет место. **12.** Если a_n — общий член этой последовательности, то $a_n = S_n - S_{n-1} = 4n + 1$. Теперь ясно, что это — прогрессия со знаменателем 4 и $a_{10} = 41$. **13.** $99 \cdot 2^{100} + 1$. Разбейте эту сумму на сумму 99 прогрессий со знаменателем 2 и первыми членами $1, 2, 2^2, \dots, 2^{99}$. Подсчитайте сумму каждой из этих 99 прогрессий отдельно и сложите все суммы. **14.** $100, 10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}$. **15.** Пусть $a_i = a + (i - 1)p$, $b_i = b + (i - 1)q$, где $i = 1, 2, 3$. Из условия следует, что $(a + b)(a + b + 2p + 2q) = (a + b + p + q)^2$, откуда получаем, что $p = -q$. Остается воспользоваться первым равенством условия.

► **УРОК 18.** 1. $\log_{2/5} 2$, $\log_{2/5} \frac{1}{3}$. 2. $(\frac{1}{2}, +\infty)$. 3. $(\frac{1}{6}, +\infty)$. 4. 2, -5, $-\frac{4}{5}$. 5. $\log_{2/5} 3$. 6. 1. 7. $(1, \log_3 2)$. 8. 4, -1. 9. 3, -2. 10. $(-\infty, 4 - 2\sqrt{2}) \cup (4 + 2\sqrt{2}, +\infty)$. 11. $(-\infty, 3 - \sqrt{3}) \cup (3 + \sqrt{3}, +\infty)$. 12. $(-\infty, \log_3 4)$. 13. $(3, -9)$. 14. $\log_{3/2} \left(\frac{\sqrt{13}+1}{6} \right)$. 15. $\log_{5/3} \left(\frac{\sqrt{17}-3}{4} \right)$. 16. $\frac{1}{2}$. 17. $(-\infty, 1)$. 18. $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$. 19. $(-\infty, -3] \cup [0, 3]$. 20. 2. 21. -4. 22. $\frac{1}{\log_{3/2}(\frac{\sqrt{5}-1}{2})}$. 23. $[0, 4]$. 24. $(0, 2 - \log_2 3) \cup (1, +\infty)$. 25. $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$. 26. $(-\infty, -1)$. 27. 2, -2.

$$28. 2, \log_3 2 - 4. \quad 29. (-\infty, -\sqrt{\log_2(3 + \sqrt{5})} - 1] \cup [\sqrt{\log_2(3 + \sqrt{5})} - 1, +\infty).$$

$$30. \log_7(3 \pm \sqrt{2}).$$

- **УРОК 19.** 1. 8 2. 3. 3. $(-2, -1) \cup (-1, -\frac{1}{2}) \cup (0, 4)$. 4. $(0, \frac{1}{2}) \cup (1, 5] \cup (-1, 0)$.
 5. $(0, 3) \cup (\frac{25}{8}, \sqrt{10})$. 6. $(-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\frac{13}{4}, 4)$. 7. $\frac{5}{4}$. 8. $\sqrt{17} - 4$. 9. $(5, 0)$, $(\frac{1}{5}, 2)$.
 10. $(0, \frac{1}{4}) \cup (1, \frac{5}{4})$. 11. $(-\frac{6}{5}, -1) \cup (-\frac{1}{8}, 0)$. 12. 3. 13. $(-2, 2)$. 14. $(-3, -1)$.
 15. $(0, \sqrt[3]{2} - 1] \cup [63, +\infty)$. 16. $(1, 2]$. 17. $(\frac{1}{2}, 3]$. 18. $(-3, -2)$. 19. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \cup [2, +\infty)$.
 20. $(16, 4), (10, \frac{32}{5})$. 21. $(-4, -3) \cup \{-\frac{5}{2}\} \cup (-2, -1)$. 22. $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
 23. 2. 24. $\log_3 10, \log_3 28 - 3$. 25. 0, 1. 26. $\frac{1}{4}$, 2. 27. $(3, 4) \cup (6, +\infty)$. 28. $(1, 3)$.
 29. -25. 30. 8. 31. $(-\frac{3}{\sqrt{5}}, -1) \cup (1, \frac{3}{\sqrt{5}})$. 32. $(0, 1) \cup [2, +\infty)$. 33. $\emptyset$. 34. 4, $\frac{1}{16}$.
 35. 3, $\frac{1}{9}$. 36. $(-3, 1) \cup (3, 4)$.

- **УРОК 20.** 1. $\pi - \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $-\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.
 3. $\pm \arccos \left(\pm \frac{\sqrt{2}-1}{2} \right) + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 4. $\frac{\pi}{4} + 2n\pi$, $\operatorname{arctg} 2 + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.
 5. $(-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 6. $(-1)^n \arcsin \frac{\pi}{12} + n\pi$, $(-1)^{n+1} \arcsin \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.
 7. $\pm \arccos(-\frac{1}{5}) + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 8. $n\pi$, $\frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 9. $-\frac{\pi}{4} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.
 10. $(-1)^n \arcsin \left(\sqrt{\frac{5}{6}} \right) + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 11. $(-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 12. $-\frac{\pi}{4} + n\pi$, $\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 13. $n\pi$, $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 14. $(-1)^n \arcsin \left(\frac{3+2\sqrt{2}}{6} \right) + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 15. $(\pm \frac{\pi}{6} + 2n\pi)^2$, $n \in \mathbf{Z}$. Обратить внимание на то, что $\sqrt{x}$ не может быть отрицательным. Мой ответ, на первый взгляд, игнорирует это обстоятельство, но он, тем не менее, верен. Почему? Если вы не заметили эту тонкость, оценка — 7. 16. $\pm \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 17. $\frac{\pi}{6} + 4n\pi$, $\frac{5\pi}{6} + 4n\pi$, $\frac{17\pi}{6} + 4n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 18. $\frac{\pi}{6} + 4n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 19. $\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 20. $(-1)^n (\pm \frac{\pi}{6}) + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 21. $\{\frac{3}{2}\} \cup [-\frac{\pi}{3} + n\pi, -\frac{\pi}{4} + n\pi) \cup (\frac{\pi}{4} + n\pi, \frac{\pi}{3} + n\pi]$, $n = 1, 2, \dots$. 22. $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 23. $(\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{5\pi}{6} + 2n\pi)$, $n \in \mathbf{Z}$. 24. $\pm \arccos(2 - \sqrt{8}) + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.
 25. $-\frac{\pi}{8} + 2n\pi$, $\frac{\pi}{16} + 2n\pi$, $\frac{9\pi}{16} + 2n\pi$, $-\frac{5\pi}{8} + 2n\pi$, $\frac{13\pi}{16} + 2n\pi$, $\frac{21\pi}{16} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.
 26. $(\operatorname{arctg} 5 + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi) \cup (\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \pi + 2n\pi)$, $n \in \mathbf{Z}$. 27. $(\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \arccos \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + 2n\pi) \cup (-\arccos \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + 2n\pi, -\frac{\pi}{6} + 2n\pi)$, $n \in \mathbf{Z}$. 28. $(\frac{\pi}{4} + n\pi, \frac{\pi}{3} + n\pi]$, $n \in \mathbf{Z}$.
 29. $(\pi + 2n\pi, \frac{5\pi}{4} + 2n\pi) \cup (\frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi)$, $n \in \mathbf{Z}$. 30. $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$. 31. $-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 32. $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $\pi + 2n\pi$, $\pm \frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 33. $-\operatorname{arccotg} 2 + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.
 34. $-\frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \arcsin \frac{5}{8} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 35. $\emptyset$.

- **УРОК 21.** 1. $(-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [\frac{1}{2}, 2]$. 2. 8. 3. $2^{-\frac{3}{2\sqrt{2}}} \leq x < 1$. 4. $(2^{-15}, 2^{-9}) \cup [512, +\infty)$. 5. $\pm \log_3 2$. 6. $(1, 2)$. 7. $\{-3\} \cup [-1, +\infty)$. 8. $\frac{\pi}{4} + n\pi$, $\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \pi(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$. 9. $[0, 1] \cup \{4\}$. 10. $(-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 11. $[25, +\infty)$.
 12. $-\frac{\pi}{8} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$. 13. 3, 4. 14. $\frac{1}{2}$. 15. $[\frac{3+\sqrt{5}}{4}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}] \cup (-\frac{1}{4}, 1)$.
 16. $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. 17. $[\frac{11-\log_2 5}{5+2\log_2 5}, \frac{\log_2 5-1}{5-\log_2 5}]$. 18. $(2, +\infty)$. 19. $(-\frac{1}{3}, -\frac{7+\sqrt{7}}{42}) \cup$

$\left[-\frac{15+\sqrt{197}}{84}, 0\right) \cup \left(0, \frac{13-\sqrt{141}}{84}\right) \cup \left[\frac{13+\sqrt{141}}{84}, \frac{1}{3}\right)$. 20. $[-\frac{3}{2}, -1) \cup (1, 2]$. 21. $[0, 2)$.
 22. $(3, -3)$, $(-1, -3)$. 23. $[-5, 20)$. 24. $(-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 25. $\frac{8}{7}$. 26. 2.
 27. $[\frac{1}{2}, +\infty)$. 28. $\emptyset$. 29. 1, 4 30. $(1, 2) \cup (3, +\infty)$.

► УРОК 22. 1. $1 - 2x$. 2. $x^2 + x - 2$. 3. 324. 4. $-20(5 + 2x)^9(3 - 4x)^{19}(17 + 12x)$. 5. $-\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^4}$. 6. $\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$. 7. 2. 8. $\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2(1-x^3)^4}}$.
 9. $\frac{4x^2-x+1}{(1-x)^3(1+x)^4}$. 10. $1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. 11. $-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$. 12. $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$.
 13. $\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$. 14. $\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \frac{1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}\right)$. 15. $-2 \sin 2x - 2 \cos x$.
 16. $k \sin^{k-1} x \cos(k+1)x$. 17. $\cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x$. 18. $-\frac{1+\cos^2 x}{2 \sin^3 x}$.
 19. $\frac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2}$. 20. $\frac{\sin 2x \sin(x^2) - 2x \sin^2 x \cos(x^2)}{\sin^2(x^2)}$.

► УРОК 23. 1. Наибольшее значение равно 8, наименьшее — -73. 2. Наибольшее значение равно -1, наименьшее — $-\frac{53}{4}$. 3. -19. 4. $\frac{7}{23}$. Обратите внимание на то, что, хотя в точке $x_0 = -\frac{3}{5}$ функция имеет локальный минимум, равный $\frac{7}{23}$, ничто не гарантирует, что он будет наименьшим значением функции на всей прямой, ибо функция убывает при $x > 1$. Надо доказать, что она не сможет стать меньше $\frac{7}{23}$, т.е. доказать неравенство $f(x) \geq \frac{7}{23}$ при $x \geq 1$. Если вы не заметили этот нюанс и получили только правильный ответ, ваша оценка — 7. 5. Возрастает на $(-5, -2 - \sqrt{5}]$ и убывает на $(-2 - \sqrt{5}, \frac{1}{5})$. Точка максимума — $-2 - \sqrt{5}$. 6. $\frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3}$, $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3}$.
 7. $\frac{14}{3}$. 8. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 9. $-1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$. 10. $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 11. $(-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 12. Наибольшее значение равно $\pi - 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$, наименьшее равняется $-7\pi - 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$. 13. $-\frac{1}{3} \arcsin \frac{5}{\sqrt{26}} + \frac{2\pi}{3}n$, $n \in \mathbf{Z}$. 14. $-\frac{1}{2} \arccos \frac{4}{5} + \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.
 15. Наименьшее значение равно $\frac{3}{2}$, наибольшее — 6. 16. Наименьшее значение равно -38, точка максимума — $\frac{1}{5}$. 17. Возрастает на промежутках $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$. Убывает на промежутках $(0, 1)$ и $(1, 2)$. 18. Наименьшее значение равно 1, а наибольшее — $\sqrt{2}$. 19. 2 20. $\frac{199 \cdot 3^{100} - 1}{4}$. Рассмотреть функцию $f(x) = 1 + x + \dots + x^{100}$. Заметить, что искомая величина равна $f'(3)$. Записать $f(x)$ как сумму прогрессии, найти производную этой суммы и подставить в качестве аргумента число 3.

► УРОК 24. 1. $n\pi$, $\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $y = 4x \pm 2\sqrt{2}$. 3. $(0, 5)$. 4. 2. 5. $(0, 11)$, $(-\frac{11}{9}, 0)$, $(0, 47)$, $(-\frac{47}{9}, 0)$. 6. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. 7. $(0, 2)$. Пусть $M(x, 1 + \cos x)$ — точка, лежащая на указанном графике. Прямая, заданная в условии пересекает ось абсцисс в точке $A(-\frac{4}{\sqrt{3}}, 0)$, а ось ординат в точке $B(0, -2)$. Если O — начало координат, то пусть угол BAO равен α . Легко убедиться, что $\alpha = \arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$. Нарисовав графики, убедитесь, что расстояние $d(x)$ от точки M до данной прямой равно $(1 + \cos x + (-4 - \frac{\sqrt{3}}{2}x)) \cos \alpha$. У функции $d(x)$ легко находится наименьшее значение на отрезке $[0, \pi]$. 8. $a =$

$\frac{4}{5}$, наименьшая площадь равна $\frac{48}{25} \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$. 9. $(-7, 4)$. 10. $\frac{49}{32}$. 11. $(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt[3]{3}}{\pi}, -\frac{\pi}{4})$. 12. $(0, 0)$, $(8, 0)$. 13. 1. 14. $a = 8$, наибольшая площадь равна $\frac{1}{8}$. 15. $(\frac{2}{3}, \frac{8}{9})$.

► **УРОК 25.** 1. Окружность радиуса 3 с центром $(1, -2)$. 2. Точка $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. 3. Парабола $y = x^2 + x$ разбивает плоскость на две части. Искомое множество есть та из этих двух частей плоскости (включая границу), которая содержит точку $(-\frac{1}{2}, 0)$. 4. Прямая $y = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$ разбивает плоскость на две части. Искомым множеством является та из этих частей (включая саму прямую), которая содержит начало координат. 5. Прямые $y = \frac{x}{2}$ и $y = \frac{x}{3}$ разбивают плоскость на четыре части. Искомым множеством являются эти прямые вместе с внутренностью двух вертикальных углов, содержащих точки $(0, 1)$ и $(0, -1)$. 6. График функции $y = -\frac{1}{x}$ разбивает координатную плоскость на три части. Искомым множеством является объединение той части, что целиком лежит во второй четверти и той части, что целиком попадает в четвертую четверть (каждая из частей берется вместе с границей). 7. Искомое множество изображено на рис. 1. 8. Искомое множество изображено на рис. 2.

9. Прямые $y = x + 1$ и $y = -x - 1$ разбивают плоскость на 4 части. Искомым множеством являются те две из них (вместе с границей), которые содержат точки $(0, 0)$ и $(-2, 0)$. 10. Все стороны квадрата с вершинами в точках $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$. 11. Искомое множество изображено на рисунке 3. 12. Искомое множество изображено на рисунке 4. 13. Искомое множество изображено на рисунке 5. 14. Искомое множество изображено на рисунке 6. 15. Первая и третья четверти координатной плоскости (исключая границы). 16. Прямые $y = x$ и $y = -x$ из которых удалена точка $(0, 0)$, а также внутренность двух вертикальных углов при прямых $y = x$ и $y = -x$, содержащих точки $(0, 1)$ и $(0, -1)$. 17. Вертикальная полоса, заключенная между прямыми $x = 0$ и $x = 2$. 18. Горизонтальная полоса, заключенная между прямыми $y = 1$ и $y = -3$. 19. Искомое множество изображено на рисунке 7. 20. Искомое множество изображено на рисунке 8. 21. Искомое множество изображено на рисунке 9. 22. Все стороны квадрата с вершинами $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$, $(-1, 1)$. 23. Искомое множество изображено на рисунке 10. 24. Искомое множество изображено на рисунке 11. 25. Полуплоскость, лежащая ниже прямой $y = 1$, из которой выброшены вертикальные прямые $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 26. Квадрат (вместе с границей) с вершинами $(-1, 2)$, $(2, -1)$, $(-1, -4)$, $(-4, -1)$. 27. Все точки, лежащие вне параллелограмма с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$ (вместе с границей). 28. Парабола с ветвями вверх, с вершиной в точке $(\frac{5}{4}, -\frac{1}{8})$, пересекающая ось абсцисс в точках 1 и $\frac{3}{2}$. 29. Парабола с ветвями влево с вершиной в точке $(\frac{65}{8}, \frac{3}{4})$. Пересекает ось абсцисс в точке 7. 30. Искомое множество изображено на рисунке 12.

► **УРОК 26.** 1. $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$, $c = \frac{a \sin(A+B)}{\sin A}$. Решения есть при $A > 0, B > 0, A + B < \pi$.

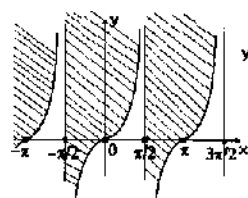


Рис. 1



Рис. 2

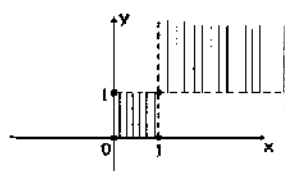


Рис. 3

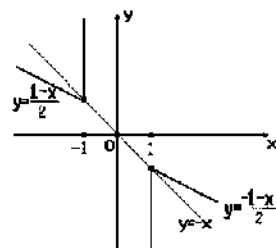


Рис. 4

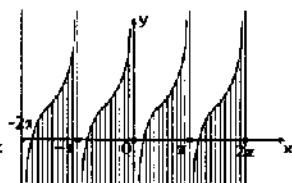


Рис. 5

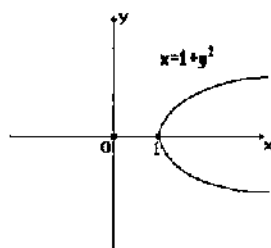


Рис. 6

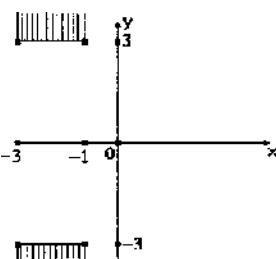


Рис. 7

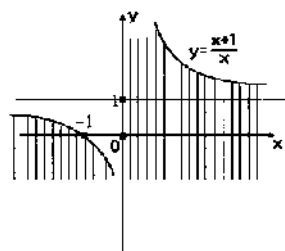


Рис. 8

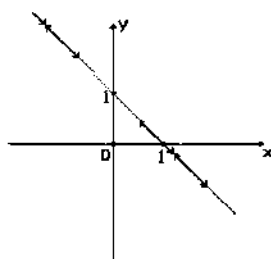


Рис. 9

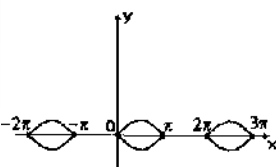


Рис. 10

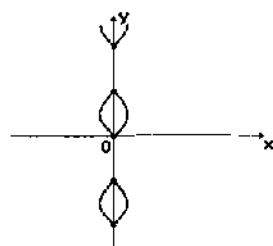


Рис. 11

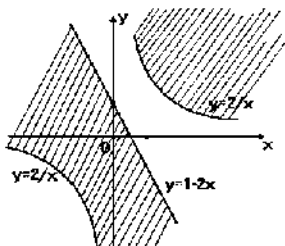


Рис. 12

2. Решения есть при $0 < r \leq \frac{a}{2} \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4})$, $0 < A < \pi$. В этом случае

$$b = \frac{1}{2} \cdot \left(a + 2r \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \pm \sqrt{a^2 - 4ar \operatorname{tg} \frac{A}{2} - 4r^2} \right),$$

$$c = \frac{1}{2} \cdot \left(a + 2r \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \mp \sqrt{a^2 - 4ar \operatorname{tg} \frac{A}{2} - 4r^2} \right).$$

3. Задача имеет решение только при $0 < A < \pi$, $0 < S < \frac{1}{4}a^2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$. В этом случае

$$b = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{a^2 + 4S \operatorname{ctg} \frac{A}{2}} \pm \sqrt{a^2 - 4S \operatorname{tg} \frac{A}{2}} \right),$$

$$c = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{a^2 + 4S \operatorname{ctg} \frac{A}{2}} \mp \sqrt{a^2 - 4S \operatorname{tg} \frac{A}{2}} \right).$$

4. Если $0 < A < \frac{\pi}{2}$, то решения существуют, если $\frac{a}{2} < m_a \leq \frac{1}{2}a \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$. Если $A = \frac{\pi}{2}$, то обязательно должно быть $m_a = \frac{a}{2}$ и решений бесконечно много. Если $A > \frac{\pi}{2}$, то решения есть при $\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \leq m_a < \frac{1}{2}a$. При $a \neq \frac{\pi}{2}$ имеем

$$b = \sqrt{\frac{a^2}{4} + m_a^2 \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(2a^2 m_a^2 - 4m_a^4 - \frac{1}{4}a^4) \operatorname{tg}^2 A + 4a^2 m_a^2}}.$$

$$c = \sqrt{\frac{a^2}{4} + m_a^2 \mp \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(2a^2 m_a^2 - 4m_a^4 - \frac{1}{4}a^4) \operatorname{tg}^2 A + 4a^2 m_a^2}}.$$

5. Анализ сложен и опускается. Сторону b можно найти из следующего биквадратного уравнения:

$$b^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{16 \cos^2 A} \right) - b^2 \left(a^2 - 2m_b^2 - \frac{3m_b^2 - 3a^2}{2 \cos^2 A} \right) - (m_b^2 - a^2)^2 \cos^2 A = 0.$$

При найденном b величина c находится из соотношения

$$c = \frac{3b}{4 \cos A} - \frac{m_b^2 - a^2}{b \cos A}.$$

6. Задача имеет решение при $0 < h_a \leq \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$. В этом случае

$$b = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + 2ah_a \operatorname{ctg} \frac{A}{2}} \pm \sqrt{a^2 - 2ah_a \operatorname{tg} \frac{A}{2}} \right).$$

$$c = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + 2ah_a \operatorname{ctg} \frac{A}{2}} \mp \sqrt{a^2 - 2ah_a \operatorname{tg} \frac{A}{2}} \right).$$

7. Если $A \leq \frac{\pi}{2}$, то решения есть только при $0 < h_b < a$. В случае, когда $A > \frac{\pi}{2}$ решение есть при $0 < h_b < a \sin A$. В случае, когда приведенные условия выполнены

$$b = h_b \operatorname{ctg} A \pm \sqrt{a^2 - h_b^2}, \quad c = \frac{h_b}{\sin A}.$$

8. Анализ сложен и опускается. Пусть

$$P = \sqrt{a^2 - 2l_a^2 \sin^2 \frac{A}{2} - 2l_a \sin \frac{A}{2} \sqrt{l_a^2 \sin^2 \frac{A}{2} + a^2 \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}}.$$

Тогда

$$b = \frac{1}{2} \left(l_a \cos \frac{A}{2} + \sqrt{l_a^2 \cos^2 \frac{A}{2} + a^2 \pm P} \right),$$

$$c = \frac{1}{2} \left(l_a \cos \frac{A}{2} + \sqrt{l_a^2 \cos^2 \frac{A}{2} + a^2 \mp P} \right).$$

9. Если $B < \frac{\pi}{2}$, то решения есть при $R \geq \frac{a}{2}$. Если B — тупой или прямой угол, то решения есть при $R > \frac{a}{2 \sin B}$. В указанных случаях

$$b = 2R \sin B, \quad c = a \cos B \pm \sin B \sqrt{4R^2 - a^2}.$$

10. Решение имеется только при $0 < r < \frac{1}{2} a \sin B$. В этом случае

$$\sin C = \frac{2r(a - r \operatorname{ctg} \frac{B}{2})}{(a - r \operatorname{ctg} \frac{B}{2})^2 + r^2}, \quad \cos C = \frac{(a - r \operatorname{ctg} \frac{B}{2})^2 - r^2}{(a - r \operatorname{ctg} \frac{B}{2})^2 + r^2}, \quad \text{и}$$

$$b = \frac{a \sin B}{\sin B \cos C + \cos B \sin C}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin B \cos C + \cos B \sin C}.$$

11. Задача имеет решение при любых $a > 0$, $B \in (0, \pi)$, $S > 0$. При этом

$$b = \sqrt{a^2 + \frac{4S^2}{a^2 \sin^2 B} - 4S \operatorname{ctg} B}, \quad c = \frac{2S}{a \sin B}.$$

12. Задача имеет решение при любых $a > 0$, $B \in (0, \pi)$, $h_a > 0$. При этом

$$b = \sqrt{a^2 + \frac{h_a^2}{\sin^2 B} - 2ah_a \operatorname{ctg} B}, \quad c = \frac{h_a}{\sin B}.$$

13. Задача имеет решение при $0 < h_b < a$. При этом

$$b = \frac{a^2 \sin B}{h_b \cos B \pm \sin B \sqrt{a^2 - h_b^2}}, \quad c = \frac{ah_b}{h_b \cos B \pm \sin B \sqrt{a^2 - h_b^2}}.$$

14. Задача имеет решение при $m_a \geq \frac{a}{2} \sin B$. Если последнее условие выполняется, то

$$c = \frac{a \cos B \pm \sqrt{4m_a^2 - a^2 \sin^2 B}}{2}, \quad b = \sqrt{\frac{a^2}{2} + 2m_a^2 - c^2}.$$

15. Если $B \leq \frac{\pi}{2}$, то решение имеется при $a < 2m_b$. Если B — тупой угол, то решение есть при $m_b \geq \frac{a}{2} \sin B$. Решения задаются следующим образом:

$$c = \sqrt{4m_b^2 - a^2 \sin^2 B} - a \cos B, \quad b = \sqrt{2a^2 + 2c^2 - 4m_b^2}.$$

16. Решения есть при $a \sin B \leq m_c$. Задать их можно следующим образом:

$$c = 2a \cos B \pm \sqrt{m_c^2 - a^2 \sin^2 B}, \quad b = \sqrt{2m_c^2 + \frac{1}{2}c^2 - a^2}.$$

17. Решения есть при любых $a > 0$, $B \in (0, \pi)$, $l_b > 0$. Их можно задать следующим образом:

$$c = \frac{al_b}{2a \cos \frac{B}{2} - l_b}, \quad b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos B}.$$

18. Решения есть только при $l_c \geq a \sin B$. Их можно вычислить, применяя следующие формулы:

$$P = \frac{a \cos B \pm \sqrt{l_c^2 - a^2 \sin^2 B}}{l_c} \cdot \sin B.$$

$$C = 2 \arcsin P, \quad b = \frac{al_c}{2a \cos \frac{C}{2} - l_c}, \quad c = \frac{b \sin C}{\sin B}.$$

19. Решения есть при $R \geq \frac{4S^2 + a^4}{8aS}$. При этом

$$b = \sqrt{\frac{1}{2} \left(a^2 \pm 4S \sqrt{\frac{4R^2}{a^2} - 1} \pm \sqrt{a^4 \pm 8Sa^2 \sqrt{\frac{4R^2}{a^2} - 1} - 16S^2} \right)}.$$

$$c = \sqrt{\frac{1}{2} \left(a^2 \mp 4S \sqrt{\frac{4R^2}{a^2} - 1} \mp \sqrt{a^4 \mp 8Sa^2 \sqrt{\frac{4R^2}{a^2} - 1} - 16S^2} \right)}.$$

20. Исследование опускается ввиду его громоздкости.

$$p = \frac{2S}{r}, \quad b = p - \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - \frac{4S^2}{p(p-a)}}, \quad c = p - \frac{a}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - \frac{4S^2}{p(p-a)}}.$$

21. Решения есть тогда и только тогда, когда $0 < h_b \leq a$. В этом случае

$$b = \frac{2S}{h_b}, \quad c = \sqrt{a^2 + \frac{4S^2}{h_b^2}} \pm \frac{4aS}{h_b} \cdot \sqrt{1 - \frac{h_b^2}{a^2}}.$$

22. Решения есть при $\frac{2S}{a} \leq m_a$. В этом случае

$$b = \sqrt{\left(\frac{a}{2} \pm \sqrt{m_a^2 - \frac{4S^2}{a^2}} \right)^2 + \frac{4S^2}{a^2}}, \quad c = \sqrt{\left(\frac{a}{2} \mp \sqrt{m_a^2 - \frac{4S^2}{a^2}} \right)^2 + \frac{4S^2}{a^2}}.$$

23. Решения есть при $m_b \geq \frac{S}{a}$. В этом случае

$$h_a = \frac{2S}{a}, \quad b = 2\sqrt{a^2 + m_b^2} \pm \sqrt{4m_b^2 - h_a^2}, \quad c = \sqrt{4m_b^2 + a^2} \pm 2a\sqrt{4m_b^2 - h_a^2}.$$

24. Решения имеются только при $l_a \geq \frac{2S}{a}$. В этом случае

$$A = 2 \operatorname{arccctg} \left(\frac{l_a^2}{2S} \pm \sqrt{\frac{l_a^4}{4S^2} - 1 + \frac{a^2 l_a^2}{S^2}} \right),$$

$$b = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + 4S \operatorname{ctg} \frac{A}{2}} \pm \sqrt{a^2 - 4S \operatorname{tg} \frac{A}{2}} \right),$$

$$c = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + 4S \operatorname{ctg} \frac{A}{2}} \mp \sqrt{a^2 - 4S \operatorname{tg} \frac{A}{2}} \right).$$

25. Решение имеется только при $0 < r \leq \frac{a}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4} \right)$, где $A = \arcsin \frac{a}{2R}$, или $A = \pi - \arcsin \frac{a}{2R}$. Если указанные условия выполнены, то

$$b = \frac{1}{2} \left(a + 2r \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(a + 2r \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \right)^2 - \frac{8r(a + r \operatorname{ctg} \frac{A}{2})}{\sin A}} \right),$$

$$c = \frac{1}{2} \left(a + 2r \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \mp \sqrt{\left(a + 2r \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \right)^2 - \frac{8r(a + r \operatorname{ctg} \frac{A}{2})}{\sin A}} \right).$$

26. Решение имеется при $h_a \leq \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$, где $A = \arcsin \frac{a}{2R}$, или $A = \pi - \arcsin \frac{a}{2R}$. При этом

$$b = \sqrt{\frac{1}{2} \left(a^2 \pm 2ah_a \sqrt{\frac{4R^2}{a^2} - 1} \right) \pm \sqrt{a^4 + 4a^2 h_a \sqrt{4R^2 - a^2} - 4a^2 h_a^2}},$$

$$c = \sqrt{\frac{1}{2} \left(a^2 \mp 2ah_a \sqrt{\frac{4R^2}{a^2} - 1} \right) \mp \sqrt{a^4 + 4a^2 h_a \sqrt{4R^2 - a^2} - 4a^2 h_a^2}}.$$

27. Решения есть при $0 < h_b < a$. Если последнее условие выполнено, то

$$c = \frac{2Rh_b}{a}, \quad b = \sqrt{a^2 + \frac{4R^2 h_b^2}{a^2} \pm 4Rh_b \sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}}}.$$

28. Исследование проводится слово в слово так же, как в задаче 4 для $A = \arcsin \frac{a}{2R}$, или $A = \pi - \arcsin \frac{a}{2R}$. Стороны b и c вычисляются следующим образом:

$$b = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{2} + 2m_a^2 \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{2} + 2m_a^2 \right)^2 \mp \frac{2R(a^2 - 4m_a^2)}{\sqrt{4R^2 - a^2}}} \right)},$$

$$c = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{2} + 2m_a^2 \mp \sqrt{\left(\frac{a^2}{2} + 2m_a^2 \right)^2 \pm \frac{2R(a^2 - 4m_a^2)}{\sqrt{4R^2 - a^2}}} \right)}.$$

29. Исследование проводится слово в слово так же, как в задаче 5 для $A = \arcsin \frac{a}{2R}$, или $A = \pi - \arcsin \frac{a}{2R}$. Стороны b и c вычисляются следующим образом:

$$P = 2m_b^2 - a^2 - \frac{3(m_b^2 - a^2)}{2 \cos^2 A}, \quad Q = \frac{(m_b^2 - a^2)^2}{\cos^2 A}, \quad T = \frac{1}{2} - \frac{9}{16 \cos^2 A},$$

$$b = \sqrt{\frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4QT}}{2T}}, \quad c = \frac{3}{4 \cos A} \cdot b + \frac{m_b^2 - a^2}{b \cos A}.$$

30. Исследование опускается ввиду громоздкости. Угол A равен $\arcsin \frac{a}{2R}$ или $\pi - \arcsin \frac{a}{2R}$.

$$P = l_a \cos \frac{A}{2} + \sqrt{l_a^2 \cos^2 \frac{A}{2} + a^2}, \quad Q = \frac{1}{2} l_a^2 + \frac{1}{2} l_a \sqrt{a^2 + l_a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}},$$

$$b = \frac{P \pm \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}, \quad c = \frac{P \mp \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}.$$

31. Исследование опускается ввиду громоздкости.

$$p = \frac{ah_a}{2r}, \quad b = \frac{a}{2} \left(\frac{h_a - r}{r} \pm \sqrt{1 - \frac{h_a^2}{p(p-a)}} \right), \quad c = \frac{a}{2} \left(\frac{h_a - r}{r} \mp \sqrt{1 - \frac{h_a^2}{p(p-a)}} \right).$$

32. Решение имеется только при $0 < r < \frac{1}{2} h_b$. При этом угол C равен $\arcsin \frac{h_b}{a}$ или $\pi - \arcsin \frac{h_b}{a}$. Наконец,

$$b = \frac{2ar - r^2 \operatorname{ctg} \frac{C}{2}}{h_b - 2r}, \quad c = a - r \operatorname{ctg} \frac{C}{2} + \frac{2ar - r^2 \operatorname{ctg} \frac{C}{2}}{h_b - 2r}.$$

33. Решение есть при $0 < h_b < a$. При этом

$$b = \frac{ah_a}{h_b}, \quad c = a \sqrt{1 + \frac{h_a^2}{h_b^2}} \pm 2 \cdot \frac{h_a}{h_b} \cdot \sqrt{1 - \frac{h_a^2}{a^2}}.$$

34. Решения есть только при $m_a \geq h_a$. При этом

$$b = \sqrt{\left(\frac{a}{2} \pm \sqrt{m_a^2 - h_a^2}\right)^2 + h_a^2}, \quad c = \sqrt{\left(\frac{a}{2} \mp \sqrt{m_a^2 - h_a^2}\right)^2 + h_a^2}.$$

35. Решения есть только при $m_b \geq \frac{1}{2} h_a$. При этом

$$b = \sqrt{4a^2 + m_b^2 \pm 2a\sqrt{4m_b^2 - h_a^2}}, \quad c = \sqrt{a^2 + \frac{5}{2}m_b^2 \pm 4a\sqrt{4m_b^2 - h_a^2}}.$$

36. Решения есть при $l_a \geq h_a$. При этом

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2l_a^2}{ah_a} \pm \sqrt{\frac{4l_a^4}{a^2 h_a^2} - 4 + \frac{4a^2 l_a^2}{a^2 h_a^2}} \right),$$

$$b = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + 2ah_a \operatorname{ctg} \frac{A}{2}} \pm \sqrt{a^2 - \frac{2ah_a}{\operatorname{ctg} \frac{A}{2}}} \right),$$

$$c = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + 2ah_a \operatorname{ctg} \frac{A}{2}} \mp \sqrt{a^2 - \frac{2ah_a}{\operatorname{ctg} \frac{A}{2}}} \right).$$

37. Задача имеет решение только если $h_b < a$ и $m_a \geq \frac{1}{2} h_b$. При этом $C = \arcsin \frac{h_b}{a}$ или $C = \pi - \arcsin \frac{h_b}{a}$ и

$$b = \frac{1}{2} \cos C \pm \sqrt{m_a^2 - \frac{1}{4} a^2 \sin^2 C}, \quad c = \sqrt{\frac{a^2}{2} + 2m_a^2 - b^2}.$$

38. Задача имеет решение при $m_b \geq h_b$, $h_b \leq a$. В этом случае имеем

$$b = 2(\sqrt{a^2 - h_b^2} \pm \sqrt{m_b^2 - h_b^2}), \quad c = \sqrt{\frac{b^2}{2} + 2m_b^2 - a^2}.$$

39. Решения есть при $\frac{1}{2}h_b \leq m_c$. Тогда

$$b = |\sqrt{a^2 - h_b^2} \pm \sqrt{c^2 - h_b^2}|, \quad c = 2\sqrt{a^2 + m_b^2 - 2am_b \cos(C - T)},$$

где $T = \arcsin \frac{h_b}{2m_c}$, $C = \arcsin \frac{h_b}{a}$ или $C = \pi - \arcsin \frac{h_b}{a}$.

40. Решения есть при $h_b < a$, $l_b \geq h_b$ и при $h_b = a$, $l_b > a$. В этом случае $C = \arcsin \frac{h_b}{a}$ или $C = \pi - \arcsin \frac{h_b}{a}$,

$$T = \arccos \frac{h_b}{l_b}, \quad B = 2\left(\frac{\pi}{2} - C \pm T\right),$$

$$b = \frac{a \sin B}{\sin(B + C)}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin(B + C)}.$$

41. Решения есть тогда и только тогда, когда l_c не превосходит хотя бы одного из чисел $\left\{\frac{h_b}{\sin \frac{C}{2}}, \frac{h_b}{\cos \frac{C}{2}}\right\}$, где $C = \arcsin \frac{h_b}{a}$ или $C = \pi - \arcsin \frac{h_b}{a}$. Числа b и c находятся следующим образом:

$$b = \frac{al_c}{2a \cos \frac{C}{2}}, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}.$$

42. Задача имеет решение тогда и только тогда, когда из отрезков длины $\frac{a}{2}$, $\frac{1}{3}m_a$ и $\frac{2}{3}m_b$ можно составить треугольник (т.е. сумма длин любых двух из этих отрезков больше длины третьего отрезка). Тогда

$$b = \sqrt{a^2 + \frac{4}{3}m_a^2 - \frac{4}{3}m_b^2}, \quad c = \sqrt{\frac{2}{3}m_a^2 + \frac{4}{3}m_b^2 - \frac{1}{2}a^2}.$$

43. Исследование опускается ввиду его громоздкости. Пусть x — единственный положительный корень уравнения

$$x^2 + \left(2m_a^2 - \frac{a^2}{2} - l_a^2\right)x - l_a^2\left(\frac{a^2}{2} + 2m_a^2\right) = 0.$$

Тогда

$$b = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2} + 2m_a^2 \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{2} + 2m_a^2\right)^2 - 4x^2}\right)},$$

$$c = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2} + 2m_a^2 \mp \sqrt{\left(\frac{a^2}{2} + 2m_a^2\right)^2 - 4x^2}\right)}.$$

44. Задача имеет решение только если из отрезков длины $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$, $\frac{1}{h_c}$ можно составить треугольник. В этом случае

$$P = \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \cdot \left(-\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \cdot \left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \cdot \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right),$$

и тогда можно найти b и c : $b = \frac{2}{h_b \sqrt{P}}$, $c = \frac{2}{h_c \sqrt{P}}$.

45. Задача имеет решение тогда и только тогда, когда из отрезков длины m_a, m_b, m_c можно составить треугольник. В этом случае

$$b = \frac{4}{9}(2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2), \quad c = \frac{4}{9}(2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2).$$

- УРОК 27. 1. $a = \sqrt{2S \operatorname{tg} A}$, $b = \sqrt{2S \operatorname{ctg} A}$. 2. $a = 2R \sin A$, $b = 2R \cos A$.
 3. $a = r \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2}) + r$, $b = r \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + r$. 4. $a = h_c / \sin A$, $b = h_c / \cos A$.
 5. $a = \frac{2m_a}{\sqrt{1+4 \operatorname{ctg}^2 A}}$, $b = \frac{2m_a \operatorname{ctg} A}{\sqrt{1+4 \operatorname{ctg}^2 A}}$. 6. $a = \frac{2m_b}{\sqrt{4+\operatorname{ctg}^2 A}}$, $b = \frac{2m_b \operatorname{ctg} A}{\sqrt{4+\operatorname{ctg}^2 A}}$. 7. $a = 2m_c \sin A$, $b = 2m_c \cos A$. 8. $a = l_a \cos \frac{A}{2} \operatorname{tg} A$, $b = l_a \cos \frac{A}{2}$. 9. $a = l_b \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2})$, $b = l_b \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2}) \operatorname{ctg} A$. 10. $a = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot l_c(1 + \operatorname{tg} A)$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot l_c(1 + \operatorname{ctg} A)$.
 11. Задача имеет решение только при $R^2 \geq S$. В этом случае

$$a = \sqrt{R^2 + S} \pm \sqrt{R^2 - S}, \quad b = \sqrt{R^2 + S} \mp \sqrt{R^2 - S}.$$

12. Задача имеет решение только при $(\frac{S}{r} + r)^2 \geq 8S$. При этом

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{S}{r} + r \pm \sqrt{\frac{S^2}{r^2} - 6S + r^2} \right), \quad b = \frac{1}{2} \left(\frac{S}{r} + r \mp \sqrt{\frac{S^2}{r^2} - 6S + r^2} \right).$$

13. Задача имеет решение при $S \geq h_c^2$. при этом

$$a = \sqrt{2} \cdot S \cdot \sqrt{\frac{1}{h_c^2} \pm \sqrt{\frac{1}{h_c^4} - \frac{1}{S^2}}},$$

$$b = \sqrt{2} \cdot S \cdot \sqrt{\frac{1}{h_c^2} \mp \sqrt{\frac{1}{h_c^4} - \frac{1}{S^2}}}.$$

14. Задача имеет решение при $m_a^2 \geq 2S$. Тогда

$$a = \sqrt{2m_a^2 \pm \sqrt{4m_a^4 - 16S^2}}, \quad b = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2m_a^2 \mp \sqrt{4m_a^4 - 16S^2}}.$$

15. Задача имеет решение при $S \geq l_c^2$. Тогда

$$a = \frac{S\sqrt{2}}{l_c} \pm \sqrt{\frac{2s^2}{l_c^2} - 8S}, \quad b = \frac{S\sqrt{2}}{l_c} \mp \sqrt{\frac{2s^2}{l_c^2} - 8S}.$$

16. Задача имеет решение при $\frac{h_c}{r} \in (2, 1 + \sqrt{2}]$. Если указанное условие выполняется, то

$$a = \frac{r(h_c - r \pm \sqrt{r^2 + 14rh_c - 7h_c^2})}{h_c - 2r}, \quad b = \frac{r(h_c - r \mp \sqrt{r^2 + 14rh_c - 7h_c^2})}{h_c - 2r}.$$

17. Задача имеет решение при $m_c \geq \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cdot r$. В этом случае

$$a = \frac{2m_c - r \pm \sqrt{4m_c^2 - 4rm_c - r^2}}{2}, \quad b = \frac{2m_c - r \mp \sqrt{4m_c^2 - 4rm_c - r^2}}{2}.$$

18. Решение имеется только при $\frac{r}{l_c} < \frac{1}{2\sqrt{2}}$. В этом случае

$$A = 2 \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{r}{l_a} + \sqrt{1 + \frac{r^2}{l_a^2}} \right) \right) - \frac{\pi}{2},$$

$$a = l_a \cos \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} A, \quad b = l_a \cos \frac{A}{2}.$$

19. Решение имеется при $\frac{r}{l_c} \in (\frac{\sqrt{2}}{4}, \sqrt{2} - 1] \cup [1 + \sqrt{2}, +\infty)$. В указанном случае

$$a = \frac{2r^2 \pm 2r\sqrt{r^2 - 2\sqrt{2}rl_c + l_c^2}}{4r - \sqrt{2}l_c}, \quad b = \frac{2r^2 \mp 2r\sqrt{r^2 - 2\sqrt{2}rl_c + l_c^2}}{4r - \sqrt{2}l_c}.$$

20. Задача имеет решение при $\frac{m_a}{h_c} \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. Если последнее условие имеет место, то

$$a = \sqrt{\frac{4m_a^2 - 3h_c^2 \pm \sqrt{16m_a^4 + 9h_c^4 - 40m_a^2h_c^2}}{2}}, \quad b = \sqrt{m_a^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

21. Задача имеет решение при $h_c \leq l_c$. Если $a \geq b$, то

$$a = \frac{h_c}{\cos(\arccos \frac{h_c}{l_c} + \frac{\pi}{4})}, \quad b = \frac{h_c}{\sin(\arccos \frac{h_c}{l_c} + \frac{\pi}{4})}.$$

Если $a < b$, то

$$a = \frac{h_c}{\sin(\arccos \frac{h_c}{l_c} + \frac{\pi}{4})}, \quad b = \frac{h_c}{\cos(\arccos \frac{h_c}{l_c} + \frac{\pi}{4})}.$$

22. Задача имеет решение при $m_a < 2m_b$, $m_b < 2m_a$. Тогда

$$a = \sqrt{\frac{16m_b^2 - 4m_a^2}{15}}, \quad b = \sqrt{\frac{16m_a^2 - 4m_b^2}{15}}.$$

23. $a = \frac{32}{3}\sqrt{\frac{6}{5}}, \quad b = 8\sqrt{\frac{6}{5}}.$

► УРОК 28. 1. $\frac{(k+1)!}{l+1}$. 2. $\frac{(k-1)(l-1)}{k+l-1}$. 3. $\frac{k!-1}{l-k}$. 4. $\frac{pq-q+1}{1-q}$. 5. $2\sqrt{3} - 3$. 6. $\frac{3}{2}$.
7. $(b/a)^2$. 8. $\frac{2R\sqrt{Rr}}{R-r}$. 9. $\frac{72}{5}$. 10. $\frac{30}{11}$. 11. $\pm\sqrt{7}$. 12. $\frac{7}{2}$. 13. $\frac{3}{2}$. 14. $\frac{7}{5}$. 15. $\frac{16}{5}$.
16. 11. 17. $BP : PM = 18 : 7$. 18. $BO : OM = 6 : 5$. 19. $\frac{24}{7}$. 20. 12.

► УРОК 29. 1. $S_{AMB} = \frac{1}{2}(S_1 + S_2) + \sqrt{\frac{1}{4}(S_1 + S_2)^2 - S_1S_2\sin^2\alpha}$. 2. $1 - \frac{1}{q+1} - \frac{p^2q}{(p+1)(p+1+pq)}$. 3. $\frac{b(a+1)}{(ac+a+1)((c+1)(a+1)(b+1)-c)}$. 4. $\frac{S}{2} \left(1 - \frac{p^2(q+1)}{(p+1)(pq+2p+1)} \right)$.
5. Площадь треугольника KRS равна

$$\frac{(r-s)^2(q+1)(p+1)}{2(s+1)(r+1)((r-s)(p+1)(q+1) + (q-p)(r+1)(s+1))} \cdot S.$$

6. $\frac{Sp^2(q+k)}{(k+1)(p+1)(p+k+p(q+k))}$. 7. Площадь треугольника PRO равна

$$\frac{S(r-p)^2(s+\alpha)(q+\alpha)}{(\alpha+1)(p+1)(s+1)((\alpha+p)(q-s) + (\alpha+q)(r-p))}.$$

8. $\frac{PQ}{OR} = \frac{r+1}{p+1} \cdot \frac{1+q+qp+qps}{1+s+sr+srq}$. Докажите, что $\frac{PQ}{OR} = \frac{SPQS}{SQSR}$. При этом $SPQS = S_{ABQS} - S_{ASP} - S_{BPQ}$. Площади трапеции $ABQS$ и прямоугольных треугольников BPQ и APS легко подсчитываются. Площадь треугольника SQR находится аналогично. 9. Пусть $1+p+pt+ptq = K$, $1+q+qr+qrp = L$, $1+q+qs+qsp = M$. Тогда

$$S_{MNT} = \frac{(s-r)K^2}{2((t+1)L + (r+1)K)((t+1)M + (s+1)K)}.$$

10. $\frac{17}{4}$. 11. $\frac{2\sqrt{3}-3}{6}$. 12. 7:8. 13. $S_{BEF} = \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{(a+R)^3}{(a-R)(a^2+R^2)}$. 14. $\frac{\sqrt{1+\sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{4 \sin \frac{\alpha}{2}}$. 15. 2.

16. $\frac{8R^2 r^3}{(R^2 + r^2)^2}$. 17. 6. 18. $S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2}$. 19. $(1 + 2 \sin \frac{\alpha}{2})^2$. 20. $\frac{9}{14}$.

► УРОК 30. 1. $18(1 + \cos 2\alpha) \sin 2\alpha$. 2. $\frac{3}{32}$. 3. $\frac{md}{3} \cdot \sqrt{\frac{5}{m^2+1}}, \frac{d}{3} \cdot \sqrt{\frac{5}{m^2+1}}$. 4. $49\sqrt{3} - \frac{245}{3}$. 5. 8. 6. $\sqrt{13}$. 7. $RS > QR$. 8. $\frac{9\sqrt{3}}{14}$. 9. $\frac{3}{4}(4\sqrt{2} - 5)$. 10. $\frac{15}{7}$. 11. $\frac{30 \sin \beta}{4 + \cos \beta}$. 12. $\frac{10}{3}$. 13. $7 \operatorname{ctg} 70^\circ \sin 50^\circ$. 14. $2 \operatorname{arctg}(5 \operatorname{tg} \alpha)$. 15. $4 + 2\sqrt{7}$. 16. 4. 17. $AB = 2\sqrt{5-2\sqrt{2}}, AD = 2(1 + \sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}}$. 18. $\arcsin \frac{1}{8}$. 19. $\frac{10}{3}$. 20. $4 + \frac{8}{\sqrt{3}}$.

► УРОК 31. 1. $3\sqrt{3} \pm \sqrt{15}$. 2. $\frac{15\sqrt{3}}{4}$. 3. $\frac{dD}{D-d}$. Доказать и использовать то, что прямая, соединяющая точки касания окружностей с полукругом, прямая, соединяющая центры окружностей и прямая, на которой лежит диаметр полукруга, пересекаются в одной точке. 4. $\sqrt{2}$. 5. $\frac{29}{32} - \frac{25\pi}{256} + \frac{25}{256} \arccos \frac{7}{25}$. 6. $\frac{3\sqrt{31}}{80} + \frac{16}{25}(\arccos \frac{3}{4} - \arccos \frac{15}{16})$. 7. $\arccos \frac{1 \pm \sqrt{1-2k}}{2}, \arccos \frac{1 \pm \sqrt{1-2k}}{2}, \pi - 2 \arccos \frac{1 \pm \sqrt{1-2k}}{2}$. 8. $4r \cos \frac{\alpha}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{8}$. 9. Пусть угол BAM равен α , угол MAC равен $\beta = 60^\circ - \alpha$, а радиус описанной около треугольника окружности равен R . Тогда $BM = 2R \sin \alpha$, $MC = 2R \sin \beta$ и $AM = 2R \sin(60^\circ + \alpha)$. Осталось доказать тождество

$$\sin \alpha + \sin(60^\circ - \alpha) = \sin(60^\circ + \alpha).$$

10. $\frac{4 \sin^2 \alpha + 1}{8 \sin \alpha} \cdot a$. 11. $\sqrt{4R^2 - a^2}$. 12. $15^\circ, 75^\circ$. 13. $\arcsin \sqrt{\frac{7}{8}}$. 14. $30^\circ, 90^\circ$.

15. $6\sqrt{\frac{3}{7}}$. 16. $\sqrt{\frac{10+5\sqrt{3}}{2}}$. 17. $\frac{S}{S_{ABC}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{3}$. 18. $\frac{1}{2}(p-a)^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

19. $\frac{d+\sqrt{d^2-c^2}}{2}, \frac{d-\sqrt{d^2-c^2}}{2}$. Докажите, что сумма оснований трапеции равна большей из боковых сторон. 20. 5. 21. $\frac{3}{\sqrt{2}}$. 22. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 23. В случае, когда $BC = 1$, $AD = 3$ центр находится внутри трапеции, при $BC = 2$, $AD = 10$ — вне ее. 24. $\frac{1}{8}P \sin \alpha$.

► УРОК 32. 1. $\sqrt{3}$. 2. 4. 3. $\pi - \arccos \frac{1}{4}$. 4. $p + b$. 5. 30° . 6. 3. 7. 1 или 2. 8. $AB = BC = 7\sqrt{3}$, $CD = \sqrt{21}$, $AD = 2\sqrt{21}$. 9. $AB = BC = 2$, $CD = 1$, $AD = \sqrt{3}$, $S_{ABCD} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. 10. $\arccos \sqrt{\frac{11}{14}} - \arccos \frac{7}{2\sqrt{14}}$. 11. $2R \cos \frac{2\pi}{5} = R \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 12. $\frac{2\sqrt{3}+3}{6} \cdot a$. 13. Площадь шестиугольника равна

$$\frac{\sqrt{3}}{8}(a\sqrt{12R^2 - 3a^2} + b\sqrt{12R^2 - b^2} + c\sqrt{12R^2 - c^2} + 6R^2 - a^2 - b^2 - c^2).$$

14. $\frac{3}{8}a^2$. 15. $\frac{1}{2}R(\sqrt{3} - 1)$. 16. $\frac{1}{2(\sin a + \sin 2a + \sin 3a)}$. 17. Сумма всех углов семиугольника равна 5π . Из того, что центр круга лежит внутри семиугольника, следует, что дуга $A_7A_1A_2 \dots A_6$ составляет более половины окружности. Значит,

$$\angle A_1A_2A_7 + \angle A_2A_7A_1 + \angle A_2A_4A_3 + \angle A_3A_2A_4 + \angle A_4A_6A_5 + \angle A_5A_4A_6 > \frac{\pi}{2}.$$

Кроме того, $\angle A_7A_2A_4 + \angle A_2A_4A_6 + \angle A_4A_6A_7 + \angle A_6A_7A_2 = 2\pi$. Отсюда и получаем, что $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} < 5\pi - 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{5}{2}\pi$, что и требовалось доказать. 18. $\sqrt{21}$. 19. $\frac{189\sqrt{3}}{140}a^2$. 20. Искомая сумма равна $\frac{nR^2}{2}$, где R — радиус описанной окружности для данного n -угольника.

- **УРОК 33.** 1. Если дана точка M и прямая l , то надо опустить перпендикуляр MN из точки M на прямую l и провести через его середину прямую l_1 параллельную l . Прямая l_1 будет искомым ГМТ. Ясно, что если точка M лежит на прямой l , то искомое ГМТ совпадет с l . 2. Пусть длина данного отрезка равна l , радиус окружности равен R , а O — ее центр. Тогда искомым ГМТ является окружность радиуса $\sqrt{R^2 + l^2}$ с центром в точке O . 3. Пусть сумма квадратов расстояний до точек A и B равна k , а длина отрезка AB равна p . Если $k < \frac{p^2}{2}$, то искомое ГМТ пусто, если $k = \frac{p^2}{2}$, то искомое ГМТ состоит из одной точки — середины отрезка AB . Если $k > \frac{p^2}{2}$, то искомое ГМТ есть окружность с центром в середине отрезка AB радиуса $\frac{1}{2}\sqrt{2k - AB^2}$. 4. Пусть даны отрезки AB и CD . Пусть P, Q, R, S есть соответственно середины отрезков CA, CB, DA, DB . Искомым ГМТ является параллелограмм $PQSR$ вместе со своими внутренними точками. При этом, если $AB \parallel CD$, то параллелограмм вырождается в отрезок — среднюю линию трапеции $ABDC$. 5. Вся плоскость. 6. Окружность, построенная на отрезке AB как на диаметре, без точек A и B . 7. Если прямые AB и CD не параллельны, то искомое ГМТ состоит из двух прямых, проходящих через точку их пересечения. Эти прямые можно описать следующим образом: в каждом из четырех углов, на которые прямые AB и CD разбивают плоскость, множество точек, расстояния от которых до сторон CD и AB угла относятся как $|AB| : |CD|$, есть луч, исходящий из вершины угла. Четыре таких луча и образуют две прямых, составляющих искомое ГМТ. Если $AB \parallel CD$, то при $|AB| = |CD|$ искомое ГМТ есть прямая, параллельная AB и CD и равноудаленная от этих прямых. Если $|AB| \neq |CD|$, то множество точек, расстояния от которых до прямых AB и CD относятся как $|CD| : |AB|$, дает уже две прямые, параллельные AB и CD , одна из которых лежит между AB и CD , а вторая лежит так, что вместе с первой охватывает ту из прямых AB и CD , которая содержит больший из отрезков AB и CD . Наконец, если прямые AB и CD совпадают, то искомое ГМТ есть их общая прямая при $|AB| \neq |CD|$ и вся плоскость при $|AB| = |CD|$. 8. Образ данной окружности при гомотетии с коэффициентом $\frac{1}{2}$ с центром в данной точке. 9. Вся плоскость. Пусть M — любая точка на плоскости,

и r_1, r_2, r_3 — расстояния от нее до заданных прямых. Окружность радиуса $R = r_1 + r_2 + r_3$ с центром в точке M пересечет каждую из данных прямых в двух точках. Можно выбрать по одной из этих точек на каждой прямой так, чтобы получился треугольник. Очевидным образом, M будет центром описанной окружности для этого треугольника. 10. Окружность радиуса $|AB|$ с центром в середине AB . 11. Множество точек $P_n, Q_n, n = 1, 2, \dots$, лежащих на серединном перпендикуляре к отрезку AB (точки P_n и Q_n лежат по разные стороны от прямой AB) таких, что $|AP_n| = |AQ_n| = n$. 12. Возьмем на прямой AD с той же стороны от A , что и D точку K такую, что $AK = \frac{q|BC|}{1+q}$, где $q = \frac{AD}{BC}$. Искомое ГМТ есть окружность с центром в точке K радиуса $\frac{q}{q+1} \cdot |AB|$, из которой выброшены точки пересечения ее с прямой AD . 13. Искомое ГМТ — квадрат (без внутренности, т.е. граница квадрата), вершины которого есть середины сторон квадрата $ABCD$. 14. Пусть P — середина высоты треугольника ABC , опущенной из вершины B , а Q — середина стороны AC . Искомое ГМТ есть отрезок PQ без точек P и Q . 15. Данная окружность, симметрично отраженная относительно прямой AB , из которой выкинуты точки A и B . Надо заметить, что если на исходной окружности взята точка C , то угол, под которым отрезок AB виден из точки пересечения высот треугольника ABC , равен $\pi - C$. 16. Отрезок AB разбивает исходную окружность на две дуги. Из точек одной он виден под углом C , из точек другой — под углом $\pi - C$. Искомое ГМТ есть объединение двух дуг, одна из которых есть множество тех точек, из которых AB виден под углом $\frac{\pi+C}{2}$, лежащих по ту же сторону от AB , что и первая дуга исходной окружности. Вторая дуга искомого ГМТ есть множество тех точек, из которых AB виден под углом $\pi - \frac{C}{2}$, лежащих по ту же сторону от прямой AB , что и вторая дуга исходной окружности. Ни одна из указанных дуг, составляющих искомое ГМТ, не содержит точек A и B . 17. Надо взять данную окружность без точек A и B и подвергнуть ее гомотетии с коэффициентом $\frac{1}{3}$ с центром в середине отрезка AB . Образ окружности при указанной гомотетии и будет искомым ГМТ. 18. Надо взять данную окружность без точки A и подвергнуть ее гомотетии с коэффициентом $\frac{2}{3}$ с центром в точке A . Образ окружности при указанной гомотетии и будет искомым ГМТ. 19. Если $b \geq |AB|$, то искомое ГМТ пусто. Если $b < |AB|$, то искомым ГМТ будут две касательные, проведенные из точки A к окружности радиуса b с центром в точке B , из которых выкинута точка A . 20. Серединный перпендикуляр к отрезку AB без пересечения с прямой AB .

► УРОК 34. 1. Надо вычислить сторону c по формуле

$$c = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4m_c^2},$$

построить ее и затем построить треугольник по трем сторонам. Задача имеет решение при $a^2 + b^2 > 2m_c^2$. 2. Надо построить треугольник со сторонами $m_a, \frac{a}{2}, b$. Пусть в нем угол, лежащий против стороны длины b , равен α . После этого строится треугольник по сторонам $\frac{a}{2}, b$ и углу $\pi - \alpha$ между ними. В построенном треугольнике сторона, лежащая против угла

$\pi - \alpha$ равна c . После этого искомым треугольник строится по трем сторонам a, b, c . Задача имеет решение, если существует треугольник со сторонами $m_a, \frac{a}{2}, b$. **3.** Нужно построить прямоугольный треугольник с гипотенузой $2a$ и прилежащим к ней катетом $l_c(\frac{a}{b} + 1)$. Пусть угол между упомянутыми катетом и гипотенузой равен α . Построим угол $C = 2\alpha$. Теперь искомым треугольник можно построить по сторонам a, b и углу C между ними. Задача имеет решение, если $\frac{l_c(a+b)}{2ab} < 1$. **4.** Надо построить отрезок длины $c = |\sqrt{a^2 - h_c^2} \pm \sqrt{b^2 - h_c^2}|$. После этого искомым треугольник строится по трем сторонам a, b, c . Задача имеет решение, если $a \geq h_c, b \geq h_c$ и $a + b - 2h_c > 0$. **5.** Надо построить прямоугольный треугольник по катету h_a и гипотенузе b . Пусть C — угол противолежащий по отношению к указанному катету. Искомым треугольник теперь можно построить по двум сторонам a, b и углу C или $\pi - C$ между ними. Задача имеет решение при $h_a \leq b$. **6.** Стороны b и c можно построить, пользуясь формулой, выражающей их через известные отрезки:

$$b = \sqrt{\frac{2}{3}(4m_c^2 - 3a^2 + 2m_b^2)}, \quad c = \sqrt{\frac{2}{3}(2m_c^2 - 3a^2 + 4m_b^2)}.$$

После этого можно построить искомым треугольник по сторонам a, b, c . Задача имеет решение в случае, когда из отрезков $\frac{2}{3}m_b, \frac{2}{3}m_c, a$ можно составить треугольник. **7.** Задача решается точно так же, как предыдущая. Она имеет решение, если из отрезков $\frac{1}{3}m_a, \frac{2}{3}m_b, \frac{1}{2}a$ можно составить треугольник. **8.** Построим прямоугольный треугольник по гипотенузе c и катету h_a . Тогда угол, противолежащий катету h_a будет равен углу B или $\pi - B$, где B угол искомого треугольника. Аналогично строится угол A искомого треугольника. После этого остается построить его по стороне c и прилежащим к ней углам A и B . Задача имеет решение, если $h_a \leq c, h_b \leq c$ и $h_a + h_b < 2c$. **9.** Легко строится сторона $b = a \cdot \frac{h_a}{h_b}$. Далее нужно действовать так же, как в задаче 5. Задача имеет решение при $h_b \leq a$. **10.** Если построить треугольник со сторонами $\frac{2}{3}m_a, \frac{2}{3}m_b, \frac{2}{3}m_c$, то его медианы будут половинами соответствующих сторон искомого треугольника. Задача имеет решение, если из отрезков m_a, m_b, m_c можно составить треугольник. **11.** Надо взять произвольный отрезок p и построить треугольник со сторонами $\frac{p^2}{h_a}, \frac{p^2}{h_b}, \frac{p^2}{h_c}$. В получившемся треугольнике против $\frac{p^2}{h_a}$ лежит угол A искомого треугольника. Построим прямоугольный треугольник по катету h_b и острому углу A , лежащего напротив катета h_b . Тогда гипотенуза будет равна стороне c искомого треугольника. Аналогично строятся остальные его стороны. Задача имеет решение, если из отрезков $\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_c}$ можно составить треугольник. **12.** Строим прямоугольный треугольник AMH такой, что $AM = m_a, AH = h_a$ и угол MHA прямой. Радиусом l_a с центром в A проведем окружность. Она пересечет сторону MH в точке L . Проведем через точку M прямую параллельно AN . Пусть она пересекается с прямой AL в точке P . Пусть O — точка пересечения серединного перпендикуляра к AP и прямой MP . Тогда O — центр описанной около искомого треугольника ABC окружности. Вершины B и C искомого треугольника находятся

как пересечение окружности с центром O радиуса OA с прямой MN . Задача имеет решение при $h_a \leq l_a \leq m_a$. При этом, если $h_a \neq m_a$, то $h_a \neq l_a$.

13. Строим прямоугольный треугольник $ВОК$ по катету $OK = \frac{h_c}{3}$ и гипотенузе $ВО = \frac{2}{3}m_b$. Радиусом $\frac{2}{3}m_b$ с центром O проводим окружность. Пусть A та из точек пересечения этой окружности с прямой BK , для которой K лежит между точками A и B . Тогда AB — сторона искомого треугольника. Дальше можно действовать как в задаче 6. Задача имеет решение при $h_c < m_b$ и $h_c < m_a$.

14. Нужно построить прямоугольный треугольник $ВОК$ по гипотенузе $ВО = \frac{2}{3}m_b$ и катету $OK = \frac{1}{3}h_a$. На катете BK построим точку M такую, что $OM = \frac{1}{3}m_a$. Тогда отрезок BM будет равен половине стороны BC искомого треугольника. Продлив отрезок BM за точку M до точки C такой, что $BM = MC$ и продлив отрезок MO за точку O до точки A такой, что $OA = 2 \cdot OM$, получим искомым треугольник ABC . Задача имеет решение при $h_a < 2m_b$, $h_a \leq m_a$.

15. Строим два прямоугольных треугольника по катету $h_a/2$ (или $h_b/2$) и гипотенузе m_c . Угол C искомого треугольника строим как сумму углов, противолежащих катетам $h_a/2$ и $h_b/2$. Имея угол C , строим стороны $b = \frac{h_a}{\sin C}$ и $a = \frac{h_b}{\sin C}$.

После этого строим искомым треугольник по сторонам a, b и углу C между ними. Задача имеет решение при $\frac{h_b}{2} < m_c$ и $\frac{h_a}{2} < m_c$. **16.** Построим прямоугольный треугольник AMH по гипотенузе $AM = m_a$ и катету $AH = h_a$. В той же полуплоскости относительно прямой AM , что и точка H построим точку P такую, что $\angle APM = 90^\circ$ и $MP = \frac{1}{2}h_b$. Пусть C — точка пересечения прямых AP и MN . На продолжении отрезка CM за точку M вы берем такую точку B , что $BM = MC$. Тогда треугольник ABC — искомым. Задача имеет решение, если $h_b < 2m_a$ и $h_a \leq m_a$.

17. Построим прямоугольный треугольник по катету h_a и гипотенузе $l_c(\frac{h_a}{h_b} + 1)$. Тогда угол, лежащий напротив катета h_a , будет равен $\frac{C}{2}$, где C — угол искомого треугольника. Имея угол C , строим сторону $a = \frac{h_b}{\sin C}$.

Наконец, легко строится $b = \frac{ah_a}{h_b}$. Осталось построить треугольник ABC по сторонам a, b и углу C между ними. Задача имеет решение при $h_a h_b < (h_a + h_b)l_c$.

18. Берем отрезок BC такой, что $|BC| = a$. Проводим прямую l , параллельную BC и отстоящую от нее на расстояние h_a . С центром в середине M отрезка BC проводим окружность радиуса m_a . Пусть A — любая из точек пересечения этой окружности с прямой l . Тогда треугольник ABC — искомым. Задача имеет решение при $m_a \geq h_a$. **19.** Построим прямоугольный треугольник $ВОК$ по катету $OK = \frac{1}{3}h_a$ и гипотенузе $ВО = \frac{2}{3}m_b$. От точки B в ту же сторону, что и точка K отложим на прямой BK точку C так, что $BC = a$. На продолжении отрезка $ВО$ за точку O отложим точку L такую, что $2 \cdot OL = OB$. На продолжении отрезка CL за точку L возьмем такую точку A , что $AL = CL$. Треугольник ABC искомым. Задача имеет решение при $h_a < 2m_b$.

20. Построим прямоугольный треугольник KMC по гипотенузе $CM = \frac{a}{2}$ и катету $MK = \frac{h_b}{2}$. На продолжении отрезка CM за точку M отметим точку

В такую, что $BM = MC$. Радиусом m_a с центром в точке M проведем окружность. Пусть A — одна из точек ее пересечения с прямой CK . Тогда треугольник ABC искомый. Задача имеет решение при $a \geq h_b$, $2m_a > h_b$.

21. Строим прямоугольный треугольник BCH по гипотенузе a и катету h_b . С центром в точке B проведем окружность радиуса m_b . Пусть M — любая точка пересечения ее с прямой CH , отличная от C . На продолжении отрезка CM за точку M построим точку A так, что $AM = MC$. Тогда треугольник ABC искомый. Задача имеет решение при $a \geq h_b$ и $m_b \geq h_b$, причем эти два неравенства не могут одновременно превращаться в равенства. **22.** Пусть все токи P, Q, R различны. Точку Q соединим с центром O окружности, описанной около треугольника PQR . Через точку P проведем прямую, параллельную прямой OQ . Обозначим через C точку пересечения этой прямой с окружностью. Пусть M — точка пересечения OQ и CR . Через точку M проведем прямую, перпендикулярную прямой OQ . Она пересечет окружность в двух точках A и B . Треугольник ABC — искомый. Если все три точки совпали, то у задачи есть бесконечно много решений. Если все точки лежат на одной прямой, и не все совпали, то решений нет. **23.** Вершины искомого треугольника есть основания высот треугольника $A_1B_1C_1$. **24.** Пусть угол между AB и CD равен α , $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Построим треугольник ABD' по сторонам $AB = a$ и $BD' = c$ и углу α между ними. Построим вершину D так, чтобы $AD = d$, $D'D = b$ (как пересечение двух ясно каких окружностей). Через точку D проведем прямую, параллельную BD' и пусть точка C на этой прямой такова, что $CD = c$ и $BC = b$. Тогда четырехугольник $ABCD$ искомый. **25.** Проведем диагональ AC данного четырехугольника. В треугольниках ABC и ACD опустим высоты из вершин B и D и сравним их. Если они равны, то AC искомая прямая. Пусть, например, высота, опущенная из точки D на AC больше, чем высота, опущенная из точки B на эту же прямую. Проведем прямую, параллельно AC , лежащую от AC с той же стороны, что и точка D . Она пересечет отрезок CD в точке K . Пусть M — середина DK . На отрезке CD возьмем точку P такую, что $CP = DM$. Тогда прямая AP — искомая. **26.** Если точки A, B, C лежат на одной прямой, то решений нет. В противном случае надо описать около треугольника ABC окружность и провести к ней касательные в точках A, B и C . Вершины треугольника, ограниченного тремя получившимися прямыми, есть центры искомых окружностей. Радиусы их будут равны длинам соответствующих касательных к построенной окружности. **27.** Пусть длина отрезка AB равна $2a$, радиус данной окружности равен r , а центр ее находится в точке O . Пусть M — середина отрезка AB и l — серединный перпендикуляр к нему. Пусть $OP = p$ — перпендикуляр из O на прямую l . Отрезок MP обозначим через q . Ясно, что центр искомой окружности лежит на прямой l . Пусть x — расстояние от него до точки M . Для решения задачи достаточно построить отрезок длины x . Отрезки длины p, q, r и a у нас есть. Число x удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{a^2 + x^2} + r = \sqrt{(q - x)^2 + p^2}.$$

Его можно решить и убедиться в том, что выражение для x дает возмож-

ность построить отрезок длины x . Задача имеет решение, если исходная окружность не содержит ни одной из точек A и B . **28.** Берем произвольную точку Y' на отрезке BC . Проведем через нее прямую, параллельную AC . Пусть эта прямая пересекла сторону AB в точке X' . На продолжении отрезка BX' за точку X' отложим точку A' такую, что $AX' = BY'$. Построим отрезок длины $p = \frac{AB \cdot AX'}{BX' + AX'}$. Пусть X — такая точка на отрезке AB , что $AX = p$. Проведем через точку X прямую, параллельную AC и пусть Y — точка ее пересечения с прямой BC . Точки X и Y искомые. **29.** Через вершину P проведем прямую, параллельную прямой AB , через вершину Q — прямую, параллельную прямой BC и через вершину R — прямую, параллельную стороне AC . Получим треугольник $A'B'C'$, подобный треугольнику ABC . Построим отрезки $x = \frac{AB \cdot A'P}{A'B'}$, $y = \frac{BC \cdot B'Q}{B'C'}$ и $z = \frac{CA \cdot C'R}{C'A'}$. Возьмем на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC соответственно точки X, Y и Z такие, что $AX = x$, $BY = y$ и $CZ = z$. Тогда треугольник XYZ искомым. **30.** У нас есть точки A и C и прямые BC и AD (хотя точки B и D не известны). Пусть K проекция точки C на AD . Длину отрезка AK обозначим через s . Пусть p — расстояние между прямыми AB и CD . Построим на отрезке AK такую точку L , что $AL = \sqrt{c^2 - p^2}$. На продолжении отрезка AK за точку K отложим отрезок KD такой, что $KD = AL$. Пусть B — проекция точки L на прямую BC . Тогда трапеция $ABCD$ — искомая.

- **УРОК 35.** 1. При $a \in (-\infty, -1) \cup [2 + 2\sqrt{2}, +\infty)$. 2. При $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$. 3. При $a \leq 0$. 4. $y^2 + 237y - 12040 = 0$. 5. $cy^2 + by + a = 0$. 6. При $a = -\frac{3}{8}$. 7. Если $a < 0$, то $x \in (\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a}, \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a})$; если $a = 0$, то $x \in (-1, +\infty)$; если $0 < a \leq \frac{1}{4}$, то $x \in (-\infty, \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}) \cup (\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a}, +\infty)$; если $a > \frac{1}{4}$, то x любое. 8. Если $|a| < 2$, то x любое, если $|a| \geq 2$, то $x \in (-\infty, \frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}) \cup (\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}, +\infty)$. 9. Если $a > \frac{1}{4}$, то x любое; если $a \leq \frac{1}{4}$, то $x \in (-\infty, \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}, +\infty)$. 10. Если $a < 0$, то $x \in (-1, -\frac{1}{a})$; если $a = 0$, то $x \in (-1, +\infty)$; если $a \in (0, 1]$, то $x \in (-\infty, -\frac{1}{a}) \cup (-1, +\infty)$; если $a > 1$, то $x \in (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{a}, +\infty)$. 11. При $m \in [-6, -5)$ оба корня отрицательны; при $m = -5$ один из корней равен нулю, а второй отрицателен; при $m \in (-5, 3)$ корни имеют различные знаки; при $m = 3$ есть один положительный корень; при $m \in (3, 4]$ оба корня положительны. При остальных m решений нет. 12. При $m \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$; оба корня положительны; при $m = -\frac{1}{2}$ один из корней равен нулю, а другой отрицателен; при $m = 0$ уравнение имеет один положительный корень; при $-\frac{1}{2} < m < 0$ корни имеют разные знаки. 13. Сумма квадратов корней максимальна при $a = 0$ и минимальна при $a = \pm 2$. 14. При $a = -2$. 15. Ни при каких. 16. При любых a . 17. При $a \neq 0$. 18. При $a = 0$. 19. Ни при каких. 20. При $k \neq 0$.
- **УРОК 36.** 1. $a \geq 1$. 2. $\frac{16}{17} \leq a < 2$. 3. $-3 \leq a < -2$. 4. $a > 1$. 5. $-2 - \sqrt{11} < a < -2 + \sqrt{11}$. 6. Таких a не существует. 7. $a \geq 3 + 2\sqrt{2}$. 8. $2\sqrt{2} \leq a < \frac{11}{3}$.

9. $\frac{-7-\sqrt{45}}{2} \leq m \leq -4 + 2\sqrt{3}$. 10. $m > 1$. 11. $a > \frac{3}{4}$. 12. $a < -2$. 13. Ни при каких. 14. $p \in [-2, -\frac{2}{\sqrt{5}}] \cup [\frac{2}{\sqrt{5}}, 2]$. 15. $m \in [-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{13}-1}{4}]$. 16. Не существуют. 17. При $\frac{1}{2} < a \leq 1$. 18. $a \in [-2, -\frac{1}{2}]$. 19. $a > -1$ или $a < -3$. 20. При $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$. 21. При $a \in (-\frac{1}{2}, 0]$. 22. При $a < 0$ нет решений; при $a \geq 0$ имеем $x = a + \frac{1}{2} - \sqrt{a + \frac{1}{4}}$. 23. При $a \leq -\frac{5}{4}$ имеем $x = \left(\frac{\sqrt{a^2-1}-a \pm \sqrt{(\sqrt{a^2-1}-a)^2-4}}{2} \right)^2$. При $a > -\frac{5}{4}$ решений нет. 24. При $|y| > 2\sqrt{2}$ и $0 < |y| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. 25. При $0 < a \leq 1$ имеем $x = \log_2 a$; при остальных a решений нет.

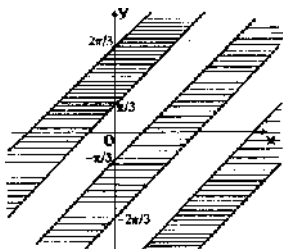


Рис. 15

- УРОК 37. 1. Искомое множество точек (x, y) задается неравенствами $\frac{\pi}{3} + \pi n < x < y < \frac{2\pi}{3} + \pi n + x$, $n \in \mathbb{Z}$. Оно изображено на рис. 15. 2. Искомое множество задается неравенствами $-\frac{\pi}{6} + \pi n < x + y < \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Оно изображено на рис. 16. 3. $-1 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$. 4. $a = 0, b = -1$. 5. $a = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, $b = 1$. 6. $a < \frac{\pi^2}{2}$. 7. $a = 2$. 8. $a = -1$. 9. $a = 0$, $0 < b \leq 1$. 10. $a = b = -2$. 11. $a = 1$. 12. $a = 1$. 13. $a = \pm 1$. 14. $a = 0$, $a = 2$. 15. При $a^{b^2+1} \leq \frac{1}{16}$. 16. При $a^{b^2+1} = \frac{1}{16}$. 17. $0 < a \leq \frac{1}{16}$. 18. $a = 3$, $a = 4$, $0 \leq a < 1$, $a > 5$. 19. При иррациональных a . 20. При $a = 1, b = -1, c = 1$. 21. При $-\frac{1}{12} \leq a \leq \frac{1}{8}$. 22. $-1 \leq p \leq 1$. 23. $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq p \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. 24. Если $a = -2$, то $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{15}{17}$, $x_3 = \frac{17}{15}$. Если $a = -\frac{1}{8}$, то $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{136}$, $x_3 = \frac{1}{120}$. 25. $(-\infty, \frac{1}{2}]$, если $a = 0$, $(-\infty, \frac{1-\sqrt{1-a}}{a}] \cup [\frac{1+\sqrt{1-a}}{a}, +\infty)$, если $0 < a < 1$ и $(-\infty, +\infty)$, если $a \geq 1$. Нужно заметить, что левая часть равна $(ax^2 - 2x + 1)(a^2x^2 + 2ax + a + 4)$. 26. $0 < b < \frac{1}{\sqrt{2}}$. 27. $a = 6n - 1$, $a = 6k + 3$, $a = 6l$, $a = 6m + 2$, $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$.

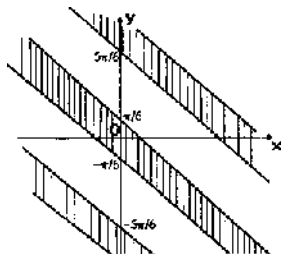


Рис. 16

- УРОК 38. 1. $a \in \{\frac{3}{2}\} \cup \{\frac{5}{3}\} \cup [2, 4)$. 2. $a \in [-2\pi, 0) \cup (2\pi, 4\pi]$. Пусть $u = \sin x \cos y$, $v = -\cos x \sin y$. Перемножив первые два уравнения получим, учитывая третье уравнение, что $uv = (\frac{u+v}{2})^2$, откуда $u = v$. Поэтому $\sin(x+y) = 0$ и $x+y = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Из $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ и первого уравнения следует, что $\sin x > 0$ и $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$. Далее, из $z > 0$ и первого и третьего уравнений получаем $\sin x = \sin y = \frac{1}{z}$, $\cos y = -\cos x = \frac{z-1}{z}$. Итак, нужно

найти все значения a , при которых система $\begin{cases} \cos y = \frac{x+y}{a-\pi}, \\ x = \pi(2m+1) - y, \quad m \in \mathbf{Z}, \\ 0 < y \leq \pi/2 \end{cases}$

имеет единственное решение. Для этого необходимо и достаточно, чтобы неравенства $0 \leq \frac{\pi(2m+1)}{a-\pi} < 1$ выполнялись при единственном целом m . При $a > \pi$ получаем условие $-\frac{1}{2} \leq m < \frac{a}{2\pi} - 1 \leq 1$, т.е. $2\pi < a \leq 4\pi$. Аналогично, при $a < \pi$ получим $-2\pi \leq a < 0$. **3.** $a = -2$, $a = -1$. **4.** $a = 1, 3, \frac{11}{12}$. **5.** $-\frac{13}{5} \leq a \leq 0$. **6.** $\frac{2}{3} - \sqrt{2} \leq a \leq \frac{2}{3} + \sqrt{2}$. **7.** $-3 \pm \sqrt{3}$. **8.** $-\frac{1}{4} \leq a \leq 0$. **9.** $a \leq -10$, $a > \frac{1}{2}$. **10.** $a = -3$, $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$. Нужно заметить, что левая часть неравенства равна $(\sqrt{a^2 + a - 6} \cdot x^2 + a)(\sqrt{a+3} \cdot x - a)$. **11.** $b = -\frac{1}{4}$. **12.** $c = -\frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{8}$. **13.** $a = -\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{32}$. **14.** $a \in (-\infty, +\infty)$, $b = 2$; $a = \pm 1$, $b = -2$. **15.** $b \leq -1$, $b \geq 4$. **16.** $-\frac{1}{3} \leq b \leq \frac{1}{3}$. **17.** $a < -3$, $1 < a < 6$. **18.** $a = 2\pi - 8$, $2\pi - 1$, 2π . **19.** $(6m + \frac{3}{2})\pi < b \leq (6m + \frac{9}{2})\pi$, $m \in \mathbf{Z}$, $m \geq 0$. **20.** $0 < x \leq 4\sqrt{2}$. **21.** $a = 1 - \sqrt{2}$, $a = 5 + \sqrt{10}$. **22.** $p \geq 1$. **23.** $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, 2)$. **24.** $a \leq \frac{1}{5} \log_3 15$, $a \neq -\frac{1}{2}$.

► **УРОК 39.** **1.** $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. **2.** $-\frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. **3.** $\emptyset$. **4.** $\emptyset$. **5.** $\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. **6.** $\emptyset$. **7.** $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. **8.** $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $y = \pm \frac{\pi}{3} + 2(n-k)\pi$, $n, k \in \mathbf{Z}$. При этом в формулах берутся одновременно либо оба верхних знака, либо оба нижних. **9.** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{4} + (k - \frac{n}{2})\pi$, $k, n \in \mathbf{Z}$. **10.** $\emptyset$. **11.** $x = 1$, $y = \pm \frac{1}{4} + n$, $n \in \mathbf{Z}$. **12.** $x = \pm \frac{3}{\pi}$, $y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \mp \frac{3}{\pi}$, $n \in \mathbf{Z}$. **13.** $\begin{cases} x = \frac{5}{4}\pi + 2l\pi, \\ y = \arctg \sqrt{2} + n\pi, \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2l\pi, \\ y = -\arctg \sqrt{2} + n\pi. \end{cases}$, $n, l \in \mathbf{Z}$. **14.** $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi, \\ y = 2l\pi, \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{3}{4}\pi + 2n\pi, \\ y = \pi + 2l\pi, \end{cases}$ $n, l \in \mathbf{Z}$. **15.** $n\pi$, $(-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. **16.** $\frac{3\pi}{2}$. **17.** $-\frac{1}{2}$. **18.** -1 . **19.** $2k+1$, $2k - \frac{1}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. **20.** $x = -1$, $y = 1$. **21.** $x = 1$, $y = -3$. **22.** $x = 0$, $y = 1$. **23.** $x = 1$, $y = 0$. **24.** $x = 1$, $y = 0$. **25.** $(2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi)$, $n \in \mathbf{Z}$. **26.** $x = 2$. **27.** $(-1, 2)$, $(-1, -2)$. **28.** $\emptyset$. **29.** $\emptyset$. **30.** $-1 \leq x \leq 1$. **31.** $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$, $y = \frac{\pi}{2} + l\pi$, $z = \frac{\pi}{2} + m\pi$, $k, l, m \in \mathbf{Z}$. **32.** $x = y = 2$, $z = -2$. **33.** $x = 2$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = \frac{5}{2}$. **34.** $x = 4$, $y = 2$, $z = 40$. **35.** $x = y = -2$, $z = -7$. **36.** $x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \log_3 2$, $y = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \log_3 2$. **37.** $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $y = -1$, $n \in \mathbf{Z}$.

► **УРОК 40.** **1.** $(2n\pi, \pi + 2n\pi)$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 1$. **2.** $x = 6$. Заметить, что в ОДЗ уравнение представляется в виде $(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{2x-5} + x - 4) = 3$. Левая часть возрастает, так что корней может быть не более одного. **3.** $1/2 < x < 1$. **4.** $a = 2$. **5.** $x = t$, $y = 1$, $t \in (0, 1)$. **6.** $\frac{9\pi}{13}$, $\frac{13\pi}{13}$. **7.** $a = -1$. **8.** $p = \frac{1}{2}$, $t = -\pi/4 + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.** $a = -12/5$, $b = -9/5$, $c = -12/5$, $d = -16/5$. Проверьте, что $144 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ad + bc)^2$. Отсюда следует, что $ad + bc = 12$ и $ac = bd$. Теперь можно выразить $b + d$ через b и найти, при каких b это выражение минимально. **10.** $a < -2 - \sqrt{5}$, $a > \sqrt{5}$. **11.** $\frac{\pi}{6}$. **12.** $\log_9 10 > \log_{10} 11$. Формула $\log_x(x+1) = 1 + \log_x(1 + \frac{1}{x})$ показывает, что функция $y = \log_x(x+1)$ убывает. **13.** $x = 1$, $y = 1 + \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. **14.** $2 \pm \sqrt{14 + 4\sqrt{3}}$. **15.** $3 - \sqrt{3}$. Этот корень нужно угадать. Он единственен,

так как левая часть возрастает.

- **УРОК 41.** 1. $\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$, $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. 2. $\pm \sqrt{3}$. Убедиться, что левая часть равна $(x^2 - 3)(x^2 + x + 1)$. 3. $x \geq 1$. Привести неравенство к виду

$$(\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x+2})^2 - 5(\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x+2}) + 6 \geq 0.$$

4. $x = \pm 1, y = \pm 5, z = 0$. 5. $-\sqrt{\frac{7}{5}}$. 6. $k = 7$. Пусть $2n - m = kp$ и $3n + 2m = kl$, где p и l — натуральные числа. Умножив первое равенство на 2 и сложив со вторым, получим $7n = k(2p + l)$. Умножив второе равенство на 2 и вычтя из него первое, умноженное на 3, получим $7m = k(2l - 3p)$. Выведите отсюда, что $k = 7$. 7. $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $y = z = 1$; $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $y = 7$, $z = -9$. 8. $6 - \sqrt{4\sqrt{5} - 8} < x \leq 7$. 9. $3 \leq x < \frac{1+\sqrt{37}}{2}$, $x > \frac{1+\sqrt{37}}{2}$.

10. $(-2, -2)$, $(-4, 0)$, $(0, 4)$. 11. $\frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$, $\frac{3 \pm \sqrt{25 \pm 4\sqrt{30}}}{2}$. Заметить, что левая часть равна $(x^2 - 3x - 10)(x^2 - 3x - 4)(x^2 - 3x + 1)$, обозначить $x^2 - 3x$ через y и в получившемся кубическом уравнении угадать корень $y = 5$. 12. Если $a = 1$, то $x = -1$ или $x = 2$. Если $a = -1$, то $x = -2$, или $x = 1$. Если $|a| \neq 1$, то $x = a + \frac{1}{a}$. 13. 1, 4096. 14. $-3 \pm \sqrt{6}$. 15. $\frac{15 \pm \sqrt{37}}{4} \pm \sqrt{(\frac{15 \pm \sqrt{37}}{4})^2 - 8}$.

Убедитесь в том, что $x = 0$ не есть корень уравнения и разделите обе его части на x^2 . Получится уравнение $(x - 6 + \frac{8}{x})(x - 9 + \frac{8}{x}) = 7$. Остается

обозначить $x + \frac{8}{x}$ через y . 16. $-2 \pm \sqrt{\frac{15 \pm \sqrt{145}}{10}}$. 17. $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{4}$. Сделайте замену

$x = \frac{1}{\sin t}$, где $0 < t < \frac{\pi}{2}$. 18. $-2 \arctg 2 + 2n\pi$, $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 19. $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

20. -4 , -2 . Убедиться в том, что $x = 0$ не корень, разделить уравнение на x^2 и обозначить $x + \frac{8}{x}$ через y .

- **УРОК 42.** 1. $\emptyset$. 2. $x = 0$, $y = \frac{3}{2}$. 3. $\frac{1}{3}$. 4. Нет, не верно. Легко проверить, что $x = \frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{4}$ являются корнями этого уравнения. 5. $0 < x < 1/2$. 6. $-2 < a < -4/5$. 7. $a \in (-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty)$. 8. Если $a < -1$, то $x \leq \frac{2a-1-\sqrt{-4a-3}}{2}$. Если $-1 \leq a \leq -\frac{3}{4}$, то $x \leq \frac{2a-1-\sqrt{-4a-3}}{2}$ и $\frac{2a-1+\sqrt{-4a-3}}{2} \leq x \leq \frac{2a+1-\sqrt{4a+5}}{2}$. Если $a > -\frac{3}{4}$, то $x \leq \frac{2a+1-\sqrt{4a+5}}{2}$. 9. $-1 < a < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 10. $\frac{9}{2}$. Надо заметить, что данная функция есть сумма расстояний от точки (x, y) до точек $(1, -2)$ и $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. 11. $a \neq 1$. 12. $a = 2$. 13. $a = 1$, $a \geq 3$. 14. $a = -\frac{1}{2}$. 15. $a < -1$.

- **УРОК 43.** 1. $2 \arctg \frac{1}{2}$. 2. $\frac{1}{6}ab\sqrt{\frac{a^2}{12} + h^2}$. 3. $\frac{1}{8}p^3\sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 \alpha (4 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{3/2}$. 4. $\frac{224}{3}$.

5. $\pi - \arccos(\cos^2 \alpha)$. 6. $V = \sin \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$. 7. $R = 4$ см. 8. Пусть

R и r — радиусы оснований конуса. Тогда его боковая поверхность равна $\pi(R+r)^2$, а площадь поверхности вписанного шара равна $4\pi Rr$. Оста-

лись очевидные вычисления. 9. 144 см^3 . 10. 3. 11. $6V$. 12. $\frac{3h^2\sqrt{3}}{2}$. 13. $\frac{\sqrt{47}}{24}$.

14. $2(a+b)\sqrt{3(a^2+b^2)}$. 15. $\frac{3h^2\sqrt{3}}{2}$. 16. $a^3/8$. 17. $l^3\sqrt{2}/12$. 18. $8r/3$. 19. $\pi\sqrt{3}/2$.

20. $2R\sqrt[3]{4}$. 21. $2\pi \text{ см}^3$. 22. $(a^3 - b^3)\sqrt{2}/6$. 23. $\frac{8r^3}{9\sqrt{3}}$. 24. 2. 25. 17. 26. $\frac{1}{12}\pi R^2 H$.

27. $\frac{b^4(4R^2 - b^2)\sqrt{3}}{32R^3}$. 28. $k^{2/3}$. 29. $V = \frac{4}{3}\pi H^3$ или $V = \frac{4}{3}(\sqrt{5} - 2)\pi H^3$. 30. $\frac{S \sin^2 2\alpha}{\pi}$.

31. $\frac{4\pi V}{3\sqrt{3}}$. 32. $\arccos \frac{1}{2\sqrt{2}}$. 33. $2\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}$. 34. 20. 35. $\frac{7}{3}b^3 \cos^2 \beta \sqrt{3 - 4 \cos^2 \beta}$.

$$36. \frac{1}{3}a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos(\frac{\alpha}{2} + 30^\circ) \cos(\frac{\alpha}{2} - 30^\circ)}. \quad 37. \frac{\sqrt{3}}{2 \cos \varphi} (a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - b^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}).$$

$$38. \arccos \frac{11}{9\sqrt{2}}. \quad 39. \sqrt[3]{\frac{4V \operatorname{ctg}^2(\alpha/2)}{\pi}}. \quad 40. \frac{\pi h^3}{3 \sin^2 \beta} (\cos^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}).$$

► **УРОК 44. 1.** Из теоремы синусов для трехгранных углов следует, что $\sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma$. Применяя еще первую теорему косинусов для трехгранных углов, получим, что $\cos \alpha = \pm \cos^2 \alpha$. Отсюда следует, что $\cos \alpha = 0$.

2. Построим полярные углы к двум заданным. У них будут равны уже плоские углы. Из этого, очевидно, вытекает их равенство. Значит, и исходные углы равны, будучи полярными к равным полярным.

3. Пусть $SABC$ — данный трехгранный угол с вершиной S . Достаточно доказать, что если угол ASC наибольший из плоских углов, то $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$. В грани SAC выберем такую точку B' , что $\angle ASB' = \angle ASB$ и $SB' = SB$. Следовательно, треугольники ASB и ASB' равны. Можно считать, что точка C лежит на продолжении отрезка BB' за точку B' . Так как $AB' + B'C = AC < AB + BC = AB' + BC$, то $B'C < BC$. Следовательно, угол $B'SC$ меньше угла BSC . Остается заметить, что $\angle B'SC = \angle ASC - \angle ASB$.

4. Надо перейти к полярному углу и воспользоваться тем, что сумма его плоских углов меньше 2π .

5. Пусть K — точка пересечения грани SBC с прямой AC_1 . Согласно задаче 3 имеем $\angle C_1SK + \angle KSB > \angle C_1SB$ и $\angle CSA + \angle CSK > \angle ASK = \angle ASC_1 + \angle C_1SK$. Складывая эти неравенства и учитывая, что $\angle CSK + \angle KSB = \angle SCB$, получаем то, что требовалось.

6. Надо применить первую теорему косинусов к полярному углу.

7. Проведем три плоскости, параллельные граням трехгранного угла, удаленные от них на расстояние 1 и пересекающие противолежащие ребра. Вместе с плоскостями граней они образуют параллелепипед, причем все его высоты равны 1, а значит, площади всех его граней равны. Заметим, что длины ребер этого параллелепипеда равны $\frac{1}{\sin \alpha}$, $\frac{1}{\sin \beta}$ и $\frac{1}{\sin \gamma}$. Следовательно, площади его граней равны $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta \sin \gamma}$, $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha \sin \gamma}$ и $\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}$. Приравнявая выражения для площадей, получим то, что требовалось.

8. Сразу следует из первой теоремы косинусов.

9. Сразу следует из второй теоремы косинусов.

10. Все грани тетраэдра есть равные треугольники тогда и только тогда, когда любые его противоположные ребра равны. Но противоположные ребра тетраэдра служат диагоналями граней параллелепипеда, полученного при достраивании. Эти грани будут прямоугольниками, если и только если их диагонали равны.

11. Пусть M — середина отрезка AB , а P и Q — центры данных окружностей. В плоскости MPQ проведем перпендикуляры к прямой MP через точку P и к прямой MQ через точку Q . Точка их пересечения и будет центром искомой сферы.

12. Пусть O — центр шара, лежащий на высоте DH тетраэдра $ABCD$, а точки P, Q, R, S, T, U — точки касания шара с ребрами AC, BC, AB, BD, CD и AD соответственно. Треугольник DOU прямоугольный с прямым углом U . Из $OD = r\sqrt{3}$, $OU = r$ следует, что $\sin \angle ODU = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\cos \angle ODU = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Треугольник AHD прямоугольный с прямым углом AHD . Поэтому $AD = \frac{DH}{\cos \angle ODU} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot DH$. Аналогично, $CD = BD = AD = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot DH$. Итак,

точка H — центр описанной окружности и одновременно центр вписанной окружности треугольника ABC . Из совпадения этих центров следует, что треугольник ABC правильный, чем все и доказано.

13. Пусть шар касается граней ADC , CDB и ADB тетраэдра $ABCD$ в точках R , P и Q соответственно. Имеем $DR = DP$ и $CR = CP$ как касательные из одной точки к шару. Значит, треугольники CDR и CDP равны по трем сторонам. Значит, угол CDR равен углу CDP . Отсюда следует, что угол DCA равен углу DCB , ибо эти углы дополняют вышеназванные до 90° . Аналогично, углы CDB и CDA равны как дополняющие равны углы DCP и DCR до 90° . Следовательно, треугольники ADC и BCD равны по стороне и двум прилежащим углам. Итак, $AC = BC$ и $AD = BD$. Аналогично доказывается, что $CD = AD$ и $AB = AC$.

14. Доказательство идет так же, как в предыдущей задаче с той только разницей, что точки P, Q, R есть центры описанных окружностей тех же граней, а углы CDR и CDP дополняют до 90° углы DAC и DBC соответственно. Поскольку углы при вершине предположены равными, все остальные утверждения из предыдущего доказательства остаются в силе.

15. Доказательство идет так же, как в задаче 13, в случае, когда P, Q, R есть точки пересечения медиан тех же граней. Из равенства треугольников CDR и CDP следует равенство медиан DR' и DP' в треугольниках ADC и BDC . Значит, $CR' = CP'$ и $AC = AB = 2 \cdot CR' = 2 \cdot CP'$. Заканчивается доказательство так же, как в задаче 13.

16. Точно так же, как в задаче 13, только надо заметить, что угол RDC равен половине угла CDA и угол CDP равен половине угла CDB (точки P, Q, R здесь обозначают центры вписанных окружностей). Все остальные высказывания в доказательстве задачи 13 остаются в силе.

17. Пусть P, Q, R — точки касания шара со сторонами AC, BC и AB соответственно, а точки S, T, U есть соответственно, середины ребер BD, CD и AD . Из того, что P, Q, R — середины соответствующих сторон, следует, что треугольник ABC правильный. Пусть O — центр шара. Тогда он проектируется в центр G треугольника ABC . Пусть OH — перпендикуляр, опущенный из O на плоскость STU , параллельную плоскости ABC . Тогда GH — общий перпендикуляр к плоскостям ABC и STU . Соединим вершину D с точкой G . Пусть она пересечет плоскость STU в точке H' . Простые рассуждения с подобием треугольников показывают, что $UH' = TH' = SH'$, т.е. $H' = H$. Значит, высота, опущенная из вершины D попадает в точку G и все доказано.

18. Вторая теорема косинусов влечет равенство всех плоских углов тетраэдра. Отсюда следует, что все его ребра равны.

19. $\frac{1}{2}AB \cdot AD \sin \gamma$ есть площадь треугольника ABD , а $AC \sin \beta \sin D$ есть длина высоты, опущенной из вершины C .

20. Применить формулу предыдущей задачи.

- УРОК 45. 1. $\frac{ab(\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma)}{2 \sin \beta}$. 2. $\arccos \frac{3}{4}$. 3. Искомая площадь равна $S = \frac{1}{8} \sqrt{4h^2(a^2 + b^2) + a^2b^2}$, $\alpha = \arccos \frac{ab}{16S}$. 4. $6\sqrt{2} + \frac{48\sqrt{2}}{11\sqrt{3} - \sqrt{43}}$. 5. $\frac{17 - \sqrt{17}}{8} \cdot \frac{R}{h}$. 6. $\frac{(3 + 2\sqrt{57} + \sqrt{3})}{4\sqrt{2}}b^2$. Такая плоскость единственна. 7. $\sqrt{2} + \frac{1}{2}$. 8. $2 \arcsin\left(\frac{\sin \alpha + \sqrt{3(\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta)}}{2}\right)$. 9. $\frac{1}{4}(S + \sigma k\sqrt{2 - 2l})$. 10. $\frac{\sqrt{87}}{4}$. 11. $\frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{13} + \sqrt{5}}$. 12. $\frac{2\sqrt{3}}{27}$. 13. Величина угла равна $\frac{\pi}{4}$, искомое расстояние равно $\frac{2}{\sqrt{3}}$. 14. 3.

$$15. \frac{\sqrt{10}}{6}. 16. \frac{2\sqrt{6}}{3}. 17. \frac{\sqrt{9m^2-3a^2+6am}}{a-m}. 18. \frac{a-\operatorname{ctg} 2\alpha}{1-\sqrt{2}\operatorname{tg} \alpha}. 19. \frac{23}{24}V. 20. \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{19}{25\sqrt{3}}.$$

► УРОК 46. 1. $\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}V^2}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}}$. 2. $\sqrt[4]{3}(S \cos \alpha)^{3/2}$. 3. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. 4. 2 : 1. 5. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{18}$.
6. 7:17. 7. Точка P должна совпадать с точкой C . 8. Правильный шестиугольник. 9. $\frac{abc}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}}$. 10. $\frac{a^2\sqrt{3}}{12 \cos \alpha}$. 11. $2r^3 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})$.
12. $l^3 \sin 2\beta \cos \beta \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}$. 13. $\arccos(3/4)$. 14. $\frac{H^3 \sin(\gamma+\beta) \sin(\gamma-\beta) \operatorname{tg} \alpha}{4 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma}$.
15. $V = \frac{a^3}{3}$. 16. 336 см³ и 396 см². 17. $2a^3(\sqrt{2}-1)$. 18. $\frac{8Q}{\sqrt{3}}$. 19. $(S_1 + S_2)h/2$.
20. $\frac{144\sqrt{3}}{5}$ см³.

► УРОК 47. 1. $\frac{25}{16}S$. 2. $\frac{a^2b^2}{12\sqrt{3b^2-a^2}}$. 3. $a^3/4$. 4. Пусть высота трапеции $ABCD$ равна $2h$, высота пирамиды равна H и расстояние от AB до MSN равно p . Если h_1 — высота треугольника SMN , опущенная из вершины S , то надо доказать, что $V = \frac{1}{3} \cdot MN \cdot 2h \cdot H = \frac{4}{3} \cdot MN \cdot h_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot p$. Это равенство равносильно тому, что $\frac{H}{h_1} = \frac{h}{p}$. Убедитесь, что каждое из указанных отношений есть синус угла между плоскостями $ABCD$ и MSN . 5. Пусть O — внутренняя точка многогранника, равноудаленная от оснований. Разобьем на треугольники все боковые грани многогранника так, чтобы вершины их лежали на основаниях. Многогранник разбился на две пирамиды, основаниями которых служат основания многогранника и n треугольных пирамид с вершиной O , основаниями которых служат указанные треугольники разбиения. Объемы первых двух пирамид равны $\frac{1}{6}HS_1$ и $\frac{1}{6}HS_2$. Объем i -го тетраэдра равен $\frac{2}{3}Hs_i$, где s_i — площадь сечения этой пирамиды плоскостью, равноудаленной от оснований многогранника. Из $s_1 + \dots + s_n = S_3$ и выше-сказанного уже следует доказываемая формула. 6. $\frac{1}{6}h(2ab+2a_1b_1+ab_1+a_1b)$.
7. $\frac{1}{3}a^3 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \varphi$. 8. $\frac{3\sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha}{(1+\sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha)^3}$. 9. $\frac{1}{3}$. 10. $\frac{1}{24}(a+b)^2 \cdot \sqrt{a^2-2ab} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$.
11. $\frac{2}{3}l^3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sin \beta \sin 2\beta$. 12. 4. 13. $\frac{1}{12}$. 14. $\frac{3\sqrt{14}}{16}a^2$. Такая плоскость одна.
15. $\frac{5\sqrt{5}}{6}\pi$. 16. $28\sqrt{3}$. 17. $\frac{a^3\sqrt{2}(\gamma+2)}{6\sqrt{\gamma(\gamma+1)}}$. 18. $R = 3\sqrt{\frac{17+\sqrt{201}}{22}}$. 19. 7 : 20, $\frac{9}{4}dS$.
20. $BM = 2\sqrt{2}$.

► УРОК 48. 1. $2\arcsin(\sqrt[3]{2}-1)$. 2. $\frac{5\pi}{6}$. 3. $\alpha = 2\arcsin \frac{1-m}{\sqrt{m^2+2m}}$. Число m может принимать значения из интервала $(\frac{1}{4}, 1)$. 4. $r(1 + \frac{\sqrt{6}}{2})$. 5. $\frac{2}{3}r(3 + \sqrt{3} + \sqrt{9+6\sqrt{3}})$. 6. $r(1 + 2\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \pm \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 + 4\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}})$. 7. $\arcsin(\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}) \sin \frac{\alpha}{4})$. 8. $\frac{\pi t^3 \sin 2\alpha \cos^3 \alpha}{8 \cos(\alpha+\beta) \cos(\alpha-\beta)}$. 9. $\frac{\pi H^2 \cos^4 \alpha}{4 \cos^4 \frac{\alpha}{2}}$. 10. $\frac{R\sqrt{2} \sin(\alpha/2)}{2 \cos \frac{\alpha}{8} \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{8})}$.
11. $\frac{\pi t^3 \sin^2 2\alpha \cos \alpha \sin^2 \beta}{12 \sin^2(\alpha+\beta)}$. 12. $\frac{R \sin \alpha}{2 + 2 \sin(\alpha/2)}$. 13. $\arccos(\cos^2 \alpha + Q \sin^2 \alpha)$, где $Q = \frac{\cos(\beta+\gamma) - \cos(\alpha+\gamma) \cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\gamma) \sin(\alpha+\beta)}$. 14. 9/16. 15. $\frac{2}{3}r(2\sqrt{3}-3)$. 16. 1) $\arcsin(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2})$; 2) $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} - 1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} - 1 + \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}}$. 17. $\frac{a^2 r_2^2 + r_1^2 r_2^2 - 2R^2 r_1^2}{2Rr_1^2}$. 18. $50 \arccos \frac{4}{5}$. 19. $\arccos \frac{\sqrt{12}-3}{3}$.
20. 20 см³.

► УРОК 49. 1. $\frac{3\sqrt{34}}{2}$. 2. $C = (4, -1)$. 3. Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$. Тогда $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\vec{a}, \vec{c})$, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}) = (\vec{a} + \vec{b}, -\vec{b} - \vec{c})$ и $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{b})$. Складывая эти равенства и раскрывая скобки, получаем требуемое.

4. Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{AA_1}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$. Тогда $\overrightarrow{AC_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ и поэтому вектор $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{c}$ и $\vec{a} - \vec{c}$ по условию. Учитывая, что $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) = 0$, получаем, что $0 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$. Аналогично, $|\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$ и длины всех ребер данного параллелепипеда равны. 5. $(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 \iff 4(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. 6. Пусть $a = |\vec{a}|$, $b = |\vec{b}|$ и $c = |\vec{c}|$. Пусть x, y и z — косинусы углов соответственно между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, $\vec{a}$ и $\vec{c}$. Разность между правой и левой частями доказываемого неравенства равна $a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2(abx + bcy + acz)} - \sqrt{a^2 + b^2 + 2abx} - \sqrt{b^2 + c^2 + 2bcy} - \sqrt{a^2 + c^2 + 2acz} = f(x, y, z)$. Докажем, что $f(x, y, z) \geq 0$ для любых x, y, z , по модулю не превосходящих 1. Функция $\varphi(t) = \sqrt{p+t} - \sqrt{q+t} = \frac{p-q}{\sqrt{p+t} + \sqrt{q+t}}$ монотонна по t . Следовательно, при фиксированных y и z функция f достигает своего наименьшего значения при $x = \pm 1$. Фиксируем затем $x = \pm 1$ и z . Тогда f принимает наименьшее значение при $y = \pm 1$. Наконец, зафиксировав $x = \pm 1$ и $y = \pm 1$ получаем, что f достигает наименьшего значения, когда числа x, y, z равны ± 1 . В этом случае векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны и требуемое неравенство легко проверяется. 7. Искомая сумма квадратов равна 8. Возьмем произвольную плоскость. Пусть $\vec{p}$ — вектор единичной длины, перпендикулярный к этой плоскости. Если α, β и γ — углы, которые этот вектор составляет с векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AA_1}$. Легко проверить, что $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ и что сумма квадратов проекций ребер равна $4(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) = 8$. 8. Лежит. 9. $\vec{p} = \{2, -1, 1\}$. 10. Пусть $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Тогда $\vec{m}_a = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$ и $\vec{m}_b = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$. По теореме косинусов имеем $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$. Расписать условие $(\vec{m}_a, \vec{m}_b) = 0$ с применением последнего равенства. 11. $\frac{1}{\sqrt{10}}$. 12. 120° . 13. $A'(1, 0, -1)$. 14. Указанная точка делит каждую медиану в отношении 3 : 1, считая от вершины. Доказать, что все медианы пересекаются в одной точке можно, взяв три вектора, исходящих из одной из вершин тетраэдра и выразив через них вектор с началом в выбранной вершине и концом в точке, делящей каждую из медиан в вышеуказанном отношении. Убедитесь, что данный вектор будет один и тот же для всех медиан. 15. Воспользоваться тем, что вектор $\overrightarrow{AM}$ может быть выражен через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, выразить векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ через векторы, указанные в условии, и заметить, что $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM}$. 16. $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. 17. Записать векторы, параллельные названным прямым, и доказать, что их скалярное произведение равно нулю. 18. $\frac{\pi}{4}$. 19. Не пересекаются. 20. Пересекаются в точке $(1, -2, 0)$.

- **УРОК 50.** 1. Внутренность шара, ограниченного данной сферой. 2. Пусть B — проекция точки A на прямую l . Искомое ГМТ есть пересечение сферы, построенной на отрезке AB как на диаметре с плоскостью, проходящей через точку A и перпендикулярной прямой l . 3. Если прямые параллельны или совпадают, то искомое ГМТ есть две параллельные плоскости. Если они не параллельны, то искомое ГМТ есть бесконечная труба (вернее, ее поверхность) с прямоугольным сечением. Ось этой трубы перпендикулярна каждой из прямых и проходит через точку O . Диагонали прямоугольника, являющегося сечением трубы, равны $2l$, где l — постоянная величина из условия. 4. Пусть R и r — радиусы данных сфер ($R > r$), а точки A и B — их центры, $AB = a$. Пусть точка N на отрезке AB взята так, что

$AN = \frac{1}{2}(\frac{R^2}{a} + a)$. Тогда искомое ГМТ есть кольцо, лежащее в плоскости, перпендикулярной к AB и проходящей через точку N . Центры окружностей этого кольца совпадают с N . 5. Две окружности на данной сфере, пересекающиеся в точках A и B . Точки A и B исключаются. 6. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC и L — основание высоты, опущенной из A на BC . Искомое ГМТ есть построенная на HL как на диаметре окружность, плоскость которой перпендикулярна плоскости ABC . 7. Пусть D — точка, симметричная C относительно середины отрезка AB . Если угол C тупой, то искомое ГМТ пусто. Если он прямой, то оно состоит только из точки D . Если угол C острый, то искомое ГМТ есть сфера с центром в точке D и радиусом $\sqrt{\frac{CD^2 - AB^2}{2}}$. 8. Эти плоскости высекают на плоскости π треугольник. На этой плоскости надо взять центр вписанной и центры невписанных окружностей этого треугольника. Искомое ГМТ есть четыре прямых, перпендикулярных плоскости π , каждая из которых проходит через одну из указанных точек. 9. Пусть k и l — данные прямые, и $A \in k$. Пусть B — точка пересечения прямой l с плоскостью π , проходящей через точку A и ей перпендикулярной. Искомое ГМТ есть окружность, построенная на диаметре AB в плоскости π . 10. Искомое ГМТ есть цилиндр, диаметрально противоположными образующими которого являются прямая l и прямая t , проходящая через точку A параллельно l ; прямые l и t следует исключить. 11. Через каждую из вершин данного треугольника ABC нужно провести две прямые, перпендикулярные сторонам, сходящимся в этой вершине. Искомое ГМТ есть внутренность шестиугольника, ограниченного этими прямыми. 12. Две плоскости, каждая из которых проходит через одну из биссектрис углов, образованных данными прямыми в плоскости, их содержащей и перпендикулярных к последней. 13. Искомое ГМТ есть часть сферы радиуса $\sqrt{2}R$ с центром в начале координат, ограниченной плоскостями $x = R$, $y = R$, $z = R$. 14. Пусть P и Q — точки пересечения продолжений противоположных сторон четырехугольника $ABCD$. Искомое ГМТ есть сфера с диаметром PQ . Точки ее, лежащие в плоскости данного четырехугольника, следует исключить. 15. Пусть K и L — точки пересечения продолжений диагоналей AC и BD с прямой PQ . Искомое ГМТ есть сфера с диаметром KL . Точки этой сферы, лежащие в плоскости $ABCD$, следует исключить. 16. Пусть O — центр окружности, вписанной в какое-либо осевое сечение конуса. Искомое ГМТ есть боковая поверхность конуса с вершиной O и образующей OA , где A — какая-нибудь точка на окружности основания исходного конуса. 17. Внутренность шара, ограниченного данной сферой. 18. Все пространство. 19. Внутренность данного трехгранного угла. 20. Внутренность данного трехгранного угла.

2. Ответы к вариантам за 1970–2016 годы

1970 год

Механико-математический факультет. 1. $\frac{\pi}{6} + 2n\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $x \neq \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, $x \neq \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $x_1 = \sqrt{6}$, $y_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}$; $x_2 = -\sqrt{6}$, $y_2 = -\frac{\sqrt{6}}{3}$.

3. 3 минуты. 4. $AC = 2\sqrt{5}$. 5. $SE = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{6} \sin \varphi}$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $x = \pm \arccos(\sqrt{a+3}) + n\pi$, $-3 \leq a \leq -2$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $x \geq \frac{1}{6}$. 3. $30 < v \leq 33,6$.

4. $B = \frac{1}{2}(\pi - \alpha + \arccos(\frac{\pi}{2} \sin \alpha - \cos \alpha))$, $C = \frac{1}{2}(\pi - \alpha - \arccos(\frac{\pi}{2} \sin \alpha - \cos \alpha))$, $0 < \alpha \leq 2 \arcsin \frac{2}{\sqrt{\pi^2 + 4}}$. 5. $\cos x = 1 - \sin \frac{\beta}{2} \cdot (\sin \frac{\beta}{2} - \sqrt{\sin^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}})$.

Физический факультет. 1. $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $\frac{3-\sqrt{69}}{2} < x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{3+\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{69}}{2}$. 3. $\frac{8\pi}{\pi(3-\sqrt{2})-4}$. 4. $\frac{1}{6}$. 5. Второй автомобиль остановился раньше, $a_2 = -8 \frac{a}{\pi \kappa^2}$.

Химический ф-т и отд. геофизики геологического ф-та. 1. 8 час 45 мин. 2. $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. 3. $0 < x \leq \frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3} \leq x < \pi$. 4. $\frac{3}{2\sqrt{2}}$. 5. $\frac{7}{17}$.

Отд. общей геологии геологического ф-та. 1. $\frac{2b(b+a)}{b-a}$. 2. $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3 + \log_{3/4}}$. 3. $0 < x < \frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$; $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{4} < x < \frac{4}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$. 4. С первого поля — 18 ц, со второго — 15 ц. 5. 12,5 см.

Отд. биологии биолого-почвенного ф-та. 1. $x = \pm \frac{\pi}{8} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $\sqrt{6} < |x| \leq 3$. 4. $PQ = \frac{3ab}{2a+b}$. 5. $a = 1$, $b = -1$.

Географический ф-т и отд. почвоведения биолого-почвенного ф-та. 1. $v = 20$ м/сек. 2. $x_{1,2} = \pm \sqrt{\log_2 3}$. 3. $\frac{\Delta \text{температуры}}{\Delta \text{глубина}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta}$. 4. $\alpha = -4$. 5. $\frac{\pi}{3} + n\pi < x < \frac{2}{3}\pi + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отд. полит. экономии экономич. ф-та. 1. $(10 + 10\sqrt{1 - \frac{3}{7+\sqrt{19}}}) \times (10 - 10\sqrt{1 - \frac{3}{7+\sqrt{19}}}) \times \frac{7+\sqrt{19}}{2}$. 2. $1 + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha (1 + 3 \operatorname{tg} \alpha)^2 - \frac{7}{8} \cdot \sqrt{a^2 - 16}$. 3. $x = 2$. 4. $z = -1 - \frac{3}{4}i$.

Отд. планирования и экономич. кибернетики экономич. ф-та. 1. $\frac{1}{3}$. 2. $\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$. 3. $0 < x < 1$, $4 \leq x \leq 2^{1+\sqrt{3}}$. 4. $P_3(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{2} + x$.

Отд. структурной и прикладной лингвистики филологич. ф-та
1. Первая байдарка прошла 1 км за 230 сек. 2. $x = \frac{\pi}{2}$. 3. $2 \leq x < 2,5$. 6. $(12,5)^2 \arcsin \frac{7}{25} - 42$. 7. 17 способов.

Факультет психологии. 1. Скорость течения — 7,5 км/час; второй пароход доходит от А до К за 20 мин. 2. $a = -9\frac{1}{9}$. 3. $\frac{1}{2} < x < 1$. 4. $\frac{4}{9} \sqrt{3} \pi \cdot \operatorname{ctg} \alpha (\operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^9 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^{15} \frac{\alpha}{2})$.

1971 год

Механико-математический факультет. 1. $x = \frac{4}{3}$, $x = 3$. 2. $\frac{\pi}{6} < x < \frac{3}{4}\pi$; $\frac{5}{6}\pi < x \leq \pi$. 3. $\frac{2}{3}$. 4. $\alpha = 0$, $\alpha = 1$. 5. $\frac{8}{5}R^2$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики. 1. $x = -10^{-\sqrt{26}/3}$, $y = \log_2(\frac{5+\sqrt{26}}{3})$. 2. $0 \leq x < \frac{\pi}{12}$; $-\frac{7}{12}\pi < x \leq -\frac{\pi}{2}$. 3. Продано 3 комплекта; в комплекте 7 синих карандашей и 3 красных. 4. $\frac{1}{2}d$. 5. $V = -\frac{2}{3}h^3 \cdot \frac{\sin^3(\alpha/3)}{\cos(\alpha/3)\cos(2\alpha/3)}$.

Физический факультет. 1. $x = (-1)^n \arcsin(1 - \sqrt{2}) + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$. 3. $a = 14 \frac{\pi \mu}{\mu \alpha c}$. 4. $S = \frac{3}{32}b\sqrt{4h^2 + a^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2h}{a}$. 5. $\frac{ab}{c^2}$.

Химический ф-т и отд. геофизики геологического ф-та. 1. $\frac{9\sqrt{3}}{4}r^2$. 2. $x = 1$, $x = 2$. 3. 600 м^3 . 4. $\frac{\pi}{6} + 2n\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 5. $\frac{9\pi r^3}{5\sqrt{10}}$.

Отд. общей геологии геологического ф-та. 1. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$, $y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n, k \in \mathbf{Z}$. 2. 450 и 550. 3. $a = \frac{1}{2}$. 4. $r = 24 \text{ см}$. 5. $-\frac{3}{2} < x < -\frac{23}{16}$.

Отд. биологии биолого-почвенного ф-та. 1. $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 64$. 2. 2. 3. 10 часов. 4. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{24} + \frac{n\pi}{4}$. 5. $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ (или $2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$).

Географический ф-т и отд. почвовед. биолого-почвенного ф-та

1. 15 стр. 2. $2(b + 2a)$. 3. $x_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x_2 = \pm \frac{2}{3}\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 4. $\frac{11}{10}$. 5. $2 < x \leq 6$.

Отд. политической экономии экономического ф-та. 1. $p = 17\%$. 2. $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < 1$, $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 3. $\frac{\pi}{6} + 2n\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 4. 462462. 5. $x_1 = \frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}+1} \cdot R$, $x_2 = \frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-1} \cdot R$.

Отд. планирования и экономич. кибернетики экономич. ф-та

1. Первый экскаватор работал 3 дня, второй — 2 дня. 2. $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $a_7 = 4\frac{4}{11}$. 4. $x_{\min} = (\sqrt{R} + \rho - r - \sqrt{R})^2$. 5. $6 \cdot 7^4 = 14406$.

Отд. структурной и прикладной лингвистики филологич. ф-та

1. 39. 2. $\frac{2l}{\pi}$. 3. $\pm 2, \pm 3, \pm 11, \dots, \pm 31$. 4. $a < -2$. 5. Все действительные и все чисто мнимые. 6. Если $a = 0$ и $b \neq 0$, или $a \neq 0$ и $b = 0$, то нет решений. Если $a = b = 0$, то либо $x = 0$ и y любое, либо $y = 0$ и x любое. Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $x = \frac{b^8}{a^{11}}$, $y = \frac{a^7}{b^5}$.

Факультет психологии. 1. 3. 2. P совпадает либо с точкой C , либо с точкой C' . 3. $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0$. 4. 11 деталей A и 9 деталей B . 5. $a = 1$.

1972 год

Механико-математический факультет. 1. $0 < x \leq \frac{1}{2}$, $x > 1$.

2. $v_{\text{пешехода}} = 3 \text{ км/час}$, $v_{\text{велосипедиста}} = 15 \text{ км/час}$. 3. $R = 12,5 \text{ м}$. 4. $H = \sqrt{3}$.

5. $a = 2$, $b = 4$, $c = 64$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики. 1. $x_{1,2} =$

$1 \pm \sqrt{1 + \log_3(2 + \sqrt{3})}$. 2. $-\frac{\pi}{2} + n\pi < x < n\pi$, $\frac{\pi}{3} + n\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. $\frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{3}(2 + \sqrt{3})$. 4. $\arctg(\frac{1}{6}\sqrt{3}(\sqrt{5} + 1))$. 5. При $\alpha = \frac{2 + \tg^2 1}{2 \tg 1 - 1}$ имеем

$x = \pm \frac{\sqrt{11}}{2}\pi$, $x = \pm \frac{\sqrt{35}}{2}\pi$; при $a = -1$ имеем $x = \pm \sqrt{9\pi^2 - (\pi + \arcsin \frac{\pi}{4})^2}$ или $x = \pm \sqrt{9\pi^2 - (2\pi - \arcsin \frac{\pi}{4})^2}$.

Физический факультет. 1. $x = n\pi$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. $\frac{1}{100} < x < 10$. 3. 28° и 56° . 4. $1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$. 5. $\sqrt{3}$.

Химический факультет. 1. 1 км/час . 2. $x = 1$. 3. 45° , 45° , 90° .

4. $4R^2\sqrt{2}/\sin \alpha$. 5. $2n\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $\frac{\pi}{2} + 2n\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2n\pi$, $\frac{4}{3}\pi + 2n\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$, $\frac{5}{3}\pi < x < 2\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отделение общей геологии геологического ф-та. 1. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} - n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $x = 2^{10/3}$, $y = 3^{-5/3}$. 3. 15 км/час . 4. $x < 1$. 5. $2,4 \text{ см}^2$.

Отделение геофизики геологического ф-та. 1. 21 колхозник. 2. $\pm \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. $x < 2$, $\frac{3+\sqrt{5}}{2} < x < 3$. 4. $32\sqrt{2} \text{ см}^2$. 5. $R = 6 \text{ см}$ в случае, когда первые два шара касаются третьего внешним образом.

Биолого-почвенный факультет. 1. 9 час. 2. -1 . 3. $3^{3/2}$. 4. $2k + 1$, $k = 1, 2, 3, \dots$; $-\frac{1}{6} + \frac{2}{3}l$, $l = 1, 2, 3, \dots$. 5. $\frac{b(3a+b)}{2(a+b)(2a+b)} \cdot S$.

Географический факультет. 1. 6 ящиков с грушами в первой машине и 15 ящиков с грушами во второй машине. 2. $x_1 = \pi$, $x_2 = \frac{7}{6}\pi$. 3. $1 < x < 49$, $0 < x < \frac{1}{\sqrt{7}}$. 4. $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$. 5. $S_{ABC} = \frac{2R^2 \sin^3 \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

Отд. политической экономии экономического ф-та. 1. $\log_2 22 > \log_3 75$. 2. Прямая $y = 0$ и точки $(0, -4)$ и $(5, -\frac{2}{3})$. 3. 80 коп. 4. $S = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 1$. 5. $-1 < x < \frac{1}{2}$, $x < -\frac{5}{2}$.

Отд. планирования и экономич. кибернетики экономич. ф-та

1. Вдоль шоссе 1000 метров и 1500 метров перпендикулярно к шоссе. 2. $\tg x = \pm \sqrt{3}$. 3. Прямая $x = 1$ и точка $(-\frac{1}{9}, -\frac{2}{9})$. 4. Через точки A, B и D проведем окружность с центром O . Тогда O — середина диагонали BD , так как угол A прямой. Из $OH \perp AC$ следует, что $EH = HF$ как проекции радиусов на одну прямую. По условию $AE = FC$, откуда получаем, что $AN = HC$. Так как H — середина AC и $OH \perp AC$, получаем, что точка C лежит на окружности и $\angle C = 90^\circ$.

Отд. структурной и прикладной лингвистики филологич. ф-та

1. 4 руб 32 коп. 2. 3317760. 3. $x = 3$. 4. $x_1 = \frac{1}{2\sqrt{16}}$, $x_2 = \frac{3}{2}$. 5. $\tg 2\alpha = \frac{\sqrt{13}}{7}$.

Факультет психологии. 1. $\frac{1}{6} \text{ см}^3$. 2. $x = \arctg \frac{1}{4} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. $-2, -1, 0, 1$. 4. $\frac{7}{27}$.

1973 год

Механико-математический факультет. 1. $\frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $\frac{5}{6}\pi + 2n\pi$, $\frac{2}{3}\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $S = 6$. 3. $-1 < x \leq \sqrt{2}$. 4. $S = \frac{2pq \cos(\alpha/2)}{p+q}$. 5. $(-1, -\frac{3}{2})$ и $(0, \frac{1}{2})$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \\ y = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + k\pi, \end{cases} \begin{cases} x = \frac{5}{6}\pi + 2n\pi, \\ y = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi, \end{cases} n, k \in \mathbf{Z}$. 2. $\frac{13}{50} \leq x < 9 + 4\sqrt{5}$.
3. $\frac{b^2(h^2 - a^2)}{b^2 + a^2}$. 4. $SA_1 = \sqrt{10}$, $SB_1 = \sqrt{11}$, $SC_1 = \sqrt{12}$. 5. $\frac{7}{3}$.

Физический факультет. 1. $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $(-1)^{n+1} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. ± 1 . 3. -10 , 0 . 4. 75° . 5. $\frac{3}{2\sqrt{2}}R$.

Химический факультет. 1. 60 руб, 90 руб. 2. $0 < x \leq 1$, $x \geq 2$. 3. $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$. 4. $S = 3\sqrt{15}(\sqrt{5} + 1)^2$, $\alpha = 2 \arcsin \sqrt{\frac{2}{5}}$. 5. $\alpha = 2 \arcsin \frac{3}{5}$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$.

Отделение общей геологии геологического ф-та. 1. $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{2}$. 2. $x = -2$. 3. $9 + \sqrt{11}$ км/час. 4. $\frac{8}{25}\sqrt{6}$ см³. 5. Пусть $a = \arcsin(\frac{3}{\sqrt{14}} - \sqrt{2})$, $b = \arccos \frac{1}{\sqrt{14} + \sqrt{2}}$. Тогда решениями будут пары (a, b) , $(a, -b)$, $(\pi - a, b)$, $(\pi - a, -b)$.

Отделение геофизики геологического ф-та. 1. $x = 1$, $y = (-1)^n \frac{\pi}{6} - 1 + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $x > -2$. 3. $9 + \sqrt{11}$ км/час. 4. $\frac{1}{2} < x < 2$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{3}{2}$. 5. $R = \sqrt{2}$ см.

Биологический факультет. 1. 6 час. 2. $-\frac{\pi}{4} + n\pi$, $(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $(-1)^n \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. 4. $\frac{5}{12}$. 5. $\alpha \geq 2$.

Факультет почвоведения. 1. 40 м, 20 м. 2. Первое выражение больше. 3. $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 4. $\sqrt{3}$. 5. $\frac{2}{3}$, -1 .

Географический факультет. 1. 14 м/час, 18 м/час. 2. 6. 3. $D = \sqrt{10}$. 4. $x = -2 + \sqrt{4 - 2\log_3 5}$. 5. $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

Отд. политической экономии экономического ф-та. 1. 32,5 км/час. 2. $\frac{a}{2} \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}$. 3. $-\frac{5}{8}$. 4. $\frac{3}{2}\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 5. $\frac{1}{2} < x < 1$.

Отд. планирования и экономич. кибернетики экономич. ф-та

1. $-\frac{1}{6} \operatorname{tg} \varphi$. 2. $x_1 = 3$, $y_1 = \frac{7}{2}$; $x_2 = -3$, $y_2 = -\frac{7}{2}$. 3. $\frac{1}{2}(c + h)S$.

Отд. структурной и прикладной лингвистики филологич. ф-та

1. 6. 2. $n(n-1) + 2$. 3. -7 . 4. Нельзя. 5. $x = 4$.

Факультет психологии. 1. 6 м. 2. $\pm \frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $a\sqrt{\frac{3}{70}}$. 4. 1, 2.

1974 год

Механико-математический факультет. 1. $-\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. $-1 \leq x \leq 3$, $x \neq 1$. 3. $S_{ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$. 4. $V_{ABCD} = 36$. 5. $\alpha = 100$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики. 1. $x = \frac{1}{2} + \frac{7}{4}\pi$. 2. $a \leq -\sqrt{7}$, $a \geq \sqrt{7}$. 3. $x = 2$, $2\frac{161}{163} \leq x \leq 3$. 4. $\frac{2}{15}V$, $2V$. 5. 400 см^3 .

Физический факультет. 1. $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$, $x = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}$. 3. $x_1 = 2^{-8}$, $x_2 = 2^{27}$. 4. $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. 5. $\frac{a^3\sqrt{2}}{54}$.

Химический факультет. 1. $\frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. Верно. 3. $\alpha = \frac{5\sqrt{13}}{12}$. 4. Билет в цирк стоит 1 руб, билет в кино — 20 коп. 5. $R = \frac{Hr}{r + \sqrt{r^2 + 4H^2}}$.

Отделение общей геологии геологического ф-та. 1. $x = \frac{5+\sqrt{41}}{2}$. 2. $x < 0$, $\log_3 2 < x < 1$. 3. $\arccos \sqrt{\frac{4}{7}} + n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$. 4. $\varphi = \arctg(\frac{1}{\cos \alpha})$. 5. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{169}{792}$.

Отделение геофизики геологич. ф-та. 1. $x \leq -4$, $-2 \leq x \leq -1$, $x \geq 1$. 2. $x_1 = -2 - \sqrt{5}$, $x_2 = \sqrt{\frac{7}{3}}$. 3. $k = 1$, $x = \tg(\frac{\pi}{4}(1 - \sqrt{7}))$, $y = \cos(\frac{\pi}{4}(1 + \sqrt{7}))$. 4. $V = \frac{4}{9}\pi \text{ см}^3$. 5. $S = \frac{2}{3} \text{ см}^2$.

Биологический факультет. 1. 11 час 55 мин. 2. $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $MF = \frac{a\sqrt{17}}{12}$. 4. $x > 1$, $-1 < x < 0$. 5. $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + n\pi$, $\frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

Факультет почвоведения. 1. $AB = 150 \text{ км}$. 2. $x_1 = 2$, $x_2 = 8$. 3. $x = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 4. $\frac{1}{2} < a < 1$. 5. $S = 3\sqrt{15}$.

Географический факультет. 1. 6 км/час. 2. $\frac{3\pi}{8}$, $\pm \frac{5}{12}\pi + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $x = -2$, $y = -1$. 4. $S = \frac{7-4\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \cdot (\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3})$. 5. $\frac{1}{5} < x < \frac{1}{4}$, $\frac{7}{4} < x < \frac{9}{4}$, $-\frac{4}{5} < x < -\frac{1}{4}$.

Отд. политической экономии экономического ф-та. 1. 60 км/час, 90 км/час, $S = 900 \text{ км}$. 2. $x = 3$. 3. $\frac{AC}{NC} = \frac{3}{4}$. 4. $h = 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

Отд. планирования и экономич. кибернетики экономич. ф-та

1. $-\sqrt{2} + \sqrt{5}$. 2. 3600 слов. 3. $\frac{5}{6}\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 4. $\frac{21}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}$. 5. $|h| \geq 2 + \sqrt{5}$; $|h| \leq \sqrt{5} - 2$ (при $h = 0$ уравнение имеет корни 0 и -1 , оба кратности 2).

Отд. структурной и прикладной лингвистики филологич. ф-та

1. 1 час. 2. $x = 2$. 3. $\frac{1}{2} \cdot (-1)^n \arcsin(\sqrt{3} - 1) + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. 4. $\frac{1}{4} < x \leq 2$, $-\frac{5}{8} \leq x \leq -\frac{17}{4}$. 5. $\frac{6 \sin(\alpha/2)(1 - \frac{4}{3} \sin^2(\alpha/2))}{(2 \sin(\alpha/2) + \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2(\alpha/2)})^3}$.

Факультет психологии. 1. 32 км, 100 км, 240 км, 628 км. 2. $\frac{23}{90}$. 3. $x = -\frac{5}{12}$, $y = -\frac{1}{6}$. 4. $a = 1$, $b = 5$.

1975 год

Механико-математический факультет. 1. $-10 \leq x \leq 5$. 2. $(\sqrt{\pi}, \pm\sqrt{\pi})$, $(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \pm\frac{\sqrt{7\pi}}{2})$. 3. $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$. 4. $\frac{7}{3}$. 5. $\frac{\pi}{6}$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики. 1. $x \leq -5$, $1 \leq x < \frac{8+\sqrt{22}}{3}$. 2. $\begin{cases} x = -(2/7), \\ y = \pm \arcsin(2/\sqrt{7}) + n\pi, \end{cases} \begin{cases} x = -(1/7)(2+3\pi), \\ y = \pm \arcsin \sqrt{\frac{4-\pi}{7}} + n\pi, \end{cases}$
 $n \in \mathbf{Z}$. 3. $\frac{1}{2}(d - \sqrt{d^2 - c^2})$, $\frac{1}{2}(d + \sqrt{d^2 - c^2})$. 4. 42 тонны. 5. $2\sqrt{3}r^2$.

Физический факультет. 1. $x = -2 + n\pi$, $x = -\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. 3. $x < 5/2$, $\log_2 6 < x < 3$. 4. $\frac{25}{12}\sqrt{7}a^2$. 5. $a\sqrt{\frac{439}{108}}$.

Химический факультет. 1. $2 \leq x < 18$. 2. На второй остановке вошло на одного человека больше, чем вышло. 3. $\frac{25+10\sqrt{10}}{9}$. 4. $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 5. $3(2m+1)\pi - \frac{3}{2}\pi < b \leq 6(m+1)\pi - \frac{3}{2}\pi$, $m = 0, 1, 2, \dots$

Отделение общей геологии геологического ф-та. 1. $x = \pm\frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. 50 км/час. 3. $-\frac{3}{2} < x < 1$, $\frac{3\sqrt{10}-3}{2} < x < \frac{3\sqrt{100}-3}{2}$. 4. $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ см². 5. $-5 \leq x < -4 + \sqrt{4\sqrt{5}-8}$.

Отделение геофизики геологического ф-та. 1. 0, 2. 2. $x < 0$, $\frac{7}{12} < x < \frac{2}{3}$. 3. $\begin{cases} x = \pi/4, \\ y = \pi - \arctg(1/\sqrt{2}), \end{cases} \begin{cases} x = 3\pi/4, \\ y = \pi - \arctg(1/\sqrt{2}). \end{cases}$ 4. $\frac{R\sqrt{3}}{8}$ см. 5. $\frac{a\sqrt{22}}{8}$ см.

Биологический факультет. 1. 4 м³/час. 2. $p = -\frac{1}{2}$. 3. $\angle CBD = 30^\circ$. 4. $x = 2n\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 5. $n = 6, 7, 8$.

Факультет почвоведения. 1. $\frac{1}{3}$ часть. 2. $x = \pm\frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{5}{3}$. 4. $S = 4 + \frac{8}{\sqrt{3}}$.

Географический факультет. 1. $\frac{1}{9}$. 2. $x = \pm\frac{\pi}{8} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $x = 4$. 4. $\frac{3\sqrt{3}(\sqrt{13}-1)}{32\pi}$. 5. $x = \frac{3}{4}\pi$, $y = 5 - \frac{3}{2}\pi$.

Отд. политической экономии экономического ф-та. 1. 1 час 20 мин. 2. $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $x = 3$, $y = -2$. 4. $r = \frac{P}{8} \sin \alpha$. 5. $x = 0$.

Отд. планирования и экономич. кибернетики экономич. ф-та

1. Нет решений. 2. $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}$. 3. $3 \leq x < \frac{1+\sqrt{37}}{2}$, $x > \frac{1+\sqrt{37}}{2}$. 4. 3 лисы, 6 леопардов, 1 лев.

Отд. структурной и прикладной лингвистики филологич. ф-та

1. В три раза. 2. $x = 1$. 3. $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x = -\arctg \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 4. 128π . 5. $R = \frac{5}{\sqrt{3}}r$.

Факультет психологии. 1. 5,4,8 дней. 2. $S_{BCD} = (150 + \frac{250}{\sqrt{3}})$ см². 3. $x = \arctg(1/2) + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 4. $4 - \sqrt{3} \leq x < 3$, $x \geq 4 + \sqrt{3}$. 5. $x = 1$, $y = 37$.

1976 год

Механико-математический факультет. 1. $x = \frac{4}{3}\pi + 4n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. $-\log_3 2 \leq x < 0$, $\frac{1}{2} \log_3 < x \leq 1$. 3. $S = \frac{\sqrt{3+1}}{8} \approx 0,34$. 4. $\cos \alpha = \frac{1}{7}$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики. 1. Площадь треугольника больше площади квадрата. 2. $x = 0$, $y = 2$. 3. $x = -\arctg 2 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 4. $S = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{7}$. 5. $0 < a < \frac{4}{5}$, $a > \frac{72-16\sqrt{14}}{5}$.

Физический факультет. 1. $x = n\pi$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $x > 3$. 3. $x = 0$, $y = -2$ или $x = 2$, $y = 0$. 4. $AD = \sqrt{ab}$. 5. $EF = 2$ см.

Химический факультет. 1. 63 км/час. 2. $x < -\frac{1}{2}$, $\frac{1-\sqrt[4]{14}}{2} < x < \frac{\sqrt[4]{14}-1}{2}$, $x > \frac{1}{2}$. 3. $\frac{h}{\sqrt{2}}$. 4. $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 5. $\sqrt{6}$ см.

Отделение общей геологии геологического ф-та. 1. $x_1 = \frac{1}{8}$, $x_2 = 2$. 2. 2 м³/час, 1 м³/час. 3. $x = \pi + 2n\pi$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. 4. $x = 74 - 14\sqrt{22}$, $y = -27 + 4\sqrt{22}$. 5. $AC = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Отделение геофизики геологического ф-та. 1. $v = 7$ км/час. 2. $x = \frac{\pi}{4} + 2l\pi$, $y = \arctg 2 + k\pi$, $l, k \in \mathbb{Z}$. 3. $9 < x < \frac{39}{4}$, $x \neq \frac{19}{2}$. 4. $AC = \sqrt{45}$, $BD = \sqrt{37}$. 5. $-\frac{5}{16} < p \leq -\frac{1}{16}$.

Географический факультет. 1. 10 деталей в час. 2. $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. 3. $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $x = \pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 4. $\frac{3}{2} < x < \frac{5-\sqrt{3}}{2}$, $x > \frac{7}{2}$. 5. $2S$.

Биологический факультет. 1. $x = \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $2 < x < 4$. 3. 8 : 1 : 3. 4. $\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}$.

Факультет почвоведения. 1. $v = 6$ км/час. 2. $\frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{2}}{\cos \alpha} - 1$. 3. $x = \pm(\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2})$, $n \in \mathbb{Z}$. 4. $\alpha = n\pi - \frac{\pi}{12} \pm \frac{\pi}{8}$, $n \in \mathbb{Z}$. 5. $x > \sqrt{3}$.

Отд. политической экономии экономического ф-та. 1. Тракторы работали вместе 6 часов. 2. $x = 2 \cdot (-1)^n \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + 2n\pi$, $x = \pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. $r_1 = \frac{20}{9}\sqrt{3}(4 - \sqrt{7})$, $r_2 = 4(2\sqrt{3} - \sqrt{7})$. 4. $(\pm 2, \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2})$, $n \in \mathbb{Z}$. 5. $1 < x \leq 4$.

Отд. планирования и экономич. кибернетики экономич. ф-та

1. $10^{-\sqrt{3}} < x < 10^{-\sqrt{2}}$, $10^{\sqrt{2}} < x < 10^{\sqrt{3}}$. 2. $(\frac{\pi}{6}, -\pi)$; $(\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6})$; $(\frac{\pi}{6}, 0)$. 3. $S_{ABC} = 8\sqrt{3}$. 4. $\min S_{ASB} = 16,4$ м².

Отд. структурной и прикладной лингвистики филологич. ф-та

1. Для изготовления одной партии шин для грузовых автомобилей требуется 27 операций. 2. $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$. 3. $x = \frac{13}{12}\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 4. $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 5. $V_{\text{призмы}} : V_{\text{пирамиды}} = \frac{32\sqrt{21}}{147}$.

Факультет психологии. 1. Первый рабочий выполнит работу за 2 часа, второй — за 4 часа. 2. $r = 8$ см. 3. $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = 10$. 4. $x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + n\pi$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 5. $(0, \frac{1}{2})$.

1977 год

Механико-математический факультет. 1. $x < 1$, $x = 2$. 2. $BC = 1$, $AD = 7$. 4. $(3, 3, 3)$. 5. Величина угла равна $\pi/4$, искомое расстояние равно $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики. 1. $x \geq \frac{1}{2} \log_2 3 - 1$. 2. $\frac{1}{\sqrt{2 - (\pi/2)}}$. 3. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{8} - \frac{n\pi}{2}$, $y = -\frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{k\pi}{5}$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

4. $v_1 = 7$ км/час, $v_2 = 6\frac{1}{3}$ км/час, $v_3 = 6\frac{1}{2}$ км/час. 5. $\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{31}-7}{5}$, $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{31}-7}{5}$.

Физический факультет. 1. $x = \pm \frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $a < 6$. 3. $x > 1$. 4. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$. 5. $\frac{11}{\sqrt{170}}$.

Химический факультет. 1. 80 км/час. 2. $x = 1/2$, $y = 3/2$. 3. $x \leq 0$, $\log_6 5 \leq x < 1$. 4. 1 м^2 . 5. $x = \frac{5\pi}{48} + n\pi$, $x = \frac{17\pi}{48} + n\pi$, $x = \frac{7\pi}{24} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Биологический факультет. 1. $x = -1$. 2. $NQ = 2\sqrt{13}$ м. 3. Первая бригада делала 13 деталей в час, а вторая — 11 деталей в час. 4. $x = \frac{5}{4}\pi + 5n\pi$, $x = -\frac{5}{12}\pi + 5n\pi$, $x = -\frac{5}{3}\pi + 5n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 5. $-\sqrt[3]{36} < s \leq -3$, $0 < s < \sqrt[3]{9/2}$.

Факультет почвоведения. 1. $x = 4$. 2. $x = 3/2$. 3. $-\frac{\pi}{4} + 2n\pi$, $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 4. $\frac{3}{4}ab$. 5. 144 человека.

Отделение общей геологии геологического ф-та. 1. $-\infty < x \leq -\log_3 2$, $1 - \log_3 5 \leq x < \log_3 5 - 1$. 2. 20 км/час. 3. $\frac{n\pi}{4}$, $\frac{\pi}{32} + \frac{n\pi}{8}$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. $\pi/12$, $5\pi/12$. 5. $r = \frac{b\sqrt{3}}{4\sqrt{\sin(\alpha/2)\sin(3\alpha/2)}}$.

Отделение геофизики геологического ф-та. 1. 2 м^3 . 2. $-5 < x < 3 + 2\sqrt{2}$. 3. $\frac{\pi}{16} + \frac{n\pi}{8}$, $\frac{\pi}{4} - 2 + n\pi$, $\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3} + \frac{n\pi}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. 4. $4/3$. 5. $k < 1/2$, $k > 3/2$.

Географический факультет. 1. $x < -2$, $x > 2$. 2. $\sqrt{7}$. 3. $x = \log_2 3$. 4. 60 км/час. 5. $\frac{\pi}{12} + 2n\pi$, $\frac{5}{12}\pi + (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отд. политической экономии экономического ф-та. 1. $6\frac{2}{3}$ часа, $5\frac{1}{3}$ часа. 2. $\pm \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. $\frac{4}{\sqrt{3}}$. 4. $\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$ и $\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$. 5. $a = 50$.

Отд. планирования и экономич. кибернетики экономич. ф-та

1. $-\frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. в 4 раза. 3. $a = \frac{5}{2}$. 4. $2R \sin \frac{2\pi}{9}$. 5. $\frac{1}{8}V$.

Факультет психологии. 1. $\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. Единственная точка касания — точка $(3, -15)$, длины отрезков — $\frac{21}{2}$ и 21. 3. 900 и 855. 4. Длины сторон равны $4\sqrt{53 \pm \sqrt{13}}$, $16 \pm 2\sqrt{13}$. 5. $a < \frac{-3-\sqrt{5}}{16}$.

Отд. структурной и прикладной лингвистики филологич. ф-та

1. В первом ящике 24 детали, во втором — 7 деталей. 2. $(\frac{5\pi}{24} + n\pi, \frac{\pi}{24} - n\pi)$; $(\frac{\pi}{24} + n\pi, \frac{5\pi}{24} - n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 4. Если $a < 0$, то нет решений; если $a = 0$, то 3 решения; если $0 < a < 1$, то 4 решения; если $a = 1$, то 2 решения; если $a > 1$, то нет решений. 5. 7:20.

1978 год

Механико-математический факультет. 1. -10 . 2. $\frac{\pi}{4}$. 3. $R = \frac{9}{2}$. 4. $a < -1$. 5. $S_{\text{сечения}} = 3$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики. 1. $x = -1, x \geq 2$. 2. $-\frac{4\pi}{3} + 4n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 3. $y = -x + \frac{5}{2}$. 4. $A = \{6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210\}$. 5. $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$.

Физический факультет. 1. $x = n\pi, x = \pm \arccos(-1/3) + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 2. Имеется единственная точка экстремума (минимума) $x = \frac{1}{4}, y_{\min} = \sqrt{\frac{15}{8}}$. 3. $3x + 4y + 6z - 29 = 0$. 4. $x = 2$. 5. $\frac{a}{4b}\sqrt{3b^2 - a^2}$. 6. $MN = \sqrt{ab}$.

Химический факультет. 1. $\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, \frac{(-1)^n}{2} \arcsin \frac{3}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$. 2. 3 часа. 3. Параллелепипед, сторона основания которого имеет длину 2 см, а боковое ребро — длину 1 см. Искомый объем равен 4 см³. 4. $\frac{2}{3}\pi$. 5. $(4, -3, 0), (2, -1, 2)$.

Биологический факультет. 1. $(-1)^n \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 2. Расстояние между пристанями равно 290 км, скорость притока равна 2 км/час. 3. $\frac{6-4\sqrt{2}}{3}$. 4. $-\sqrt{7} < x \leq -\sqrt{3}, \sqrt{3} \leq x < \sqrt{7}$. 5. $a < \frac{\sqrt{5}-1}{2}, a > 1$.

Факультет почвоведения. 1. $\frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$. 2. $0 < x \leq 2, 4 \leq x < +\infty$. 3. Первый слиток в два раза тяжелее второго. 4. $\arcsin(\frac{4}{5} \sin \alpha)$. 5. $x_1 = 9, x_2 = 2$.

Отделение общей геологии геологического ф-та. 1. $\pm \frac{3}{4}\pi + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 2. За 45 минут. 3. $0 < x < \frac{23}{35}$. 5. $-\sqrt{2} < a < -\frac{16}{17}, 0 < a < \sqrt{2}$.

Отделение геофизики геологического ф-та. 1. $x = \pm \frac{\pi}{6} + n\pi, x = \pm \frac{1}{2} \arccos(-\frac{3}{5}) + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 2. $x \leq \frac{6}{5}$. 3. $2 - \sqrt{2} < x \leq \frac{3}{4}, \frac{13}{4} \leq x < 2 + \sqrt{2}$. 4. $7/4$. 5. $8 \text{ км} \leq |AB| \leq \frac{16}{\sqrt{3}} \text{ км}$.

Географический факультет. 1. 11 км/час. 2. $n\pi, \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$. 3. 2 см и $\frac{5}{6}$ см. 4. $-1 < x \leq \frac{1}{3}, 1 \leq x < \frac{7}{3}$. 5. $a = -1, 1 < a < 3, 4 < a \leq 6$.

Отд. политической экономии экономического ф-та. 1. $x = \frac{1}{2}$. 2. Длина стороны квадрата равна 17, точка O лежит внутри квадрата. 3. $b \neq 0$. 4. 1750 тонн. 5. $a > \frac{3}{82}$.

Отд. планирования и экономич. кибернетики экономич. ф-та

1. $\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$. 2. $\frac{13}{14}$. 3. $x = \frac{\sqrt{11}}{4}$. 4. 40%, 43 $\frac{1}{3}$ %. 5. $a < -2 - \sqrt{5}, a > \sqrt{5}$.

Факультет психологии. 1. $x_1 = 1, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{8}$. 2. $AC = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$. 3. 2 км. 4. $(0, 0); (1, 0)$. 5. $a < 0$.

Отд. структурной и прикладной лингвистики филологич. ф-та

1. В бригадах было по 9 человек. 2. $\sqrt{3}$. 3. $x = \frac{n\pi}{2}, x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 4. $\max f(x) = \frac{3}{4}, \min f(x) = -\frac{3}{2}$. 5. $1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

1979 год

Механико-математический факультет. 1. $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $r = 1$.

3. $x = \frac{2}{3}$ — точка минимума, наибольшее значение равно 21. 4. $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$.

5. $\sqrt{3} - 1$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики. 1. $-2 - \sqrt{5}$. 2. $\frac{7}{5}$. 3. $\frac{2\sqrt{4-\cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$ см. 4. -7 ; -31 . 5. $a \leq -4$, $a = 1$, $\frac{8}{3} \leq a < 4$, $a > 4$.

Физический факультет. 1. $x = \pi + 2n\pi$, $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 4n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. $\arccos \frac{6}{7}$. 3. $x = -2$, $y = 0$. 4. $(0, 0)$; $(8, 0)$.

5. $MB = a + l \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sqrt{a^2 + 2al \sin^2 \frac{\alpha}{2} - l^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$,

$ND = a + l \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sqrt{a^2 + 2al \sin^2 \frac{\alpha}{2} - l^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$.

6. $x = \frac{2a \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{l^2 - a^2 \cos^2 \alpha}} \cdot \sqrt{2rl \sin \alpha - (r^2 + l^2) \sin^2 \alpha}$.

Химический факультет. 1. $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $-3 \leq x < 1$.

3. Скорость пароходов 15 км/час, скорость течения реки — 3 км/час.

4. $\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{abc}{mkc + nkb + mna}$. 5. $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, $y = -1$.

Биологический факультет. 1. $x = n\pi$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. Скорость пассажирского поезда — 60 км/час, скорость скорого, — 100 км/час. 3. $S = \frac{8R^3}{b}$.

4. $0 < x \leq 1$. 5. $x_1 = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 16}}$, $y_1 = -\frac{\sqrt{\pi^2 + 16}}{4}$; $x_2 = -\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 16}}$; $y_2 = \frac{\sqrt{\pi^2 + 16}}{4}$; $x_3 = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 9}}$, $y_3 = -\frac{\sqrt{\pi^2 + 9}}{3}$; $x_4 = -\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 9}}$, $y_4 = \frac{\sqrt{\pi^2 + 9}}{3}$.

Факультет почвоведения. 1. $x = 1$. 2. 1. 3. $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

4. $10\sqrt{3}$ см². 5. $x = 2$, $y = 1$.

Отделение общей геологии геологического ф-та. 1. $x \leq \frac{3}{2}$. 2. $x = 2$.

3. $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, $y = \sqrt{2}$. 4. 15 м. 5. $V = \frac{\sqrt{3}}{4}$. 6. $\frac{5}{6}\pi + n\pi$, $\frac{\pi}{18} + 2n\pi$, $\frac{13}{18}\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

Отделение геофизики геологического ф-та. 1. Если $a = 0$, то нет решений; если $a \neq 0$, то $x = \frac{a}{4}$. 2. $x = 2$. 3. $|A| \leq \sqrt{13}$. 4. Длина окружности переднего колеса 2 м, длина окружности заднего — 3 м. 5. $\frac{103\sqrt{17}}{130}$. 6. $0 < x \leq 4\sqrt{6}$.

Географический факультет. 1. Наибольшее значение 400, наименьшее -86 . 2. $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $AC = 2\sqrt{6}$. 4. 33 ученика. 5. $-2 - \sqrt{4 + \cos \frac{3}{2}} \leq x < 0$.

Отд. политической экономии экономического ф-та. 1. $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $\arccos \frac{3}{\sqrt{10}}$. 3. 10 л, 90 л. 4. $(-1, 2)$; $(\frac{7}{9}, \frac{10}{9})$. 5. $x = \frac{1}{4}$.

Отд. планирования и экономич. кибернетики экономич. ф-та

1. $x = \pi \pm \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, $y = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k, n \in \mathbf{Z}$. 2. $OC = 7\sqrt{\frac{29}{5}}$. 3. $S = 726$.

4. $(1 + \sqrt{2}, -1)$; $(1 - \sqrt{2}, -1)$. 5. $x < -2$, $-2 < x < 2 - \sqrt{15}$, $x \geq 6$.

Факультет психологии. 1. $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. 2. $x = -\frac{2}{5}$, $y = \frac{2}{5}$.

3. $1 < x \leq 3$, $-1 - \sqrt{8} \leq x < -3$. 4. $V = \frac{16}{3}\sqrt{2}$. 5. $(1, 5, 0)$; $(1, -5, 0)$; $(-1, 5, 0)$;

$(-1, -5, 0)$.

Отд. структурной и прикладной лингвистики филологич. ф-та

1. $S = 10R^2(\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3})$. 2. $n\pi$, $(-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $(1, 2] \cup [3, 4)$. 4. 8 часов. 5. На 11.

1980 год

Механико-математический факультет. 1. $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. 2. $x = n\pi$, $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. 5 и 3. 4. $c = \frac{4}{5}$, $S = \sqrt[3]{\frac{5}{4}} \cdot \frac{48}{25}$. 5. $a = 2$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики. 1. $\frac{7}{9}$. 2. $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. 202,8. 4. $\frac{9 - \sqrt{17}}{16} < a < \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3} < a < \frac{9 + \sqrt{17}}{16}$. 5. $\frac{12}{7}$ см. 6. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Физический факультет. 1. $\{-\frac{31}{24}\pi, \frac{\pi}{24}, \frac{17}{24}\pi\}$. 2. $C(\frac{15}{2}, 0, 0)$. 3. $x_1 = 3$, $x_2 = 3^4$. 4. $x > 0$. 5. $x = \frac{b \sin \alpha (\frac{\pi}{4} - \cos \beta)}{2 \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}$. 6. $\arccos \left(\frac{1 - \cos \beta}{\cos \varphi} - \cos \varphi \right)$.

Химический факультет. 1. $x = 4$. 2. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}$, $x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $B \left(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{16}{3}(\sqrt{3} - 1) \right)$. 4. $\arccos \sqrt{2(1 - S)}$. 5. $a = \frac{2}{3}$.

Биологический факультет. 1. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $\min y(x) = -135$, $\max y(x) = 54$. 3. $3 < x \leq 5$. 4. $AB = CD = 5$ м, $AD = BC = 8$ м. 5. $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

Факультет почвоведения. 1. $x_1 = 1$, $y_1 = -5$; $x_2 = 5$, $y_2 = -1$. 2. $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $\frac{\pi + 3}{6\pi}$. 4. $3 < x < \frac{7}{2}$, $x > 4$.

Отделение общей геологии геологического ф-та. 1. $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $3\sqrt{30}$ см. 3. $x = y = 4$. 4. 42,3%. 5. $\pi/8$.

Отделение геофизики геологического ф-та. 1. $x \in (-\infty, -1)$. 2. $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. 3. $x_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \frac{11 - \sqrt{29}}{2}$. 4. 20 м. 5. 20 см.

Географический факультет. 1. $k < \frac{1}{2}$. 2. $x = 1 + \sqrt{3}$. 3. $\frac{1}{12}\pi HR^2$. 4. $x = \pm \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 5. $(-\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$; $(-\frac{3}{2}, \frac{2}{3})$.

Отд. политической экономии экономического ф-та. 1. $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{5}{2}$. 2. $x < -\frac{1}{6}$, $x > \frac{1}{12}$. 3. 10 см. 4. 170 кг. 5. Если $k = -1$, то $x = 2n\pi$. $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$; если $k = 0$, то $x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$; если $k = 1$, то $x = \pi \pm \arccos \frac{\sqrt{7}-1}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

Отд. планирования и экономич. кибернетики экономич. ф-та

1. $x < 1$. 2. 60 см². 3. $(-1, 3)$, $(t, 2)$, где t — любое действительное число. 4. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 5. 7.

Факультет психологии. 1. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $(3, 1)$, $(\frac{5}{3}, \frac{11}{3})$. 3. $\sqrt{15 + 6\sqrt{3}}$. 4. 2. 5. $(\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{4} + n\pi)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Отд. структурной и прикладной лингвистики филологич. ф-та

1. $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $-2 \leq x < -1$, $1 < x \leq 2$. 3. $(0, 5)$. 4. 14,4 см². 5. $a = 1$.

1981 год

Механико-математический факультет. 1. $x = 5$, $x > 4 + \sqrt{2}$. 2. $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi$, $y = \frac{\pi}{2} + l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$. 3. $18\frac{1}{3}$ кг. 4. $\frac{P}{r} = 2\sqrt{3} \frac{\cos(\alpha/2) + 0,5}{\cos(\alpha/2) - 0,5}$. 5. $\frac{1}{4}(S + \sqrt{2}\sigma k\sqrt{1-l})$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики. 1. $b = \frac{1}{2}$. 2. $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$. 3. $AB = 1 + 6\sqrt{2}$; $AC = 2$; $BC = 5\sqrt{3}$. 4. $a = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 1$; $a \neq \frac{1}{3} \Rightarrow$ решений нет. 5. $1 - \frac{3\pi}{2}$, $\frac{1}{3} + \frac{\pi}{6}$, $1 - \frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{3} - \frac{\pi}{6}$, $\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\pi$, $\frac{1}{3} - \frac{11}{6}\pi$, $1 + \frac{3}{2}\pi$, $\frac{1}{3} + \frac{11}{6}\pi$. 6. $\frac{1}{4}\sqrt{87}$.

Физический факультет. 1. $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $a = \pm\sqrt{2}$. 3. $x = 3$. 4. $x > 0$. 5. $\frac{1+\sqrt{33}}{8}$. 6. 1, $m - 1$.

Химический факультет. 1. $x \leq -1,4$; $2 < x \leq 2,6$. 2. $(-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. 20 км. 4. $2 \arctg \frac{\sqrt{17}+3}{4}$. 5. $-\sqrt{2} \leq a < 1$, $a \geq \sqrt{2}$.

Биологический факультет. 1. $x = 5$. 2. $x = \frac{n\pi}{2}$, $x = \pm \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. $S = \frac{147}{8}$. 4. $x > 3$. 5. $\rho = \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{5}+\sqrt{13}}$.

Факультет почвоведения. 1. 9 км. 2. $x = \frac{1}{10}$, $10\sqrt{2}$. 3. $2 \leq x \leq 11$. 4. $S = \frac{49}{2}$. 5. $x = 1$, $y = 1 \pm \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отделение общей геологии геологического ф-та. 1. $\log_2 3$. 2. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. $v_{\text{скуп.}} = 100$ км/час, $v_{\text{тов.}} = 50$ км/час. 4. $S = 32$. 5. $KC = 2$.

Отделение геофизики геологического ф-та. 1. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. 2. $x = 9$. 3. $S = 4$. 4. $(\frac{\pi}{6} + \pi(k+n), \frac{\pi}{6} + \pi(k-n))$, $(-\frac{\pi}{6} + \pi(k+n), -\frac{\pi}{6} + \pi(k-n))$, $n, k \in \mathbb{Z}$. 5. 3. 6. $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$.

Географический факультет. 1. $x_1 = 4$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. 2. $1 + \frac{\pi}{4}$. 3. 1 кг 40-процентного и 2 кг 60-процентного. 4. $\frac{24}{\sqrt{145}}$. 5. $x = 1$, $y = -1$.

Отд. политической экономии экономического ф-та. 1. $\log_2 3$. 2. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. $v_{\text{скуп.}} = 100$ км/час, $v_{\text{тов.}} = 50$ км/час. 4. $S = 32$. 5. $KC = 2$.

Отд. планирования и экономич. кибернетики экономич. ф-та

1. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. 2. $x = 9$. 3. $S = 4$. 4. $(\frac{\pi}{6} + \pi(k+n), \frac{\pi}{6} + \pi(k-n))$, $(-\frac{\pi}{6} + \pi(k+n), -\frac{\pi}{6} + \pi(k-n))$, $n, k \in \mathbb{Z}$. 5. 3. 6. $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$.

Факультет психологии. 1. $x_1 = 4$, $y_1 = 2$; $x_2 = \frac{4}{3}$, $y_2 = -\frac{2}{3}$. 2. $S = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \cdot a^2$. 3. $\frac{35}{84}\pi$, $\frac{53}{84}\pi$, $\frac{59}{84}\pi$. 4. $\frac{3}{2}$, $\frac{36}{25}$. 5. $1 - \sqrt{2}$, $5 + \sqrt{10}$.

Отд. структурной и прикладной лингвистики филологич. ф-та

1. $\frac{n\pi}{3}$, $\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $1\frac{31}{32} \leq x < 2$, $x \leq 0$. 3. $\frac{27}{8}$. 4. Первый — 20 деталей в час, второй — 18 деталей в час. 5. $r_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$, $H = \frac{4}{3}R$.

1982 год

Механико-математический факультет. 1. 2. 2. $4\sqrt{5}$. 3. $\frac{5}{6}\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 4. $(-\sqrt[4]{2}, -1)$, $x \neq \frac{-1-\sqrt{1+16k}}{16}$ ($15 \leq k \leq 20$); $(1, \sqrt[4]{2})$, $x \neq \frac{-1+\sqrt{1+16k}}{16}$ ($19 \leq k \leq 25$). 5. $\frac{5\sqrt{10}}{32}$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики. 1. $\sqrt{8} > 2^{(2\log_2 5 + \log_{1/2} 9)}$. 2. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $x < 0$, $1 \leq x \leq 2$. 4. 5 прессов. 5. Если $a = 1$, то $x \geq 1$; если $a = -1$, то $-3 \leq x \leq 1$; если $|a| > 1$, то $x = 1$; если $|a| < 1$, то $x = 1$, $x = \frac{7+a}{a-1}$. При $|a| < 1$ имеется ровно 2 решения. 6. $R = \frac{1}{2}\sqrt{34 - 15\sqrt{3}}$.

Физический факультет. 1. $\pm 4 \arccos(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) + 8n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $a < -2$, $a > 1$. 3. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. 4. $x > 3$. 5. $2 \arcsin\left(\frac{\sin \alpha + \sqrt{3} \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}}{2}\right)$. 6. $\angle A = 2 \arcsin \frac{\sqrt{1-h^2}}{2}$, $\angle B = \pi - \arccos h - \frac{\angle A}{2}$, $\angle C = \pi - \angle A - \angle B$.

Химический факультет. 1. $-\frac{\pi}{8} \pm \frac{5\pi}{12} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $[-1, 0)$. 3. $(-\infty, 0)$. 4. $2\sqrt{\frac{S_1}{\pi}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2}$. 5. $[1, +\infty)$.

Биологический факультет. 1. $[2, +\infty)$. 2. $\frac{n\pi}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $\frac{a^3}{(\sqrt{2}+1)^3}$. 4. $y = x + 1$, $y = \frac{9}{\sqrt[3]{25}}x - \frac{3}{\sqrt[3]{5}}$. 5. $\frac{5}{24}$.

Факультет почвоведения. 1. 80 км/час. 2. $\frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $\frac{5}{6}\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. 17. 4. $3\sqrt{3}$. 5. $\frac{\sqrt[4]{3}}{1+\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$.

Географический факультет. 1. -1. 2. $\pm \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{16} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $\frac{2}{3}\sqrt{145}$. 4. $\frac{3}{2} < x < 2$, $1 < y < 2$. 5. 28 см^2 .

Отделение общей геологии геологич. ф-та. 1. $\sqrt[7]{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - 3 \cos \pi} < \sqrt[3]{2}$. 2. $x = 2$. 3. $-1 < x < 1$. 4. $(-1)^n \arcsin \frac{12}{13} + n\pi$, $(-1)^{n+1} \arcsin \frac{3}{13} + n\pi$, $(-1)^{n+1} \arcsin \frac{6}{13} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 5. $\frac{27\sqrt{3}}{7}$. 6. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \pi(n+m), \\ y = -\frac{\pi}{3} + \pi(n-m), \\ z = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \end{cases}$

$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \pi(n+m), \\ y = \frac{\pi}{3} + \pi(n-m), \\ z = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \pi(n+m), \\ y = -2\frac{\pi}{3} + \pi(n-m), \\ z = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \pi(n+m), \\ y = 2\frac{\pi}{3} + \pi(n-m), \\ z = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n. \end{cases}$

Отделение геофизики геологич. ф-та. 1. $\sqrt{1 - 2 \sin \frac{3\pi}{2}} > \sqrt[3]{5 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}}$. 2. $x \geq -2$, $x \neq -1$. 3. $x = \frac{1}{2}$. 4. $\frac{\pi}{20} + \frac{n\pi}{5}$, $n \neq 5l + 1$, $n, l \in \mathbf{Z}$. 5. $y_{\max} = 3$, $2 \leq x \leq 3$. 6. $k = 10$.

Отд. полит. экономики экономического ф-та. 1. $\sqrt{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} - 2 \sin \frac{3\pi}{2}} > \sqrt[3]{5}$. 2. $x = 1$. 3. $-2 < x < 3$. 4. $(-1)^n \arcsin \frac{1}{8} + n\pi$, $(-1)^n \arcsin \frac{5}{8} +$

$$n\pi, (-1)^{n+1} \arcsin \frac{7}{8} + n\pi, n \in \mathbf{Z}. 5. x = 5\sqrt{\frac{3}{7}}. 6. \begin{cases} x = \frac{2}{3}\pi + \pi(k+n), \\ y = \frac{\pi}{3} + \pi(k-n), \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}\pi + \pi(k+n), \\ y = \frac{2\pi}{3} + \pi(k-n), \end{cases} \quad k, n \in \mathbf{Z}.$$

Отд. планирования и экономич. кибернетики экономич. ф-та

$$1. \sqrt[3]{2+3\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} < \sqrt[3]{-2\cos \pi}. 2. x \leq 4, x \neq 1. 3. x = -1. 4. x = \frac{\pi}{10} + \frac{n\pi}{5}, n \neq 5l+2, n, l \in \mathbf{Z}. 5. y_{\max} = \frac{5}{8}, \frac{9}{5} \leq x \leq 3. 6. m = 8.$$

Факультет психологии. 1. $(-1, 0) \cup (2, 4)$. 2. $(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi}, -\frac{\pi}{4})$. 3. $(-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 4. $\frac{1}{6}$. 5. В два раза. 6. $\{1 - \sqrt{11+4\sqrt{3}}, 1 + \sqrt{11+4\sqrt{3}}\}$.

Отд. структурной и прикладной лингвистики филологич. ф-та

$$1. (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbf{Z}. 2. \{\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\}. 3. \frac{49}{32}. 4. \frac{5\pi}{18} - \frac{\sqrt{3}}{3}. 5. (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, 2).$$

1983 год

Механико-математический факультет. 1. $-2 \leq x \leq -1, x = 3$. 2. $x = \frac{\pi}{6} + 4n\pi, x = \frac{5}{8}\pi + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 3. $\frac{1}{2}(p-a)^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. 4. $a = 6n - 1, 6k + 3, 6l, 6m + 2, k, l, m, n \in \mathbf{Z}$. 5. $\frac{\pi(17-\sqrt{17})}{8\pi}$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики. 1. $x \in [-4, 2) \cup (3, 4]$. 2. $x = \frac{3}{4}\pi + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 3. 25 квадратных единиц. 4. $\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{9\sqrt{3}}$. 5. $\{1 + \sqrt{a^2+4a+8}, 1 - \sqrt{a^2-2a+5}\}$, при $a < -2$; $\{1 - \sqrt{a^2-2a+5}, 1 - \sqrt{a^2+4a+8}\}$, при $-2 \leq a < -\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$, при $a = -\frac{1}{2}$; $\{1 - \sqrt{a^2-2a+5}, 1 - \sqrt{a^2+4a+8}\}$, при $-\frac{1}{2} < a \leq 1$; $\{1 + \sqrt{a^2+4a+8}, 1 - \sqrt{a^2-2a+5}\}$, при $a > 1$. 6. $\{(-1, -2), (-1, 2)\}$.

Физический факультет. 1. $x = \frac{n\pi}{4}, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 2. $x = \pm 1, x = \pm \frac{1}{\sqrt{8}}$. 3. $0 < x < 1/16$. 4. 83. 5. $S = \frac{1}{2}(1 + 2\cos 2\alpha)^2 \operatorname{tg} 2\alpha$.

$$6. \gamma = \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}); \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3 \operatorname{ctg}^2(\varphi/2) - 1} - \operatorname{tg}(\beta/2)}{\sqrt{3 \operatorname{ctg}^2(\varphi/2) - 1} + \operatorname{ctg}(\beta/2)}.$$

Химический факультет. 1. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 2. $x = 1$. 3. $\frac{5}{18} V$. 4. $(0, 2)$. 5. $n = -1$.

$$\left(\frac{1}{9} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{7}}{18}, \frac{13}{36} + \frac{\sqrt{7}}{18} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right); \left(\frac{1}{9} + \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{7}}{18}, \frac{13}{36} - \frac{\sqrt{7}}{18} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right),$$

$$\left(\frac{1}{9} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{7}}{18}, \frac{13}{36} + \frac{\sqrt{7}}{18} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right); \left(\frac{1}{9} - \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{7}}{18}, \frac{13}{36} - \frac{\sqrt{7}}{18} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right).$$

Биологический факультет. 1. $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 2. $x = 2, x = e^2$. 3. $-5 \leq x < 20$. 4. $\frac{3}{32}$. 5. $b < -1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} < b < 0$.

Факультет почвоведения. 1. $\frac{5}{7}$. 2. $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 3. $x = -17, y = \log_2 10$. 4. $\frac{15\sqrt{7}}{16}$. 5. $\frac{9}{13}\pi, \frac{15}{13}\pi$.

Географический факультет. 1. $x = \pm \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. 2. $[-1, 0]$. 3. $\frac{b^2 \cos^2 \alpha}{2 \sin \beta}$. 4. $x_1 = -1, y_1 = -3; x_2 = 3, y_2 = -3$. 5. $\angle PSQ = \arccos \frac{46}{\sqrt{2641}}$.

Отделение общей геологии геологического ф-та. 1. $\{-3, 2\}$. 2. $AC >$

БК. 3. $[-\frac{6}{5}, 1) \cup (-\frac{1}{5}, 0]$. 4. $(\frac{7}{4}\pi + n\pi, -\frac{\pi}{4} + n\pi)$, $n \in \mathbf{Z}$. 5. $v = 50$ км/час. 6. $\frac{4}{5}\sqrt{13}$.

Отделение геофизики геологического ф-та. 1. $\{-1, 4\}$. 2. $BL > BG$. 3. $[\frac{1}{2}, 1) \cup (2, \frac{5}{2}]$. 4. $(\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \pi - 2n\pi)$, $n \in \mathbf{Z}$. 5. Пункт А. 6. $\frac{3\pi}{10 + \sqrt{100 + 60\sqrt{10}}}$.

Отд. политической экономии экономического ф-та. 1. 3. 2. $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $[0, \frac{1}{136}) \cup (4, +\infty)$. 4. 743. 5. 26 бойцов. 6. $\{-1, \frac{15}{17}, \frac{17}{15}\}$, если $a = -2$; $\{-\frac{1}{136}, 0, \frac{1}{120}\}$, если $a = -\frac{1}{8}$.

Отд. планирования и экономич. кибернетики экономич. ф-та

1. $\{-7, 7\}$. 2. $\{-3\frac{1}{2}, -3, -1, 1, 3, 3\frac{1}{2}\}$. 3. $(-3, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, 3)$. 4. $\frac{2}{3}d$ и $\sqrt{\frac{20}{9}d^2 - a^2}$. 5. 26 тетрадей в клетку, 31 тетрадь в линейку. 6. Если $a = 0$, то $[-\frac{1}{4}, +\infty)$; если $0 < a < 1$, то $(-\infty, \frac{-\sqrt{1-a}-1}{2a}] \cup [\frac{\sqrt{1-a}-1}{2a}, +\infty)$; если $a \geq 1$, то $(-\infty, +\infty)$.

Факультет психологии. 1. $x = 2 - 2\log_2 3$. 2. $-1 - \sqrt{52} \leq x < -5$, $1 < x \leq -1 + \sqrt{52}$. 3. Если $n = 2$, то $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; если $n = 3$, то 1. 4. $AB = BC = 7\sqrt{3}$, $AD = 2\sqrt{21}$, $DC = \sqrt{21}$. 5. Система имеет хотя бы одно решение при $0 < a \leq \frac{1}{3}$, $a \neq \frac{1}{4}$. При таких a имеем $x = \pm \arccos \frac{1-2a}{2-3a} + 2k\pi$, $y = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2-3a} + n\pi$, $z = \frac{2a}{1-2a}$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

Отд. структурной и прикладной лингвистики филологич. ф-та

1. $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 2. $x = 0$, $y = -3$. 3. $y_{\min} = -1 - 4\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $y_{\max} = 4\pi - 1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$. 4. $\frac{49(3\sqrt{3}-5)}{8}$. 5. 0; 1.

1984 год

Механико-математический факультет. 1. $\{-3, -1\}$. 2. $\frac{13}{4}$. 3. $\frac{\sqrt{2}+1}{2} \approx 1, 20$. 4. $x_1 = 0$, $y_1 = \log_2 \frac{8}{11}$; $x_2 = \frac{1}{3} \log_2 \frac{3+\sqrt{8}}{2}$, $y_2 = 2 - \log_2(3 + \sqrt{8})$. 5. 4.

Факультет вычислительной математики и кибернетики. 1. $\frac{9}{7}$. 2. $x = \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{1}{6} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $BH = 8$. 4. $x \in [-2^{7/2}, -2^{3/8}) \cup (2^{3/8}, 2^{7/2}]$. 5. (7, 6, 6). 6. $BM = \sqrt{8}$.

Физический факультет. 1. $x = (-1)^n \arcsin \frac{1-\sqrt{3}}{2} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. 5; 5^{-3} . 3. $x \leq 1$, $x \geq 2$. 4. $\frac{4}{3} \leq a \leq 2$. 5. $\frac{\sqrt{3}}{12k}(k+1 + \frac{2}{\sqrt{3}})^3$. 6. $\frac{2Rr}{R-r}$.

Химический факультет. 1. $x = \frac{1}{2}$, $x > 1$. 2. 40 км/час, 60 км/час. 3. $x = -\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} + \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 4. $4(1 + \sqrt{3})$. 5. $2 \pm \sqrt{2}$.

Биологический факультет. 1. $1 < x < 3 - \sqrt{3}$, $x > 3 + \sqrt{3}$. 2. $x = \pi + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $x = \frac{3}{2}$. 4. $\frac{3\sqrt{14}}{16}a^2$. 5. $\begin{cases} x = 3, \\ y = \pm\sqrt{2}, \end{cases} \begin{cases} x = 4 - \frac{1}{2}y^2, \\ y \in \mathbf{R} \end{cases}$,

$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(n - y^2), \\ y = 1 \pm \sqrt{5 + \frac{n}{2}}, n \geq -10, n \neq 8, n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

Факультет почвоведения. 1. 12 га, 9 га, 15 га. 2. $x = \pm \frac{5}{12}\pi + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. $-\frac{1}{3} < x < 1$, $x \neq 0$. 4. $(\sqrt{3}-1)(c + \frac{b}{\sqrt{2}})$. 5. $-\frac{1}{4} \leq a \leq 0$.

Географический факультет. 1. $x = 2n\pi$, $x = \pm \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $\sqrt{13}$.

3. $\min f(x) = 3$. 4. $5\sqrt{2}$. 5. $\alpha < -10$, $\alpha > \frac{1}{2}$.

Отделение общей геологии геологического ф-та. 1. $x = 4$. 2. $x = 1$, $x \geq 2$. 3. $\pm \sqrt{\frac{5}{8}}$. 4. 6 см^2 . 5. 94. 6. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Отделение геофизики геологического ф-та. 1. $x = -1$. 2. $(0, 1] \cup [2, 10)$. 3. $\pm \frac{1}{\sqrt{10}}$. 4. $\frac{8}{13} \sqrt{119} \text{ см}^2$. 5. 70. 6. $\frac{6}{(\sqrt{19+2\sqrt{7}}+\sqrt{3+2\sqrt{15}})^2}$.

Отд. политической экономии экономического ф-та. 1. $x = -1 + \frac{\sqrt{73}}{2}$. 2. $x = n\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $-1 \leq x \leq 0$. 4. 21 человек в 1-й и 28 человек во 2-й бригадах. 5. $AD = \frac{3 \sin(5\pi/24)}{\sin(11\pi/24)}$. 6. $a = 0$, $a = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

Отд. планирования и экономич. кибернетики экономич. ф-та

1. $1 \leq x \leq 2$. 2. $y_{\min} = \frac{14}{3}$. 3. $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{17-\sqrt{385}}{16} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 4. $AC = 10$. 5. 1 дом на 16 квартир и 12 домов на 12 квартир. 6. $SQ = \frac{5}{2}$, $SN = \frac{5}{3}$.

Факультет психологии. 1. 180. 2. 30 км. 3. $x = n\pi$, $x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 4. $6 + 2\sqrt{2}$. 5. 3. 6. 233, 390, 466, 699. 7. $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \log_2 3$, $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log_2 3$.

Отд. структурной и прикладной лингвистики филологич. ф-та

1. $\log_2(1 + \sqrt{5}) - 1$. 2. $x = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $y_{\max} = 7\frac{1}{4}$, $y_{\min} = 1$. 4. $\sqrt{2} \text{ см}^2$. 5. $a = \frac{1}{8}$.

1985 год

Механико-математический факультет. 1. $(-1)^n \arcsin \frac{3-\sqrt{8}}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $x \geq -\frac{1}{3}$, $x < -1$, $x \neq 1$. 3. $\frac{4\sqrt{6}}{5}$. 4. $-1, 2$; $-0, 67$. 5. $\frac{r_1}{r_2} \cdot \sqrt{2R^2 - r_2^2 + 2R \cos \varphi \sqrt{R^2 - r_2^2}}$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики. 1. $x = 1$, $y = \log_3 2$. 2. Длина RS больше длины QR . 3. $x = -\frac{9}{13} \pm \frac{1}{13} \sqrt{\frac{1}{2} + 2n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. 4. $-\frac{1}{3} < x < \frac{-7-\sqrt{7}}{42}$; $\frac{-15+\sqrt{197}}{84} \leq x < 0$; $0 < x \leq \frac{13-\sqrt{141}}{84}$; $\frac{13+\sqrt{141}}{84} \leq x < \frac{1}{3}$. 5. $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $y = 1$, $z = 1$; $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $y = 7$, $z = -9$. 6. $\frac{60\sqrt{2}}{11\sqrt{3}+\sqrt{43}} + \frac{15\sqrt{2}}{2}$.

Физический факультет. 1. $x = \frac{2n\pi}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $-\sqrt{3}$. 3. $0 < x < 9$. 4. При $a > 0$ имеем $x = \log_2 a$, $x = 2 \log_2 a$; при $a = 0$ решений нет; при $a < 0$ имеем $x = 2 \log_2 |a|$. 5. $\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{2a-1}{\sqrt{2}}$, $0 < a < \frac{1}{\pi}$. 6. $2\sqrt{S} \operatorname{tg} \beta$.

Химический факультет. 1. $x = n\pi$, $x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $x < 4 - 2\sqrt{2}$, $x > 4 + 2\sqrt{2}$. 3. $x = \frac{4}{5}$. 3. $\frac{2\sqrt{3}}{9} \text{ см}^3$. 5. $(5, 2)$; $(\frac{93}{2}, \frac{33}{2})$.

Биологический факультет. 1. $x = 0$. 2. $x = \frac{5}{6}\pi$. 3. $(-\frac{1}{3}, -\frac{7}{24}) \cup (1, +\infty)$. 4. $\frac{S_1+S_2+\sqrt{(S_1+S_2)^2-4S_1S_2\sin^2\alpha}}{2}$. 5. Три корня.

Факультет почвоведения. 1. $(-\frac{9}{2}, 3)$. 2. $x = 0$. 3. $x = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. $\sqrt{2}$. 5. $x_0 = 6$.

Отделение общей геологии геологического ф-та. 1. $2^{\log_3 5} - 0,1 < 5^{\log_3 2}$. 2. $x > 2$. 3. За 9 часов. 4. $x = \arctg 5 + n\pi$, $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

5. $x = 7$. 6. $\sqrt{61}$.

Отделение геофизики геологического ф-та. 1. $2^{\log_7 3} + \sqrt[5]{6} < 3^{\log_7 2} + 6^{\frac{1}{3} \log_6 3}$. 2. $x < 1$, $x > 3$. 3. За 6 часов. 4. $x = -\arctg \frac{7}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

5. $x = -1$. 6. $\frac{\pi}{6}$.

Географический факультет. 1. $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $\frac{2}{3} < x < 1$. 3. 2 часа. 4. $\frac{\pi}{28}$. 5. $-\frac{1}{\sqrt{10}} \leq a \leq \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Отд. полит. экономики экономического ф-та. 1. $x \in (-\infty, -\frac{1}{8}) \cup [2, +\infty)$. 2. $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq 2^{-(2/3)}$, $x = 2^p$, где $p = \frac{2 \log_2 a}{3 \log_2 a + 2}$. 4. $y_{\min} = \frac{7}{23}$. 5. 40 минут и 1 час. 6. $BC = 3$.

Отд. планирования и экономич. кибернетики экономич. ф-та

1. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $x \in (-\infty, -\frac{8}{3}] \cup [0, \frac{1}{3})$. 3. $AC = 10$. 4. 12 часов дня. 5. $x = \frac{4}{\sqrt{13}}$, $y = \frac{6}{\sqrt{13}}$, $z = \frac{9}{\sqrt{13}}$, $v = \frac{6}{\sqrt{13}}$.

Факультет психологии. 1. $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $x < 1$. 3. 18 копеек. 4. Наибольшее значение равно 4, а наименьшее равно $\frac{3}{2}$. 5. $\frac{R^2(\sin(\alpha+30^\circ) \pm (1/2))^2}{4 \sin \alpha \sin(\alpha+30^\circ)}$. 6. $-\frac{13}{3} < a \leq -\frac{19}{5}$.

Отд. структурной и прикладной лингвистики филологич. ф-та

1. $\{-\frac{4\pi}{3}, -\pi\}$. 2. 18 рыб. 3. $[-1, \frac{5}{4})$. 4. $S = \frac{5}{2}(3\sqrt{3}+4)$. 5. При $a = \arcsin \frac{2}{\sqrt{7}} + \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ имеем $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; При $a = -\arcsin \frac{2}{\sqrt{7}} - \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ имеем $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. При других значениях a решений нет.

1986 год

Механико-математический факультет. 1. $x = (\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^2$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. 3. $0 < x \leq 2^{-2\sqrt{2}}$, $x \geq 2^{2\sqrt{2}}$. 4. Нет. 5. $-\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{1}{3}$. 6. $\frac{160}{\sqrt{3}}$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики.

1. $x \in (4, 1 + 2\sqrt{3}]$. 2. $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$. 3. 6 томов. 4. $AM = 2\sqrt{9+6\sqrt{2}}$. 5. $x = \frac{3}{4}\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 6. $c = -\frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{6}$.

Физический факультет. 1. $x = -1$, $x = 4$. 2. $x > 3$. 3. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $x = \pi + 2n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $y = \log_3 x$. 4. $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$. 5. $\frac{9}{95}$. 6. $\frac{i^2 - h^2}{2h}$.

Химический факультет. 1. $x = 4$. 2. За 8 часов. 3. $\frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3}$, $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3}$. 4. $\frac{169\sqrt{55}}{88}$. 5. $a = -\frac{1}{4}$, $a = -\frac{1}{32}$.

Биологический факультет. 1. $-\pi$. 2. $x < \log_3 4$. 3. 72 км/час. 4. $\frac{15}{4}$. 5. $a \leq 1$, $a \geq 3$.

Факультет почвоведения. 1. $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $\frac{2}{5} < x \leq \frac{3}{7}$. 3. За 8 часов. 4. 4. 5. $2\sqrt{7}$.

Геологический факультет. 1. $x = \frac{5}{12}\pi + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $\frac{h}{r} = 3$. 3. $\log_{3/2}(\frac{1+\sqrt{13}}{6})$. 4. 50 м, 20 м. 5. $[-a, 0) \cup (0, \frac{2a^2b}{a^2+b^2})$, если $a \leq b$; $[-a, 0) \cup (0, a]$, если $a > b$. 6. $x = \frac{3}{2}\pi$ при $p = 9$; $\emptyset$ при $p < 9$.

Географический факультет. 1. $-1 - \sqrt{6} < x < -1 + \sqrt{6}$. 2. $x = \frac{1}{9}$. 3. В два раза. 4. $\sqrt{6} - 3\sqrt{3}$. 5. $-a^2$, если $a \leq 4 - 2\sqrt{2}$; $-8(a-1)$, если $a \geq 4 - 2\sqrt{2}$.

Отд. политической экономии экономического ф-та. 1. $x = \frac{1}{2}$. 2. $x = -3$, $y = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $x = -\frac{4}{3}$, $x = -\frac{2}{3}$. 4. $3\sqrt{2} - \frac{15}{4}$. 5. По два самолета каждого типа. 6. $\sqrt{3}$.

Отд. планирования и экономич. кибернетики экономич. ф-та

1. $x = \frac{1}{4}$. 2. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, $y = \frac{1}{3}$. 3. $\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{1}{4}$, $x = \frac{2}{5}$. 4. $3\sqrt{3}$. 5. 11 дней; 19 деталей; 31 деталь. 6. 72 см³.

Факультет психологии. 1. $\frac{112}{9}$. 2. $x = 2$. 3. $x < -1$; $-10^{-(3/4)} < x < 0$; $0 < x < 10^{-(3/4)}$; $x > 1$. 4. 200 граммов. 5. $\frac{15 \operatorname{tg}(\alpha/2)}{3+4 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}$. 6. $2\sqrt{2}$.

Отд. структурной и прикладной лингвистики филологич. ф-та

1. $-1 < x < 1$, $x > 1$. 2. $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x = 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $h = 10\sqrt{2}$. 4. $\frac{15}{7}$. 5. Нет.

Философский факультет. 1. $x = 19\frac{2}{3}$, $y = -8\frac{2}{3}$. 2. $8\sqrt{3}$. 3. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 4. $0 < x < 1$, $x > 16$. 5. $(3, -4)$; $(4, -5)$.

1987 год

Механико-математический факультет

1. $x = (-1)^n \arcsin\left(\frac{1}{\pm(\pi/3)+2k\pi}\right) + n\pi$, $k, n \in \mathbf{Z}$. 2. $-3 < x < -1$. 3. $\cos(\angle DBC) = \frac{3}{4}$. 4. $u_1 = 50$ км/час; $u_2 = 40$ км/час. 5. a любое, $b = 2$ и $a = \pm 1$, $b = -2$. 6. $KL = 9$ см.

Факультет вычислительной математики и кибернетики. 1. $x = 9$, $y = 2$. 2. Не существуют. 3. $x \in (0, \sqrt[5]{2} - 1] \cup [63, +\infty)$. 4. $x = (-1)^n \arcsin \sqrt{\frac{k}{6}} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 5. 20 рейсов. 6. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{213}{87}$.

Физический факультет. 1. $0 < x \leq \frac{1}{3}$, $x > 1$. 2. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{5}$. 4. $-\frac{1}{3} \leq x < 0$, $\frac{2}{3} < x \leq 1$. 5. $BD = \sqrt{\frac{3a^2+8c^2}{35}}$.

6. $V = \frac{1024}{9}$, двугранный угол $= 2 \arctg \frac{\sqrt{34}}{4}$.

Химический факультет. 1. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $1 < x \leq 2$. 3. $a = -\frac{1}{3}$. 4. $\frac{a^3 \sqrt{3}(\gamma+2)}{8\sqrt{\gamma(\gamma+1)}}$. 5. $p \leq 0$, $p \geq 3$.

Биологический факультет. 1. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $\frac{2}{5}$ пути. 3. $\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}$, $x \geq 2$. 4. $\frac{10}{3}$. 5. $\frac{2}{3} - \sqrt{2} \leq a \leq \frac{2}{3} + \sqrt{2}$.

Факультет почвоведения. 1. $x = \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $-\frac{3}{2} \leq x \leq 3$. 3. 4 км/час. 4. 8. 5. $x_{\min} = 1$.

Геологический факультет. 1. 12 см. 2. $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $x \leq \frac{1}{2}$, $x > 1$. 4. $x_1 = 9$, $y_1 = 3$; $x_2 = 1$, $y_2 = 27$. 5. 12 деталей. 6. $BT = 5$ см.

Географический факультет. 1. $x = 1$. 2. $-2 < y < 2$. 3. $S = \frac{5\sqrt{5}}{3}$. 4. $(-\pi, -\pi), (0, -2\pi), (\pi, \pi)$. 5. $b = 3, 4, 5, \dots$

Отд. политической экономии экономического ф-та. 1. $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 2. 5,5 тонны, 4 тонны, 2,5 тонны. 3. $x < 2, x = 3, x > 4$. 4. $2 < x < \frac{5}{2}, \frac{5}{2} < x < 3$. 5. $\frac{18}{7}$.

Отд. планирования и экономич. кибернетики экономич. ф-та

1. $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi, x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 2. 6 тонн, 3 тонны, 1,5 тонны. 3. $x < 2, x = 3, x > 4$. 4. $2 < x < \frac{5}{2}, \frac{5}{2} < x < 3$. 5. $\frac{27}{10}$. 6. При $a = \frac{4}{3}$.

Факультет психологии. 1. $a_4 = \frac{1}{2}$. 2. $x = 4$. 3. 10. 4. $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, x = \pi + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 5. $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Отд. структурной и прикладной лингвистики филологич. ф-та

1. $x = \pm \arccos \frac{\sqrt{19}-2}{5} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 2. $x = -1$. 3. $x \leq -8,5$ или $x > \frac{\sqrt{185}-9}{2}$. 4. $AB = 2\sqrt{3}$ см. 5. $-\frac{2}{3} < x < 0$.

1988 год

Механико-математический факультет. 1. $n\pi, \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 2. $(0, \frac{1}{4}) \cup (1, \frac{5}{4})$. 3. $7 \cos 40^\circ \operatorname{tg} 20^\circ$. 4. $\arccos \frac{5}{8}$. 5. $\frac{9}{10}$ мин. 6. $[-2\pi, 0) \cup (2\pi, 4\pi]$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики. 1. 50.

2. $x = \frac{\pi}{6}(2n + 1), x = \frac{1}{2}(-1)^n \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right) + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$. 3. 40.

4. $[\frac{a+3}{3a+2}, \frac{1-a}{2-3a}]$, где $a = \log_3 2$. 5. $\{\frac{3}{2}\} \cup \{\frac{5}{3}\} \cup [2, 4)$. 6. $\frac{42+12\sqrt{11}}{5}$.

Физический факультет. 1. $(-1)^n \arcsin(2 - \sqrt{3}) + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 2. $R \sin 2\alpha$.

3. -1 . 4. $2 \operatorname{arctg}(5 \operatorname{tg} \alpha)$. 5. 1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{-7 \pm 4\sqrt{2}}{2}$. 6. $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$.

Химический факультет. 1. 3. 2. $-\frac{\pi}{4} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 3. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. 4. 4. 5. -2 и -1 .

Биологический факультет. 1. $\frac{\pi}{3}$. 2. $(-2, 2)$. 3. 2 и 3. 4. 90° и 30° . 5. $(0, 1)$.

Факультет почвоведения. 1. $(-1)^n \arcsin(\frac{1-\sqrt{10}}{3}) + n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

2. $4\sqrt{3} \sin 7^\circ$. 3. $\log_{2/5} 2, -\log_{2/5} 3$. 4. Нельзя. 5. $\frac{1}{2}, -2$.

Геологический факультет. 1. $x = 2$. 2. $x \geq -3, x = -4$. 3. $x = 2, x = \frac{1}{6}$.

4. $R \doteq \frac{91}{30}(6 - \sqrt{6})$. 5. Скорость по шоссе — 40 км/час, по грунтовой дороге — 30 км/час. 6. $a \in [\frac{1}{3}, \frac{33}{32}]$.

Географический факультет. 1. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$. 2. $(\frac{1}{2}, +\infty)$. 3. $\frac{3}{4}$. 4. 6.

Отд. политической экономии экономического ф-та. 1. $\sqrt[3]{4} + \sqrt{2} > 3$.

2. $x < -7, x \geq 2$. 3. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}, x = \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$. 4. $\frac{15}{2}$. 5. 11. 6. $-\frac{12}{5} \leq a \leq 0$.

Отд. планирования и экономич. кибернетики экономич. ф-та

1. $\sqrt[3]{4} + \sqrt{2} > 3$. 2. $x = \frac{2}{9}\pi + \frac{2}{3}n\pi, x = \frac{2}{3}\pi + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 3. $x < -7, -5 < x \leq -3, x \geq 2$. 4. $\frac{15}{2}$. 5. 11. 6. $a = 1$.

Факультет психологии. 1. $2n\pi, (-1)^n \frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 2. $-5, -\frac{4}{5}, 2$.

3. $[-6, \frac{11+\sqrt{157}}{4}]$. 4. 60. 5. $\frac{7}{2}$. 6. $\frac{1}{18}$.

Отд. структурной и прикладной лингвистики филологич. ф-та

1. 2. 2. $(\frac{17}{4}, -\frac{1}{8}), (-\frac{23}{4}, \frac{39}{8})$. 3. $-\frac{\pi}{12}, \pm \frac{\pi}{4}$. 4. $4 + 2\sqrt{7}$. 5. 23.

1989 год

Механико-математический факультет. 1. $x = \pm \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $-\frac{1}{4} < x < 1$, $\frac{3+\sqrt{5}}{4} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. 3. $S = 4$. 4. $x = \sqrt{2}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 5. $V = \frac{32}{3}\pi$. 6. $z = \sqrt{5}$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики. 1. Можно. 2. $x = \frac{1}{2}$. 3. На 48 мин. 4. $x \in \{\frac{3}{2}\} \cup [-\frac{\pi}{3} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi) \cup (\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi]$, $k = 1, 2, \dots$. 5. $a_1 = 2\pi - 8$, $a_2 = 2\pi - 1$, $a_3 = 2\pi$. 6. $r = \frac{8}{7}(2\sqrt{2} - 1)$.

Физический факультет. 1. $\frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $\frac{a^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}$. 3. 8. 4. $\frac{r}{a} = \frac{1}{3 + \sqrt{21}}$. 5. Корни уравнения существуют при $p = 0$ (нулевой корень) и при $p \geq 4$, когда оба корня положительны. 6. $\sqrt{Rr}$, $\sqrt{\frac{r}{R}}$.

Химический факультет. 1. $x < -2$, $x > 1$. 2. 2. 3. $\frac{\pi}{4} + 2n\pi$, $\arctg 2 + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 4. $2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ м, $2\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$ м. 5. $-\frac{1}{5}$.

Биологический факультет. 1. $x = 3$. 2. $\frac{1}{10}$. 3. $x = \frac{n\pi}{2}$, $x = \pm \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 4. $\arcsin \frac{1}{28}(7\sqrt{3} - \sqrt{77})$. 5. $\frac{4}{3}\sqrt{6}$.

Факультет почвоведения. 1. $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = \pm \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. 390 км. 3. $-2 < x < -\frac{1}{2}$, $x \neq -1$, $0 < x \leq 4$. 4. $\frac{5}{12}\sqrt{13}$. 5. $x = 2$.

Геологический факультет. 1. $a < b$. 2. $x \leq -1$, $1 < x \leq 2$. 3. $x = \frac{3}{4}\pi$. 4. $AD = 3 - \sqrt{3}$. 5. 60 л. 6. $a < -3$, $1 < a < 6$.

Географический факультет. 1. $-\frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $-\frac{5}{6}\pi + n\pi$, $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. 15 км/час. 3. $(0, 3) \cup (\frac{25}{8}, \sqrt{10})$. 4. 6π . 5. $\sqrt{3}$.

Экономический факультет. 1. $x \in (-4, -3] \cup [3, 5)$. 2. 1. 3. $x = -2$, $x = 4$. 4. $x_1 = \pi + \arcsin \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \pi - \arcsin \frac{\pi}{12}$. 5. $\angle CDB = \pi - \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}}$. 6. $\{(0, 3); (2, 1); (0, 2); (-2, 0)\}$.

Факультет психологии. 1. $(-\infty, -3 - \sqrt{2}) \cup (-4, -3 + \sqrt{2})$. 2. $\pm \arccos(-\frac{1}{3}) + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $x_1 = 5$, $y_1 = 0$; $x_2 = \frac{1}{5}$, $y_2 = 2$. 4. $\sqrt{r^2 + (p - a)^2}$. 5. Если $a < 0$, то $\emptyset$; если $a = 0$, то $x > 0$; если $a > 0$, то $x \in [-\frac{a}{3}, 0) \cup (8a, +\infty)$.

Отд. структурной и прикладной лингвистики филологич. ф-та
1. $-\frac{\pi}{2} \pm \arccos \frac{3}{4} + 2n\pi$, $\frac{2}{3}\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $x < -\frac{1}{2}$. 3. $\sqrt{17} - 4$. 4. $2\sqrt{21} - 9$. 5. $-\frac{17}{48}$.

Философский факультет. 1. $(1, 2) \cup (3, +\infty)$. 2. $x = \frac{1}{4}$. 3. $S_A = 60$ м. 4. $y_{\max} = 0$ (в точке $x = 0$). 5. $(\alpha, \beta) = (-2, 6)$ или $(\alpha, \beta) = (6, -2)$.

1990 год

Механико-математический факультет. 1. $S = \frac{3(3\sqrt{3}-4)}{2}$. 2. $x = \frac{4}{3}$; $x = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $-2 \leq x < -1$, $0 \leq x \leq 1$. 4. $a = 0$, $a = 2 \sin 1$. 5. $x = \frac{4}{5}$, $y = 4$, $z = 4$. 6. $R = \sqrt{3}$, $H = \frac{12\sqrt{3}}{25}$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики. 1. $x < -2, x > 2$. 2. $a_{12} = 17$. 3. $x = \frac{1}{2}(-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$. 4. $\frac{27-4\sqrt{66}}{9} \leq v \leq \frac{8-\sqrt{85}}{3}, \frac{17+\sqrt{349}}{6} \leq v \leq \frac{27+4\sqrt{66}}{9}$. 5. $\operatorname{tg}(\angle ABC) = -\sqrt{15}$. 6. $a \geq -\frac{7}{2}$.

Физический факультет. 1. $x = \pm(3 + \sqrt{11})$. 2. $S = \frac{2}{3}l^2 \sin 2\beta$. 3. $x = \frac{\pi}{10} + \frac{n\pi}{5}, x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 4. $r = \frac{6 \sin \alpha}{4 \sin(\alpha+\beta) \sin \beta}$. 5. При $k > -8, k \neq -3$ имеем $x = 4 - \sqrt{12+k}$. 6. 1) Указанное отношение q равно $\pi \sqrt{\frac{3-k}{5+k}}$; 2) $0 < q < \pi \sqrt{\frac{3}{5}}$, 3) $1 < k < 3$.

Химический факультет. 1. $x = 2$. 2. $x = \pm \frac{\pi}{3} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 3. $S = \frac{a}{4}(\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi)^2, P = (\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3})(1 + \frac{a}{2} + \sqrt{1 + \frac{a^2}{4}})$. 4. $V = 750 \text{ м}^3$. 5. $S = \frac{3}{2}\sqrt{183}$.

Биологический факультет. 1. $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 2. $x > \log_9 \frac{11}{3}$. 3. 45 км/час. 4. $\frac{2\sqrt{510}}{15}$. 5. $a = \frac{4k\pi(1-4l)}{1+2in}, k \neq 0; y = \frac{1+2m}{8k}, b = \frac{\pm 6\pi k + 16\pi k}{16\pi k^2 + 2m + 1}, x - 2\pi k, z = \frac{\operatorname{arctg} 2 \pm n\pi}{6}, k, l, m, n \in \mathbb{Z}$.

Факультет почвоведения. 1. $x = \log_3 \frac{9}{2}$. 2. 18 часов. 3. $\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} \text{ см}$. 4. $\min y(x) = 1 - 2\pi$. 5. $x > -3$. 6. $x < 0$.

Геологический факультет. 1. $x = 1$. 2. $S = 3$. 3. $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 4. $0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 < x \leq \sqrt[5]{9}$. 5. $(3, 3); (-3, -3); (2\sqrt{3}, \sqrt{3}); (-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$. 6. Таких углов ADC не существует.

Географический факультет. 1. $x = \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$. 2. ± 6 . 3. $1 \leq x < 5, x > 10$. 4. 1:6. 5. $a \in (5, 7)$.

Экономический факультет. 1. Не содержит. 2. $x \leq -1, x = \frac{1}{5}$. 3. $AC = \frac{1}{4} + \sqrt{5}$. 4. $k = 27, l = 189, m = 1323$. 5. $x = -\frac{4}{3}, x = \frac{2}{3}$. 6. $a = -3, a = -2$.

Факультет психологии. 1. $x = \pm \frac{5}{12}\pi + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 2. $0 < x < \log_3 2$. 3. $x \in [-1, 2] \cup [3, 4]$. 4. $S = 90\sqrt{3} \text{ м}^2$. 5. $0 < a < \frac{1}{51}$.

Отд. структурной и прикладной лингвистики филологич. ф-та

1. $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 2. $2 < x \leq \frac{7+\sqrt{17}}{4}$. 3. 2:5. 4. 2,1 кг. 5. 8.

1991 год

Механико-математический факультет. 1. $x = 2n\pi, x = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 2. $\frac{2}{9} \leq x < \frac{1}{2}$. 3. $\frac{3}{2}\pi + 1$. 4. $AC = \frac{n\pi}{m}$. 5. $p = -6, q = 7$. 6. 1.

Факультет вычислительной математики и кибернетики. 1. $x = 0$. 2. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 3. $1 < x \leq 5^{\log_2 7}$. 4. 6π . 5. Неравенство верно.

6. $R = 3\sqrt{\frac{17+\sqrt{201}}{22}}$.

Физический факультет. 1. $x = \operatorname{arctg}(-4) + n\pi, x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 2. $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$. 3. $(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$. 4. $\sqrt{a(a+b)}$. 5. $\{0\} \cup (2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{5})$. 6. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{20}, V = \frac{9}{4} Sd$.

Химический факультет. 1. $\pm \frac{1}{2}$. 2. $x > -\frac{1}{3}, x < -3$. 3. $(1, 1); (\frac{5}{2}, -2)$. 4. $\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$. 5. $4\sqrt{3} + 10\pi$.

Биологический факультет. 1. $x = (\log_2 5 - 2)^2$. 2. $x = \frac{2}{5}n\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + n\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. 8 мин 20 сек. 4. $9\frac{3}{5}$. 5. $a = 1$.

Факультет почвоведения. 1. -1. 2. $13\frac{1}{3}$, 40, 10 часов. 3. $2n\pi$, $\frac{5}{4}\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 4. $\frac{\sqrt{15}}{2}$. 5. $-\frac{1}{6}$ при $a \geq -1$; $-\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^2$ при $a < -1$.

Геологический факультет. 1. $\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{7}$; $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. (2, 3). 3. $x = 0$, $x > 16$. 4. $5^{\pm \sqrt{\log_3(2+\sqrt{3})}}$. 5. Если $a < -1$, то $x = 4$; если $a = -1$, то $x \geq 4$; если $-1 < a < 1$, то $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{4a-8}{a+1}$; если $a = 1$, то $-2 \leq x \leq 4$; если $a > 1$, то $x = 4$.

Географический факультет. 1. $x = \pm \arccos(-\frac{1}{4}) + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $5 < x \leq 6$. 3. $\{7, 7, 7\}$; $\{7(1-\sqrt{2}), 7, 7(1+\sqrt{2})\}$; $\{7(1+\sqrt{2}), 7, 7(1-\sqrt{2})\}$. 4. $S = 24$. 5. $|a| > \frac{5\sqrt{5}}{4}$.

Экономический факультет. 1. $x = \log_2(\frac{1}{2} + n)$, $x = \log_2(\frac{1}{12} + n)$, $x = \log_2(\frac{5}{12} + n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. 2. $-\frac{1}{6} \leq x < \frac{1}{2}$. 3. $BC = \frac{3}{2}(\sqrt{5} \pm 1)$. 4. $\min F(r) = F(\frac{5}{2}) = -\frac{7}{16}$. 5. $S = \frac{\pi}{2} + 1$. 6. $q = 0, 2, \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Факультет психологии. 1. $0 < x < \frac{5}{2}$. 2. $x = 2n\pi$, $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. $x = 81$, $y = 0$. 4. $\frac{189}{25}$. 5. $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}a$, $x_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}a$.

Отд. структурной и прикладной лингвистики филологич. ф-та
1. $11 \cdot 181$. 2. $x = \log_2 3$. 3. $x < -199$, $-66 < x < 200$. 4. $x = \pi + 2n\pi$, $x = 2 \arctg \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 5. $2\sqrt{3}$ см. 6. $p < -0,99$, $-0,02 < p < 0$, $0 < p < 0,01$.

Социально-экономический ф-т ИСАА. 1. $x = 3$. 2. $S = 72$. 3. $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 4. $x = 35$, $x = 45$. 5. $(0, \frac{1}{7}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$. 6. $\{-\sqrt{2}\} \cup (-1, 1)$.

1992 год

Механико-математический факультет. 1. $-\frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. На диагонали. 3. $6 \cdot \frac{a+b-3ab}{a+b+ab}$ при $a \neq 0$; 6 при $a = 0$. 4. 24. 5. 12. 6. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (2, +\infty)$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $\sqrt[3]{\frac{1990}{1991}} < \sqrt[3]{\frac{1991}{1992}}$. 2. $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. [2, 11). 4. 11 час 00 мин. 5. $S = \frac{5+\sqrt{15}}{4}$. 6. $a > 2\pi - \frac{1}{8}$.

Физический факультет. 1. $x < \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x > \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. 2. $(-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + n\pi$, $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. $x = 2^{2/11}$. 4. $BC = \sqrt{b^2 + \frac{4S^2}{b^2 \sin^2 \alpha}} - 4S \operatorname{ctg} \alpha$.

5. $a_1 = 2$, $d = 3$. 6. $\sqrt{pq}$. 7. Если $x < 0$, то $f(x) = 1 - \log_3 \frac{|x|}{3}$. Если $f(0) = 3$, то уравнение $f(x) = 3$ имеет три корня: 81, 0 и $-\frac{1}{9}$; если $f(0) \neq 3$ или $f(x)$ не определена в нуле, то это уравнение имеет два корня: 81 и $-\frac{1}{9}$.

8. $R \cdot \left| \frac{2 \cos \varphi - \sqrt{3}}{\sqrt{3} \sin \varphi} \right|$.

Химический факультет. 1. 5. 2. $\frac{\pi}{2} + 2n\pi \leq x < \frac{3}{4}\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. 14; 2. 4. 25% $\leq$ процентное содержание хрома $\leq 40\%$. 5. 1) таких a нет; 2) $(-\infty, -8) \cup (0, +\infty)$.

Биологический факультет. 1. $\frac{\pi}{15} \pm \frac{\pi}{30} + \frac{n\pi}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. 14. 3. 121,5 см². 4. (11, -9). 5. 4.

Факультет почвоведения. 1. $\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$, $\frac{\pi}{16} + \frac{n\pi}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. 90%. 3. 1. 4. $7\sqrt{2}$. 5. $(-\infty, \frac{1}{2})$.

Геологический факультет. 1. 184. 2. $x \geq \frac{\sqrt{2}-1}{3}$. 3. $\frac{1}{4}$, $7^{\frac{-3 \pm \sqrt{2}}{7}}$. 4. $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{2}{5} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 5. $\frac{155}{84}\sqrt{3}$. 6. $x_1 = 1$, $y_1 = 256\frac{1}{2}$, $z_1 = 128$, $x_2 = -1$, $y_2 = -256\frac{1}{2}$, $z_2 = -128$.

Географический факультет. 1. $n\pi$, $(-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. 3. $[\frac{1}{4}, 1) \cup [\sqrt{2}, +\infty)$. 4. $AB = \sqrt{13}$, $BC = 2\sqrt{13}$, $AC = 3\sqrt{5}$. 5. 2, $\frac{10}{3}$.

Экономический факультет. 1. -1. 2. $x = 1$, $3 < x \leq 5$. 3. 33 рабочих (для изготовления деталей А) и 113 рабочих (для изготовления деталей Б). 4. $\frac{\pi}{2}$. 5. $\frac{S_{AOD}}{S_{BOC}} = 2$. 6. $p = -5$, $-\frac{7}{2} \leq p \leq -\frac{13}{4}$.

Факультет психологии. 1. $\frac{3}{8} + n$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $(-2\log_2 3 + 4\log_3 2; 3\log_2 3 - 4\log_3 2)$. 3. 4. (2, 3). 5. $5\sqrt{2}$.

Отд. структурной и прикладной лингвистики филологич. ф-та

1. $\frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. (1, 4]. 3. $\frac{9}{11}\sqrt{3}$. 4. 60 км. 5. 0; $\pm \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Социально-экономич. ф-т ИСАА. 1. $x = -\log_2 9$. 2. $(-1)^n \arcsin \frac{2}{3} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $(-\infty, 4) \cup (4, 8) \cup [10, +\infty)$. 4. $\sqrt{14}$. 5. $(-\sqrt{10}, -\pi) \cup (-\pi, -3) \cup (3, \pi) \cup (\pi, \sqrt{10})$. 6. При $a = -3$ эта сумма наибольшая и равна 18.

1993 год

Механико-математический факультет. 1. $(-1, 0)$. 2. $[-3; 3]$. 3. $(\pi/6 + 2\pi k; -\pi/3 + 2\pi m)$, $(\pi/3 + \pi n; -\pi/6 + \pi(n + 2l))$, $k, m, n, l \in \mathbf{Z}$. 4. $15\sqrt{2}/8$. 5. $4R\sqrt{14}/7$. 6. 90 км.

Факультет вычислительной математики и кибернетики. 1. $2 - \sqrt{2} < x \leq 1$ или $3 \leq x < 2 + \sqrt{2}$. 2. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$. 3. $\log_3 4 \leq x \leq 3$. 4. $\frac{12}{5}$. 5. $b = -a^2 - 1$, $a \in \mathbf{R}$, $M_1(4; -2)$ или $a = b = 0$, $M_2(2; 0)$. 6. $|a| > 1$. При этом областью определения указанных функций является вся числовая ось.

Физический факультет. 1. $(0; \frac{1}{2})$. 2. $\frac{5}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $-\frac{5}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $m, n \in \mathbf{Z}$. 3. $2^{(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2}$. 4. $R \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. 5. $(-5; -2) \cup (-1; +\infty)$. 6. $\sqrt{ab}$. 7. $\pm \sqrt{3}$. 8. $(\frac{2R\sqrt{r+r}\sqrt{3R+r}}{2(R-r)})^2$.

Химический факультет. 1. $[-1; 1) \cup (1; 3]$. 2. 2, 4. 3. $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi m$, $k, m \in \mathbf{Z}$. 4. 8. 5. Нет решений.

Биологический факультет. 1. $2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. 1. 3. $(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{8})$. 4. 573. 5. 90°. 6. $(4; -3; 0)$, $(2; -1; 2)$.

Факультет почвоведения. 1. 16, 24, 40, 48. 2. $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $(-2; 0) \cup (0; 2)$. 4. 5, $\frac{5}{4}$. 5. $[-1; -\frac{1}{5}]$.

Геологический факультет. 1. 2. 2. $\pm \arcsin \frac{3}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. 3. $\frac{8}{3}$ часа. 4. $[-1; 0) \cup (0; 3]$. 5. 60°, 75°, 45°. 6. $[1; 2) \cup (2; 3)$.

Географический факультет. 1. 2. 2. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. 3. $(-2; 1) \cup \{2\}$

4. $\frac{25\sqrt{15}}{64}$ 5. $-\frac{5}{13}, -5$.

Экономический факультет. 1. $\log_3 4 < x < 1, x > \log_3 7$ 2. $\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ 3. $x = -3, 0 \leq x \leq 1$ 4. $10 + 2\sqrt{5}$ 5. 7 месяцев 6. 340.

Факультет психологии. 1. 2 2. $\{0; \frac{3-\sqrt{5}}{6}\}$ 3. $-\frac{\pi}{12}, 2\pi - \frac{\pi}{12}$ 4. $\frac{\pi}{4} \operatorname{tg}^2 \alpha$ 5. 1) $(1; \frac{2+\sqrt{13}}{4}]$; 2) $\frac{7}{3}$.

Социально-экономический факультет ИСАА. 1. $1 \leq x < 3$ 2. 28 3. $\sqrt{7}$ 4. $\frac{2}{3} < x < 1, 1 < x \leq 2$ 5. $(0; \pi + 2\pi n), n \in \mathbf{Z}$ 6. $-1 \leq a \leq 1$.

1994 год

Механико-математический факультет. 1. $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ 2. $(1 - \log_2 3; 1/6)$ 3. $[-\frac{1}{3}; 0) \cup (\frac{1}{5}; \frac{3-\sqrt{3}}{6})$ 4. $\sqrt{a(a-b)}$ 5. $\sqrt{8} - \sqrt{5}$ 6. 0; 1 при $a = 0$; $\frac{1-a+\sqrt{1+3a^2}}{2}$ при $a \in (-\frac{2}{\sqrt{3}}; 0) \cup (0; \frac{2}{\sqrt{3}})$; $\frac{1-a+\sqrt{1+3a^2}}{2}$; $\frac{-1-a+\sqrt{1+3a^2}}{2}$ при $a \in (-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}] \cup [\frac{2}{\sqrt{3}}; +\infty)$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики. 1. $x = \frac{1}{5}(-1)^n \arcsin(\sqrt{13} - 3) + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbf{Z}$ 2. $x = 3, 4 \geq x \geq 7$ 3. $u = 2\pi n, n = -1, -2, \dots$ 4. 60 5. $A_{30} = 5 + (1/5)^{29}$ 6. $BD = \sqrt{133}$.

Физический факультет. 1. $(\frac{1}{2}; 1)$ 2. $\arccos(\frac{5}{\sqrt{29}}) \pm \arccos(\frac{3}{\sqrt{29}}) + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ 3. 1; 3 4. $\frac{2m^2}{\sqrt{4m^2-1}-n^2}, \frac{2m^2}{\sqrt{4m^2-1}-n^2}, \frac{2m^2}{\sqrt{4m^2-1}-n^2}$ 5. 2, $\frac{1}{128}$ 6. $\sqrt{m^2+n^2}$ 7. $(-\infty; 20]$ 8. $\frac{2\alpha^2}{9\sqrt{3} \cos \alpha}$.

Химический факультет. 1. 0 2. $(1; +\infty)$ 3. $-\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$ 4. 9; 12 5. $(1; -\frac{\pi}{2})$.

Биологический факультет. 1. $(4; 1), (-2/3; 10/3)$ 2. Второе 3. $\frac{47}{24}, \frac{55}{24}, \frac{71}{24}$ 4. $\frac{18}{25+2\sqrt{130}+\sqrt{445}}$ 5. $[3 - \sqrt{6}; 2] \cup [5; 3 + \sqrt{6}]$.

Факультет почвоведения. 1. $\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi k, n, k \in \mathbf{Z}$ 2. $(2; 1), (-1; \frac{23}{2})$ 3. $[\frac{7-\sqrt{33}}{2}; 3)$ 4. $(2; \frac{\pi}{2} + 2\pi n), n \in \mathbf{Z}; (-2; b), b \in \mathbf{R}$ 5. $\frac{-2+\sqrt{54}}{4}$.

Геологический факультет. 1. Первое 2. 1 3. -4, 1 4. $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, \frac{\pi}{3} + \pi n, k, n \in \mathbf{Z}$ 5. $(1; 3)$ 6. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$ 7. 78,2 % 8. 9. 12 10. $\sqrt{\frac{3}{8}}$.

Географический факультет. 1. $\pi n, \frac{\pi}{4} + 2\pi k, n, k \in \mathbf{Z}$ 2. 1 3. $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < 1$ 4. $\frac{4}{\sqrt{17}}$ 5. $[2; 3) \cup (3; 4]$.

Экономический факультет. 1. $(0; 0), (3; 5), (-3; -5)$ 2. $[-3; 0]$ 3. $2\pi n, \pi + 2\pi m, n = -1, 0, 1, 2, \dots, m = -3, -4, \dots$ 4. $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 13$ 5. 300 или 600 6. 5 : 9.

Факультет психологии. 1. Да 2. $(-1; 1), (-\frac{1}{5}; \frac{7}{5})$ 3. $\frac{4-\sqrt{2}}{6}$ 4. $\frac{21}{23}$ 5. 432.

Социально-экономический факультет ИСАА. 1. 1; 5 2. 0; -2 3. $\frac{\pi}{6}$ 4. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ 5. 3 6. $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

1995 год

Механико-математический факультет. 1. -2 . 2. $(0, 1) \cup (1, 4) \cup (64, +\infty)$. 3. $x = \frac{\pi}{12} + 2\pi l$, $x = \frac{19\pi}{12} + 2\pi l$, $x = \pi l$, $x = \frac{2\pi}{3} + \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$.

4. $AD = 10$, $BC = 2$, $R = \frac{5\sqrt{5}}{2}$. 5. 75° . 6. $\{0, \pi, 2\pi\}$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики. 1. $n = -14$, $m = -1$. 2. $(x, y) \in \{(3, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, 3)\}$. 3. $S = \frac{1}{4}\sqrt{(4b^2 - a^2)(a^2 - b^2)}$. 4. $x \in [-13, -4\pi) \cup (-4\pi, -\frac{11\pi}{3}) \cup (-\frac{7\pi}{3}, -2\pi) \cup (-2\pi, -\frac{5\pi}{3}) \cup (-\frac{\pi}{3}, -1]$. 5. 156.

6. $\frac{36+31\sqrt{2}}{16}$.

Физический факультет. 1. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $(-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. 0. 3. $\{-4, 0\}$.

4. $2R \sin \alpha \sin \beta$. 5. $(0, 2)$. 6. $\frac{2}{3}H^3(\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1)$. 7. Если $a < 1$, то $x \geq 1$; если $a \geq 1$, то $x > ((a-1)\log_3 2)^2 - 1$. 8. $\sqrt{pq}$.

Химический факультет. 1. $[1, 2]$. 2. 1. 3. $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 4. 25. 5. $(0, 1)$, $(0, -1)$.

Биологический факультет. 1. $\{2, 16\}$. 2. $\{\frac{2}{3}, 2\}$. 3. $\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\}$.

4. 1085 и 30. 5. $\frac{3\pi}{7}$. 6. $\{-3, 9\}$.

Факультет почвоведения. 1. 50. 2. 2. 3. $(-\infty, -2] \cup (0, \frac{1}{4}]$. 4. $\frac{\pi}{6}$. 5. $(-2, 0)$.

Геологический факультет. 1. $x = 2$. 2. $|x| \geq 3$. 3. $x_1 = 0$, $y_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = 21$, $y_2 = 21$. 4. $1 < x < 5$; $x \leq \log_3 2$. 5. $\{\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{11}{6}, -\frac{11}{6}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$.

6. 9 кг. 7. $\sqrt{15}$. 8. $a \leq -99$.

Географический факультет. 1. $1 \pm \frac{1}{6} + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. 2. 16 км/ч. 3. $+\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

4. $\sqrt{7}$. 5. При $a \in (-\infty, -1 - \pi^2) \cup (1, +\infty)$ корней нет; при $a \in [-1 - \pi^2, 1)$ — два корня; при $a = 1$ — один корень.

Экономический факультет (отделение экономики). 1. $x \leq -2$, $x > \frac{49}{16}$. 2. $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. 36, $8\sqrt{19}$. 4. 210 тыс. р. 5. $-3 \leq x < -2$, $x = 1$.

6. Наименьшее значение равно $\frac{1}{5}$ и достигается при $a = \pm \frac{2}{5}$, $b = \frac{4}{5}$.

Экономический факультет (отделение менеджмента). 1. $x = 6$. 2. $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. $\frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}$. 4. 6 лет. 5. $AC = 3\sqrt{3} \pm 4$. 6. $p \leq -\frac{3}{2}$.

Факультет психологии. 1. $[-\frac{7}{2}, \frac{15}{2}]$. 2. $\{5\} \cup (4 + \sqrt{2}, +\infty)$. 3. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 4. 8. 5. 2.

Институт стран Азии и Африки. 1. $x = -1$. 2. $x = 5$. 3. $r_1 = 100$.

4. $AC = \sqrt{3}$. 5. $1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; $x = 3$. 6. $\frac{2}{3} \leq a$.

1996 год

Механико-математический факультет. 1. $\pm \arccos \frac{\sqrt{7}}{5} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 2. $[\log_4(3 + \frac{1}{2}\sqrt{30}); +\infty)$. 3. 48. 4. $\{(\arctg \frac{1}{6}; y)\}$, где $y \geq (3(1 - \frac{1}{4}(\arctg \frac{1}{6} - \frac{\pi}{4})^2))^{-\frac{1}{2}}$. 5. $\frac{1}{49}(48\sqrt{13} - 74\sqrt{3})$. 6. ± 1 ; $\pm \frac{1}{10}(2 + \sqrt{19})$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики. 1. 70. 2. 5 литров. 3. При $a \in (-\infty; -\frac{3}{2})$ $x = \log_5 \frac{a-1+\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$, при $a \in [-\frac{3}{2}; 11)$ решений нет, при $a = 11$ $x = 1$, при $a \in (11; +\infty)$ $x_{1,2} = \log_5 \frac{a-1 \pm \sqrt{a^2-10a-11}}{2}$. Единственное решение при $a \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup \{11\}$. 4. $x \in [-\frac{5-2\sqrt{3}}{26}; 0]$. 5. $x = \frac{217-5\sqrt{415}}{29}$, $y = \frac{180+2\sqrt{415}}{29}$. 6. 1) $AM = 1$; 2) $AM = 4$.

Физический факультет. 1. $\frac{\pi n}{2}$; $(-1)^n \frac{\pi}{30} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $-1 < x < 0$, $1 < x < 4$. 3. 1. 4. $\frac{2\pi}{8}$. 5. $(-2; -2)$, $(-2; 2)$. 6. $d^3 \sin \beta \sin \gamma \sqrt{\cos^2 \gamma - \sin^2 \beta}$. 7. $d\sqrt{2 + \frac{d}{c}}$. 8. При $a < -1$, $a = 0$, $a > 1$ — 2 решения, при $a = \pm 1$ — 4 решения, при $-1 < a < 1$, $a \neq 0$ — 6 решений.

Химический факультет. 1. $\frac{\pi}{2} + \pi m$, $\frac{\pi n}{3} + \frac{\pi}{6}$, $m, n \in \mathbb{Z}$. 2. $(4, +\infty)$. 3. $\begin{cases} x = 32, \\ y = 2. \end{cases}$ 4. 9. 5. 9.

Биологический факультет. 1. πn ; $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. 2. -5 , 11 . 3. $(-74, 6)$. 4. $32\pi\sqrt{78}$ (см²). 5. $(1; 5)$, $(1; 6)$, $(2; 6)$.

Факультет почвоведения. 1. 47. 2. $(-2; -\sqrt{\frac{1}{3}}) \cup (\sqrt{\frac{1}{3}}; 2)$. 3. 2; $\frac{1}{8}$. 4. 0; π ; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{9}$. 5. $4\sqrt{3}$. 5. 2; $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Геологический факультет. 1. $x = 17$. 2. $x = -3$, $x = -1$. 3. $x = \frac{\pi}{14}$, $\frac{3\pi}{14}$, $\frac{5\pi}{14}$, $\frac{9\pi}{14}$, $\frac{11\pi}{14}$, $\frac{13\pi}{14}$. 4. $x < -2$ и $-1 < x < -\frac{1}{2}$. 5. $(0, 0)$; $(1, 6)$; $(\frac{7}{5}, -\frac{42}{5})$. 6. $\frac{1}{13}$. 7. $\frac{4\pi}{5}$ см². 8. $b = -1$.

Географический факультет. 1. 6. 2. $-\frac{4}{3}$. 3. $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 4. $3(2\sqrt{6} + 1)$. 5. 1) $\begin{cases} q = -2 \\ p \neq -\frac{3}{5} \end{cases}$ или $\begin{cases} p \in \{-1; -3\} \\ q \in \mathbb{R} \end{cases}$. 2) $\frac{-1 \pm 7}{2}$.

Экономический факультет (отделение экономики). 1. $x = -2$; $y = -2$. 2. $\frac{3}{4} < x \leq 1$. 3. $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 4. 10500 тыс. руб. и 12600 тыс. руб. 5. $BL = 3\sqrt{2}$. 6. $\frac{5\pi}{2} < a \leq \frac{7\pi}{2}$.

Экономический факультет (отделение менеджмента). 1. $-4 \leq x < -1$; $1 < x \leq 2$. 2. $x = -1$, $y = 1$. 3. 11000 тыс. руб. и 12600 тыс. руб. 4. $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 5. 5. 6. $p = 6$.

Факультет психологии. 1. 0. 2. $[-6; 3 - \sqrt{3}) \cup (3 + \sqrt{3}; 12]$. 3. $(-\infty; +\infty)$. 4. $\frac{7}{3\sqrt{3}}$. 5. $\frac{2}{5}$.

Институт стран Азии и Африки. 1. $x \geq \log_3 4$. 2. $S = 12$. 3. $x \in [-5; -\frac{4}{3}\pi) \cup (-\frac{4}{3}\pi; -3) \cup (3; \frac{7}{3}\pi) \cup (\frac{7}{3}\pi; 8]$. 4. $x = -3$; $-2 \leq x < 6$. 5. $\arccos(-\frac{\sqrt{6}}{4})$. 6. $a \in (-\infty; -11) \cup (-7; -6,5)$.

1997 год

Механико-математический факультет. 1. $\pi/6 + 2\pi n$, πk , $n, k \in \mathbb{Z}$. 2. $[\log_2 \frac{1}{3}; 2) \cup (2; \log_2 \frac{13}{3})$. 3. 160 км. 4. $1/2, 3/4$. 5. $\emptyset$ при $a < -1$; $\pm\sqrt{\frac{2-a}{6}}$, $\pm\sqrt{\frac{a}{2}}$ при $-1 \leq a \leq 0$; $\pm\sqrt{\frac{2-a}{6}}$ при $0 < a < 1/2$; $\pm\sqrt{\frac{2-a}{6}}$, 0 при

$1/2 \leq a \leq 2$; 0 при $a > 2$. 6. $18/\sqrt{5}$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики. 1. 10 км/ч .

2. $\frac{-1}{\sqrt{2}} < x < \frac{-1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$. 3. $\pi - (\arcsin \frac{3}{\sqrt{20}} - \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}) + 2\pi n$, $\arcsin \frac{3}{\sqrt{20}} + \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} + 2\pi m$, $m, n \in \mathbb{Z}$. 4. $(\log_2(\sqrt{6} - 2), \log_3((\sqrt{6} - 2)/2))$.

5. $\frac{21 - \sqrt{357}}{4}$. 6. $\frac{11 - \sqrt{77}}{2} \leq a < 2$, $9 < a \leq \frac{11 + \sqrt{77}}{2}$.

Физический факультет. 1. $\pi/4 + \pi k/2$, $k \in \mathbb{Z}$. 2. $\frac{1}{1 - \log_4 5}$. 3. $-1 \leq x \leq$

$5^{(9 + \sqrt{5})/2} - 2$. 4. $2 + \sqrt{6}$. 5. $(5/2; -5/2)$. 6. $\frac{21\sqrt{15}}{10}$. 7. $-1 \leq x < \left(\frac{a-2}{a-1}\right)^2 - 1$ при

$a < 1$; $x \geq -1$ при $1 \leq a < 2$; $x > \left(\frac{a-2}{a-1}\right)^2 - 1$ при $a \geq 2$. 8. bc/a .

Химический факультет. 1. $\frac{3 - \sqrt{17}}{2}$. 2. $(-\infty, 0)$. 3. $\pm \arccos \frac{\sqrt{2}-4}{4} + 2\pi n$,

$n \in \mathbb{Z}$. 4. 6; нет. 5. 25 см^2 . 6. $\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}, \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$.

Биологический факультет. 1. $\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$. 2. $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n, (-1)^k \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) +$

πk , $n, k \in \mathbb{Z}$. 3. $[-5 + \sqrt{23}; -\frac{1}{8}] \cup [\frac{3}{8}; 3 - \sqrt{5}] \cup [3 + \sqrt{5}; +\infty)$. 4. 60. 5. $1/2$.

6. $\{\frac{11\pi}{24}; \frac{\pi}{2}\}$.

Факультет почвоведения. 1. 9. 2. $(\frac{1}{5}; 1) \cup (1, +\infty)$. 3. $\pi k, \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$,

$k, n \in \mathbb{Z}$. 4. 8. 5. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. 7. 6. $a \leq x \leq -a$ при $a < -1$; $-\sqrt{-(2a+1)} \leq x \leq$

$\sqrt{-(2a+1)}$ при $-1 \leq a \leq -1/2$; $\emptyset$ при $a \geq -1/2$.

Геологический факультет. 1. Одно решение. 2. $-\pi/4 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. $x \in [0, 100] \cup (400, +\infty)$. 4. $16/9$. 5. $x > 1$. 6. $29 : 18$. 7. $(1; 3)$, $(3; 1)$,

$\left(\frac{-(15 - \sqrt{1141/5})}{2}; \frac{-(15 + \sqrt{1141/5})}{2}\right)$, $\left(\frac{-(15 + \sqrt{1141/5})}{2}; \frac{-(15 - \sqrt{1141/5})}{2}\right)$. 8. $\alpha < -\frac{4}{5}$,

$-\frac{4}{5} < \alpha < 0$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha > 1$.

Географический факультет. 1. $(\frac{3}{7}; \frac{11}{7})$. 2. $1 - \sqrt{3}$. 3. 3. 4. $1/3$. 5. $1 + \sqrt{5/2}$.

6. $y = -(x^2 + 1)$; $y = \pm(x^2 - 1)$.

Факультет экономики. 1. $(-1; 3)$, $(1; -1)$. 2. $x \leq -3$, $x = 5$. 3. $AD =$

$3/\sin 15^\circ$ или $AD = 3/\sin 75^\circ$. 4. $12,5\%$ и 15% . 5. $x = -1/2 + 8k$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. $112\pi - 12\sqrt{3}$.

Факультет психологии.

1. $(-1)^n \arcsin \frac{2 - \sqrt{13}}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $\left(\frac{21 - \sqrt{89}}{8}; +\infty\right)$; 3. 162. 4. $[17, +\infty)$. 5. $\frac{625}{121}$.

6. $a = 4$, $b \in (-3 - \sqrt{45}; 3 - \sqrt{45}) \cup (-3 + \sqrt{45}; 3 + \sqrt{45})$.

Социологический факультет. 1. $(-\infty; -1)$.

2. 1) $\frac{4\sqrt{2}}{5}$; 2) $\frac{4\sqrt{2}}{5 + 4\sqrt{2}} \sqrt{41 - 10\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}$, $\frac{5}{5 + 4\sqrt{2}} \sqrt{41 - 10\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}$ 3. 1.

4. 27. 5. $(7/9; +\infty)$. 6. $\{\frac{3\pi}{4}\} \cup [\frac{7}{2}; \frac{9}{2})$.

Институт стран Азии и Африки МГУ. 1. $1/3$. 2. $x = 5/4$, $x \geq 5$.

3. $x = -\pi/4 + \pi k$, $x = \arctg 4 + 2\pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$. 4. $x = 3/2$, $x > 2$. 5. $S = 2\pi + 7$.

6. $5 : 4$. 7. $(4; 3)$, $(6; 13)$, $(14; -5)$.

1998 год

Механико-математический факультет. 1. $[3; \frac{11+\sqrt{61}}{2}]$. 2. $(-\infty; -1) \cup (2/5; 1/2] \cup (1; +\infty)$. 3. $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 4. $\arccos \frac{3}{4}$. 5. $a = \frac{9}{4} + 4n, n \in \mathbb{Z}$. 6. 48.

Факультет вычислительной математики и кибернетики.

1. $(-\frac{9+\sqrt{57}}{2}; -2) \cup (-2; -1) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$. 2. $(-1; 0) \cup [1; 5)$. 3. $\pi \pm \arctg 2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 4. 216. 5. $a \in (-\infty; -\sqrt{13}] \cup [\frac{11}{3}; +\infty)$. 6. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}$.

Физический факультет. 1. $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$. 2. 4; 8. 3. $(-\infty; \frac{3}{2})$. 4. $\frac{b \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha+\beta)}$. 5. $(-1, 1)$. 6. $R^2 \cos \alpha (1 + \sin \alpha)$. 7. Если $0 < a < 1$, то $(-\infty; \log_a \frac{5}{3-a})$; если $1 < a < 3$, то $(\log_a \frac{5}{3}; \log_a \frac{5}{3-a})$; если $a \geq 3$, то $(\log_a \frac{5}{3}; +\infty)$. 8. $\sqrt{\frac{8(1-\cos \alpha)}{1+2\cos \alpha}}$.

Химический факультет. 1. 0. 2. $[-3; 1)$. 3. $(-1, 1, 2), (-1, 1, -2)$. 4. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 5. $\frac{27}{4}$. 6. $\frac{1}{4}$.

Биологический факультет. 1. $\frac{20\sqrt{5}-3}{60+18\sqrt{5}}$. 2. $[-7; -2] \cup [-1; +\infty)$. 3. $\frac{\pi}{2} + \pi n; \arcsin \frac{2}{3} + \pi(2k+1); n, k \in \mathbb{Z}$. 4. $6\sqrt{3}$. 5. $(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}, -1), n \in \mathbb{Z}$.

Факультет почвоведения. 1. $\frac{7}{9}$. 2. $-\frac{1}{\sqrt{10}}$. 3. $(-3; -2) \cup \{-1\} \cup (0; 1)$. 4. $(-1, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{3}{2}, 9)$. 5. $\frac{25}{72}$. 6. а) $a \in [-\sqrt{26}-1; \sqrt{26}+1]$; б) $a \in [-\sqrt{26}+1; \sqrt{26}-1]$.

Геологический факультет. 1. -1. 2. $\pm \sqrt{\frac{3}{2}}; \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$. 3. $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}; \frac{1}{3} \arccotg 6 + \frac{\pi n}{3}; k, n \in \mathbb{Z}$. 4. 1000 л. 5. $(2; \frac{19}{9}) \cup (3; 2 + \sqrt{3})$. 6. 319. 7. $(3, 2), (-2, -3), (3 + \sqrt{10}, -3 + \sqrt{10}), (3 - \sqrt{10}, -3 - \sqrt{10})$. 8. $a = 0$ или $a = 1$.

Географический факультет. 1. $(\frac{1}{8}; \frac{1}{6}]$. 2. -2. 3. 98. 4. $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 5. $\frac{9}{4}$. 6. $(5k+3, 10k^2+5k), k \in \mathbb{Z}$.

Экономический факультет 1. $(\frac{1}{4}; 3) \cup [\frac{\sqrt{41}+7}{4}; \frac{7}{2})$. 2. $\pi k; \pi - \arcsin \frac{\sqrt{37}-1}{6} + 2\pi n; k, n \in \mathbb{Z}$. 3. $(17; 248)$. 4. Если точка K' лежит на отрезке $P'R'$, а точка L' — на отрезке $Q'S'$, то $\sqrt{10}$. Если обе эти точки не лежат на соответствующих отрезках, то $\sqrt{346}$. Если K' лежит на отрезке, а L' — нет, то расстояние от K' до L' может быть любым числом, большим $\frac{\sqrt{8194}}{5}$. Если K' не лежит на соответствующем отрезке, а L' лежит, то расстояние от K' до L' может быть любым числом, большим $\frac{\sqrt{634}}{5}$. 5. $c \in (3 - 2\sqrt{3}; -6 + 2\sqrt{15})$. 6. $\frac{a}{2\sqrt{3}} \sqrt{r^2 - a^2/3}$. 7. 426 и 142 рубля.

Факультет психологии. 1. $-\frac{17}{5}; \frac{11}{3}$. 2. Второе. 3. $[-\frac{7}{4}; -\frac{2}{3}) \cup [\frac{17+\sqrt{127}}{9}; 8)$. 4. $\frac{a+4\pi n}{20}$, где $n \in \mathbb{Z}, -2 \leq n \leq 6, n \neq 2$; $\frac{\pi+2\pi n}{8}$, где $n \in \mathbb{Z}, -1 \leq n \leq 2$. 5. $\frac{2b+1}{c}$. 6. Либо $a = -1$ и b — любое целое число, большее 2, либо $a = -2$ и b — любое целое число, большее 3.

Социологический факультет. 1. $(0; 12]$. 2. $\{-3\}$. 3. 3, 9%. 4. $\frac{3}{4}(\sqrt{15}-\sqrt{3})$.

5. 21. 6. $\frac{\sqrt{3274}}{32}$.

Институт стран Азии и Африки. 1. $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}; \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}; k, n \in \mathbb{Z}$.

2. $\pm \sqrt{\log_2 \frac{6+\sqrt{26}}{5}}$. 3. $(-2; 2) \cup (2; 3) \cup (6; +\infty)$. 4. $8\sqrt{\frac{2}{3}} > 6,5$. 5. $(\frac{3}{2}; 2) \cup (2; +\infty)$.

6. 49 и 83. 7. $a = 2$.

Филологический факультет. 1. $\{-3; 1\}$. 2. $2\sqrt{10}$. 3. $\sqrt{3}-2$. 4. а) И. б) Р.

5. 0. 6. $a \in (1; 5)$.

1999 год

Механико-математический факультет. 1. $(-\infty; -\frac{7}{4}] \cup \{0\}$. 2. -2 .

3. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$. 4. а) 1 : 1; 5 : 8; б) 5 : 14. 5. $a \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

6. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{23}{6}}$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики. 1. Первое

из чисел больше. 2. $\frac{16\pi}{3} + 4\sqrt{3}$. 3. $[\frac{-3-\sqrt{5}}{2}; -\frac{5}{2}] \cup (-\frac{5}{2}; \frac{-3-\sqrt{3}}{2}] \cup (-1; \frac{-3+\sqrt{3}}{2}]$.

4. $\frac{3+\sqrt{3}}{2+\sqrt{7}}$. 5. $\frac{\pi}{6} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$. 6. $4(\sqrt{3}+1)$.

Физический факультет. 1. $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}; (-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}; k, n \in \mathbb{Z}$. 2. $(-\infty; -\frac{22}{7}) \cup (-2; +\infty)$. 3. 1. 4. $(\log_5 3, \log_3 5)$. 5. $-\sqrt{10}$. 6. $\frac{m^2-k^2}{a}$. 7. $\arccos \frac{\sqrt{85}-2}{9}$. 8. Если $0 < m < \frac{1}{4}$, то $(-5^{2m}; -1) \cup (1; 5^{2m})$; если $m > \frac{1}{4}$, то $(-\infty; -5^{2m}) \cup (5^{2m}; +\infty)$. Отрезок длиной 10 получается при $m = \frac{1}{2}$.

Химический факультет. 1. $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup [2; +\infty)$. 2. $-3, -4, -\frac{5\pi}{4}$.

3. $(-3; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; \frac{1}{3})$. 4. 6. 5. 8. 6. $a = \pm 1$. 7. $3 \cdot 2^{1000} - 4$.

Биологический факультет. 1. $\pm \frac{1}{2} \arccos(\frac{3-\sqrt{79}}{10}) + \pi k; k \in \mathbb{Z}$. 2.

$[\frac{1-\sqrt{41}}{2}; -2) \cup (-2; -1] \cup [2; +\infty)$. 3. -1 . 4. $\frac{55}{2}$. 5. $\frac{53}{99} \leq y < 1$ или $1 < y \leq 2$.

6. 7 : 3.

Факультет почвоведения. 1. 3. 2. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; k, n \in \mathbb{Z}$.

3. $\pm \sqrt{\frac{2}{3}}$. 4. $[0; +\infty)$. 5. $\frac{2}{3}$ л. 6. $\frac{\sqrt{6}}{12}$. 7. Если $b \leq -1$, то $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$; если $-1 < b < 0$, то $[-\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}; -1] \cup [1; +\infty)$; если $b = 0$, то $\{-1\} \cup [1; +\infty)$.

Геологический факультет. 1. $\{0\} \cup (-3; -2]$. 2. $A = -2 < -1,999$.

3. $\frac{3}{4}(\pi + 2)$. 4. $90^\circ, 10^\circ, 80^\circ$. 5. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \pm \frac{\pi}{3} + \pi n; k, n \in \mathbb{Z}$. 6. 6 членов, сумма равна 66. 7. $128\sqrt{2}$. 8. $[8; 4 + 2\sqrt{6}) \cup \{\frac{\pi}{2}\} \cup \{\frac{5\pi}{2}\}$.

Географический факультет. 1. 1. 2. $2 + \sqrt{2}$. 3. 7 : 9. 4. $a = \pm \frac{1}{4}; \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$.

5. 1. 6. $\frac{3}{4}\sqrt{769}$.

Экономический факультет. 1. $(-3; -2) \cup (3; 4]$. 2. $(0; 3]$. 3. 24 дня.

4. $\frac{42\sqrt{51}}{625}a^2$. 5. $-\frac{\pi}{26}; \frac{\pi}{34}$. 6. $\frac{d^3}{3} \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 2\beta}$. 7. Если $b = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, то

одно решение $(\frac{1}{\sqrt[5]{5}}, 0, 0)$. Если $b = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{8}}$, то два решения: $(\frac{1}{\sqrt[5]{5}}, 1, \frac{\pi}{4})$

и $(\frac{1}{\sqrt[5]{5}}, -1, -\frac{\pi}{4})$.

Факультет психологии. 1. $(\frac{2}{5}; \frac{17+\sqrt{73}}{18})$. 2. $5^{\log_3(-\frac{7+\sqrt{93}}{2})}$. 3. $((-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, +\frac{\pi}{6} + 2\pi k); ((-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n, \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k); k, n \in \mathbb{Z}$. 4. $a = 9$; множество значений есть $[-\frac{4}{3}; 1]$. 5. $\frac{153}{16\sqrt{35}}$. 6. $\frac{4}{9} < p \leq \frac{5}{11}$.

Социологический факультет. 1. $\frac{15-\sqrt{21}}{2}$. 2. Первый член 2, разность $-\frac{1}{4}$. 3. Радиус равен $\frac{5}{2}$, площадь равна $\frac{234}{5}$. 4. Сначала три объявления в газету, затем четыре рекламы по радио. 5. $(-\infty; -4) \cup \{0\} \cup \{1\} \cup (4; +\infty)$. 6. $a \in (-\infty; -1] \cup \{0\} \cup (4; +\infty)$.

Институт стран Азии и Африки. 1. $1; \frac{1}{2}(3 - \frac{1}{\sqrt{10}})$. 2. $A = 1 > \frac{5}{7}$. 3. $\frac{\pi k}{5}$; $\pm \frac{1}{2} \arccos \frac{3-\sqrt{17}}{4} + \pi n; k, n \in \mathbb{Z}$. 4. $\sqrt{3} \cdot \sin \frac{10\pi}{13} \cos \frac{5\pi}{13}$. 5. $(-\infty; -11) \cup [\sqrt{5}; 3)$. 6. $2(\sqrt{3} - 1)$. 7. $(3, \sqrt{2})$.

Филологический факультет. 1. $2/3$. 2. $(-\infty; -9) \cup (\frac{2}{3}; 1) \cup [\frac{11}{2}; +\infty)$. 3. 15. 4. $\arcsin(\frac{\sqrt{17}-1}{4}) + \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 5. $(y, z) = (-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{6} + \pi n, -\frac{\pi}{12} + \pi k); k, n \in \mathbb{Z}$.

2000 год

Механико-математический факультет.

1. $[0; \log_{3/2}(4/3)) \cup (\log_{3/2}(4/3); 1]$. 2. $(5/8; 4)$. 3. а) 6; б) 192. 4. $CE = 6$, $OA = 2$. 5. $[0; 1) \cup (1; 2] \cup \{3\}$. 6. $\sqrt{38}$.

Физический факультет.

1. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} (k \in \mathbb{Z})$. 2. $[0; 4) \cup (16; +\infty)$. 3. $\log_{3/2}(\frac{1}{2})$. 4. $\pi - 2 \operatorname{arctg}(7 \operatorname{tg} \alpha)$. 5. $(-\infty; 2) \cup (6; +\infty)$. 6. 1. 7. Один корень, равный нулю, при $p = 0$, положительные корни (возможно, совпадающие) при $p \geq \frac{7}{4}$, в остальных случаях корней нет. 8. $\sqrt{\frac{S}{\sin \alpha \cos \alpha}}$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики.

1. $x \in [-\frac{\pi}{4} - \pi k; \frac{\pi}{4} - \pi k] \cup (-\frac{\pi}{4}; +\infty), k \in \mathbb{N}$. 2. 90%. 3. $(-5; -2 - 2\sqrt{2}) \cup [-4; 0) \cup (0; \frac{1}{2})$. 4. $\arccos(\frac{6}{\sqrt{228+48\sqrt{3}}})$. 5. 30. 6. 2.

Химический факультет и факультет наук о материалах.

1. 2. 2. $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} k, k, n \in \mathbb{Z}$. 3. 4. 4. 60π . 5. $\frac{97}{189}$. 6. ± 1 .

Биологический факультет.

1. $(-\infty; -2) \cup [-1; +\infty)$. 2. $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. 3. $3\sqrt{15}/4$. 4. $(-6; \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}; 2) \cup (2; \frac{5}{2}) \cup (\frac{5}{2}; 10)$. 5. $\frac{\sqrt{3}-1}{12} a$.

Факультет почвоведения.

1. $(-\infty; 1] \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$. 2. 1 или 2. 3. $\frac{24}{7}$. 4. $(0; 1) \cup (3; 5)$. 5. $\pm \sqrt{8 - ((-1)^n \frac{1}{6} + n)^2}$, где $n = 0, 1, 2$. 6. $1 + \sqrt{3}$. 7. $\frac{5}{2}$.

Геологический факультет.

1. $(-\frac{4}{3}; 7]$. 2. $\frac{240}{161}$. 3. $1\frac{3}{4}$ часа. 4. $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. 5. $(11; -2); (-2; 11)$. 6. $\frac{7}{2}\sqrt{35}$. 7. 0; -1; $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. 8. $R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}a^2 - ab + b^2 - \frac{a}{4}}$. Решение есть при $1 < \frac{b}{a} \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{31}}{6}$.

Географический факультет.

1. $\frac{15+\sqrt{129}}{8}$. 2. -30 ; 4. 3. $(\arccos(\frac{1}{2\pi})\frac{180}{\pi})^\circ$ северной или южной широты.
 4. $\sin\left(\frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}}(2-\sqrt{3})\right)$. 5. Участок плоскости, расположенный в первой четверти между осью координат $u_2 = 0$ и гиперболой, заданной уравнением $u_2 = \frac{vu_1}{2u_1+v}$. 6. $a = \frac{3}{10}\sqrt{10}$; площадь равна $\frac{60-9\pi}{10}$.

Экономический факультет (отделение экономики).

1. 0. 2. 4. 3. $[-8; -6) \cup (3; \sqrt{10})$. 4. $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$. 5. $\frac{\pi}{12} + 2\pi m, \frac{5\pi}{12} + 2\pi l$ ($l, m \in \mathbb{Z}$). 6. $16 - \frac{13}{9}\pi$. 7. $[3\sqrt{2}; 6]$.

Экономический факультет (отделение менеджмента).

1. 0; -3 . 2. 4. 3. -4 . 4. $EO : OG = 3 : 1$. 5. $\frac{5\pi}{12} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$. 6. $\frac{4\pi}{3}$.

Факультет психологии.

1. 0; $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}n$ ($n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$); $(-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}k$ ($k \in \mathbb{Z}, k < 0$). 2. $\frac{-1+\sqrt{1+\frac{5\pi}{8}}}{2}$, где $n = 6, 7, \dots, 250$. 3. 14,5 часа. 4. $(3; 1 + \sqrt{5}) \cup [\frac{10}{3}; +\infty)$. 5. $\frac{\sqrt{769}}{8}$.

Социологический факультет.

1. 4; $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$. 2. 4%. 3. $(-2; -\frac{3}{2}) \cup (1; +\infty)$. 4. $\frac{\pi}{12} + 2\pi n; \frac{5\pi}{12} + 2\pi k$ ($k, n \in \mathbb{Z}$).
 5. $17\frac{11}{17}$. 6. $a = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 4t - 4}}{2}$, где $t = \frac{16}{2+n+\frac{1}{n}}$, $n = -5, -4, -3, -2$ или $n = 1, 2, \dots, 17$.

Институт стран Азии и Африки (социально-экономический факультет).

1. $(-\infty; 1) \cup [\frac{\sqrt{13}-1}{2}; +\infty)$. 2. 240° . 3. $\frac{\pi}{2} \pm \frac{4\pi}{3} + 4\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). 4. $(-2; 2) \cup (2; \frac{5}{2})$.
 5. $-6 \leq a \leq 2$. 6. 36. 7. 4.

Филологический факультет.

1. 10 литров 0,5% раствора и 20 литров 2% раствора. 2. 11. 3. $(0; 1) \cup \{2\} \cup (4; +\infty)$. 4. $x = \pi n, y = \frac{\pi}{4} - \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$); $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, y = -\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). 5. $-\frac{3}{4}$; 0; $\frac{2}{9}$. 6.

$$\begin{pmatrix} 7 & + & 1 & = & 8 \\ - & & \times & & .. \\ 1 & + & 3 & = & 4 \\ || & & || & & || \\ 6 & : & 3 & = & 2 \end{pmatrix}$$

2001 год**Механико-математический факультет.**

1. $(-\infty; -2] \cup [0; \lg 101 - 2)$. 2. нет. 3. $34/9$. 4. 618, 659, 698. 5. $(-\infty; -8/7) \cup (-1/2; 0) \cup (8/9; +\infty)$. 6. 26, $[42; \frac{253+84\sqrt{5}}{8}]$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики.

1. $(1/3; 1)$. 2. 119. 3. $(-9/5; 12/5)$. 4. $(4n - 3)^2$ ($n \in \mathbb{Z}$). 5. $8 + 4\sqrt{6} - 10 \arcsin(2\sqrt{6}/5)$. 6. $(-13 - \sqrt{57}; 8)$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики (отделение прикладной информатики).

1. $(1; 1/4)$. 2. 10500. 3. Если $a < 4$, то $[-(a+2)/3; 2-a]$; если $a = 4$, то $x = -2$; при $a > 4$ решений нет. 4. $(4/13; 6/13)$. 5. $(2n-1)^2$ ($n \in \mathbb{N}$). 6. 0, $\sqrt[3]{2}$. 7. $4 + 4\sqrt{14} - 36 \arcsin(\sqrt{2}/3)$.

Физический факультет.

1. $-2 + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). 2. $(-\infty; 2) \cup ((3 + \sqrt{5})/2; 3)$. 3. $-1; 2/3$. 4. $a\sqrt{kl}/2$. 5. $(-\infty; -2)$. 6. $80/3$. 7. Если $a = \pi/2 + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$), то $x = 3\pi/2$; при других a корней нет. 8. $\pi/3$.

Химический факультет и факультет наук о материалах.

1. $(0; 1) \cup (1; +\infty)$. 2. 1. 3. πn ($n \in \mathbb{Z}$). 4. 2. 5. $[100; +\infty)$. 6. $[3; +\infty)$. 7. 4004001.

Биологический факультет и факультет фундаментальной медицины.

1. $-11; (5; +\infty)$. 2. $\pi/3 + 2\pi n, \pi/2 + \pi n, \pi + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). 3. $[1/3; 1) \cup (1; \sqrt[3]{3}) \cup [9; +\infty)$. 4. $10/3$. 5. $7\sqrt{3}/4$. 6. $-1/6; -1/2; \pm 3/4; \pm \sqrt{39}/4\sqrt{7}$.

Факультет почвоведения.

1. $\pi/4 + \pi n/2$ ($n \in \mathbb{Z}$). 2. -1 . 3. $(3; 4]$. 4. $(2\sqrt{3} - 3)/6$. 5. $2\pi n < x < \pi/2 + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). 6. нельзя.

Геологический факультет.

1. $(1; 2] \cup (7; 8)$. 2. $\pi n/5, \pi/4 + \pi k/2$ ($n, k \in \mathbb{Z}, n, k \geq 0$). 3. $3 \pm \sqrt{5}$. 4. Если центр лежит вне треугольника, то $16/3 \text{ м}^2$, если центр внутри треугольника, то $8\sqrt{5}/3 \text{ м}^2$. 5. $(1; 5); (5/2; 2)$. 6. 7 час; 55 км. 7. $3/4$. 8. при $a = 3$ или $\sqrt{10} \leq a < \sqrt{11}$.

Географический факультет.

1. $[-\sqrt{10}; -3) \cup (3; \sqrt{10}]$. 2. $\pm \arccos((1 - \sqrt{3})/2) + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). 3. -9 . 4. $2\sqrt{3}$. 5. 3. 6. при всех целых k , не удовлетворяющих условию $-11 \leq k \leq 3$.

Филологический факультет.

1. $\pi/2 + 2\pi n, (-1)^k \arcsin(-1/3) + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). 2. $(1; +\infty)$. 3. $19/44$. 4. У писателя 3 букв «Ф» на 50% больше. 5. $-1/2 < a < 2$.

Экономический факультет (отделение экономики).

1. $[0; 15/4] \cup [4; +\infty)$. 2. 2 млн. 400 тыс. руб. и 3 млн. 600 тыс. руб. 3. 36. 4. $(\log_2 49 - 4; \log_2 7)$. 5. $(\sqrt{356} - 12)/6, (\sqrt{164} - 12)/6$. 6. $\arccos(6 - \sqrt{33})$. 7. $u = -187, v = -819$.

Экономический факультет (отделение менеджмента).

1. $\pi/4 + \pi n/2, \pm \pi/6 + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). 2. 0; $15/4$; 4. 3. 17100 руб. и 11400 руб. 4. 27. 5. $(\log_3 28 - 3; \log_3 4)$. 6. $(18 + \sqrt{503})/6, (18 + \sqrt{335})/6$.

Факультет психологии.

1. $3 \pm (5\sqrt{3}/2)$. 2. $(-\infty; -8] \cup (12; \infty)$. 3. $2\pi n, \pi/2 + 2\pi n, 2 \arccos(1/\sqrt{5}) + 2\pi n, 2 \arccos(1/\sqrt{5}) - \pi/2 + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). 4. 3; $4098/61$. 5. при $a \leq -\sqrt[4]{1/12}$ решений нет; при $-\sqrt[4]{1/12} < a < 0$: $\left(\frac{-1 + \sqrt{1 - 12a^4}}{2a}, \frac{-1 - \sqrt{1 - 12a^4}}{2a}\right)$; при $a = 0$: $(0; +\infty)$; при $0 < a \leq \sqrt[4]{1/12}$: $\left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{1 - 12a^4}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-1 + \sqrt{1 - 12a^4}}{2a}; \infty\right)$; при $a > \sqrt[4]{1/12}$: $(-\infty; +\infty)$.

Социологический факультет.

1. $(-1; 0) \cup (0; 1/\sqrt{2}]$. 2. $(-1)^n \pi/6 + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). 3. 8,75%. 4. $7/8$. 5. $(-2 - 2\sqrt{2}; 0) \cup (0; -2 + 2\sqrt{2})$. 6. $-1; 2/7$.

Институт стран Азии и Африки.

1. $(-\sqrt{3}/2; -1/2] \cup [3; 2\sqrt{3})$. 2. $3\pi/2; 2\pi; 2\pi - \arccos(2/5)$. 3. 4 км/час, 8 км/час, 12 км/час. 4. $(0; 1/3) \cup [3; 3\sqrt{13}]$. 5. $\angle BOC = 112,5^\circ$. 6. $a = -1, 1/2 \leq a < 0$,

$0 < a \leq 1/2$, $a = 1$. 7. πn ; $\pi n - 1$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Факультет государственного управления.

1. $\pi n/2$; $\pm \pi/6 + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). 2. 0; $72/13$; $13/2$. 3. 5400 руб. и 8100 руб. 4. 33.
5. $(0; \log_4 257 - 4) \cup (\log_4 65; +\infty)$. 6. -3 ; -2 ; 1.

2002 год

Механико-математический факультет.

1. $(0; 2]$. 2. $\arccos \sqrt{2/3}$. 3. $300/13$ км. 4. 3. 5. $(2; +\infty)$. 6. $\frac{1}{4}(3 + \sqrt{8} - \sqrt{11})^2$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики.

1. $-\sqrt{2}$. 2. $[-1; -\frac{7}{8}] \cup \{1\}$. 3. $\arccos \frac{29}{7\sqrt{19}}$. 4. 10 часов 40 минут того же дня.
5. $(\pm \arccos \frac{1}{5} + 2\pi k; (-1)^n \arcsin \frac{4}{5} + \pi n)$; $k, n \in \mathbb{Z}$. 6. $7\sqrt{3}$.

Физический факультет.

1. $\frac{\pi(2n+1)}{10}$, $(-1)^n \frac{\pi}{15} + \frac{\pi n}{5}$; $n \in \mathbb{Z}$. 2. $(-\infty; 1) \cup (\frac{3}{2}; 2]$. 3. $(0; \log_{\frac{3}{4}} \frac{1}{4})$. 4. $\frac{9}{2}$. 5. 4,
8, 16; 16, 8, 4. 6. $\frac{3\sqrt{6}}{4}$. 7. Если $-3 < a < -2$, то x любое; если $a \leq -3$ или
 $a \geq -2$, то $(-\infty; 3 - \sqrt{a^2 + 5a + 6}) \cup (3 + \sqrt{a^2 + 5a + 6}; +\infty)$. Ответ на на
второй вопрос: при $a \in (\frac{-5-\sqrt{13}}{2}; -3] \cup [-2; \frac{-5+\sqrt{13}}{2})$. 8. 6.

Химический факультет и факультет наук о материалах.

1. $-3, -1$. 2. $(0, 2)$. 3. $(-\sqrt{8}; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; \sqrt{8})$. 4. $\pi n/7, \pi n/9$ ($n \neq 7l, m \neq 9l$,
 $n, m, l \in \mathbb{Z}$). 5. $6\sqrt{3}$. 6. $a = 0, a = (-5 \pm \sqrt{21})/2$.

**Биологический факультет и факультет фундаментальной меди-
цины.**

1. $(-\infty; 1/2)$. 2. $\pi k/5$ ($k \in \mathbb{Z}$). 3. $96\sqrt{6}/35$. 4. $(-\infty; -9] \cup [-3; 0) \cup (0; 3] \cup$
 $[9; +\infty)$. 5. а) $-4 + \sqrt{2}$; б) $(-\infty; -4 - \sqrt{2}) \cup \{-5\} \cup (-4 + \sqrt{2}; +\infty)$.

Факультет почвоведения.

1. $(-\infty; 8/5) \cup (2; +\infty)$. 2. $-\sqrt{2 + \sqrt{2}}/2$. 3. 20. 4. $(1; 64]$. 5. $7\pi/12, 11\pi/12$.
6. $\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{(a+b)(a+b+\sqrt{a^2+b^2})}$. 7. $(1/19; 1/10) \cup (1/10; 5/19] \cup \{1/2\} \cup [1; 5)$.

Геологический факультет.

1. $(-\infty; \frac{1}{3}] \cup (2; +\infty)$. 2. $(1; \frac{1}{2})$. 3. $(-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$. 4. 2. 5. $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{6}$.
6. $\frac{9}{4}\sqrt{15}$. 7. $a < 1$. 8. $\frac{31}{288}\sqrt{113}$.

Географический факультет.

1. $3/2$. 2. $\pm \pi/3 + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). 3. $(6, -18), (-4, -8)$. 4. а) 10π ; б) 128 . 5. а) $5\sqrt{2}$;
б) $\frac{\pi}{4} \pm \arcsin \frac{\sqrt{7}}{4}$. 6. $(0, 0)$, $(\pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{5})$, $(\pm\sqrt{3}, \mp\sqrt{3})$, $(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2})$,
 $(\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2})$, $(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2})$, $(\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2})$.

Экономический факультет (отделение экономики).

1. Утверждение истинно. 2. $[-\frac{1}{2}; 0] \cup [\frac{7}{3}; \frac{5}{2})$. 3. $(-2; 3), (-3; 2), (-1; 5), (-5; 1)$.
4. 20 рабочих, 6 часов. 5. $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{18} + 2\pi k, \frac{17\pi}{18} + 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$.
6. $\sqrt{\frac{3}{2}}$. 7. $\frac{2}{3}(2 - \sqrt{3})$.

Факультет психологии.

1. $[-2; (3 + \sqrt{13})/2)$. 2. $(10; +\infty)$. 3. 0. 4. $4\sqrt{3}$. 5. $2\pi t$ ($t \in \mathbb{Z}$). 6. -2 .

Филологический факультет.

1. $(0; 1) \cup [\pi/2; 3]$. 2. $2 + 2\sqrt{3}$. 3. $-\pi/4 + \pi n, 2\pi/3 + 2\pi k$ ($n, k \in \mathbb{Z}$). 4. $(0; 4)$.
 5. а) $2\sqrt{3}/3$; б) 6π . 6. 2.

Социологический факультет.

1. 3. 2. $(1; 3/2) \cup (3/2; 2)$. 3. 120° . 4. 12 кг. 5. $\frac{4R^2 - b^2}{2} + \sqrt{\frac{4R^2 - b^2}{2}} \left(\sqrt{\frac{4R^2 + b^2}{2}} + b \right) =$
 72. 6. $-1, -3/5, 1$.

Институт стран Азии и Африки.

1. $(-\infty; 1) \cup [2; +\infty)$. 2. $\frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$. 3. $(-\infty; -1] \cup \{2\}$. 4. $\left(-\frac{15}{16}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - 1\right) \cup (\sqrt[4]{2} -$
 $1; 15)$. 5. $\frac{\sqrt{190}}{2}$. 6. $\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{6}; \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}\right)$; первое число больше. 7. $[-6; 1 - \sqrt{13}] \cup$
 $[\sqrt{13} - 1; 6]$.

Факультет государственного управления.

1. 9 км/час. 2. $\frac{5}{2}$. 3. $(-\infty; -\sqrt{17}) \cup [-4; -3] \cup (-3; 3) \cup (\sqrt{17}; 5]$. 4. 9. 5. 5 часов
 и 7 часов 30 минут. 6. $-4; 4$. 6. 7. В порядке убывания старшинства: 8, 0,
 1, 0, 1.

2003 год**Механико-математический факультет.**

1. -3 . 2. $1/25$. 3. 2. 4. $25 : 81$, площади совпадают. 5. $\pi - 3 - \frac{7}{5} \leq a < \pi - 3 + \frac{7}{5}$,
 $a = \pi - 3 + \frac{\sqrt{74}}{5}$. 6. $10(2 - \sqrt{3})$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики.

1. $(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}) \cup [2; +\infty)$. 2. $\frac{\pi}{8} + 2\pi k; \frac{5\pi}{8} + 2\pi n; k, n \in \mathbb{Z}$. 3. $(-\infty; -2] \cup (\frac{1}{2}; 1]$. 4. $9\sqrt{3}$.
 5. $\beta \in (\frac{2}{3}; +\infty)$. 6. $\frac{5\pi}{12}$.

Физический факультет.

1. $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$. 2. $(-\infty; -\frac{2}{3}] \cup [\frac{1}{2}; +\infty)$. 3. $(\log_5 626 - 4; \log_5 26)$. 4. 2.
 5. $x = 5, y = 1; x = \frac{1}{3}, y = -\frac{11}{3}$. 6. $2R \sin \frac{\alpha}{2}$. 7. Если $a = \frac{1}{2}$, то $(-\infty; -2) \cup$
 $(\frac{1}{2}; 1) \cup (1; +\infty)$; если $a < -2$, то $(-\infty; a) \cup (-2; +\infty)$; если $a = -2$, то
 $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$; в остальных случаях $(-\infty; -2) \cup (a; +\infty)$. 8. $\frac{1125}{224}$.

Химический факультет и факультет наук о материалах.

1. $(0; 1)$. 2. $\frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$. 3. $(0; 2)$. 4. 0. 5. 4. 6. $[-5; 5]$.

Биологический факультет, факультет фундаментальной медицины, факультет биоинженерии и биоинформатики.

1. $\frac{\pi}{4} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$. 2. $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; 2) \cup \left[\frac{8+\sqrt{10}}{3}; +\infty\right)$. 3. $2^{-\frac{1-\sqrt{37}}{2}}$. 4. $15 : 8$.
 5. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)$. 6. $(-1; 2]$.

Факультет почвоведения.

1. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; n \in \mathbb{Z}$. 2. $x = 0, y = -1; x = 1, y = 0$. 3. $(-\infty; -\frac{2}{3}] \cup \{0\} \cup [\frac{2}{3}; +\infty)$.
 4. $4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$. 5. $2 \arctg \frac{1}{4}$. 6. $(-\infty; -6) \cup (-\frac{1}{3}; +\infty)$.

Геологический факультет.

1. $[-7; -2) \cup (-2; -1]$. 2. $\frac{1}{2}$. 3. Первый за 1 час, второй за 5 часов. 4. $x = 0, y = \sqrt{3}; x = 0, y = -\sqrt{3}; x = \sqrt{\frac{3}{119}}, y = 11\sqrt{\frac{3}{119}}; x = -\sqrt{\frac{3}{119}}, y = -11\sqrt{\frac{3}{119}}$.
 5. $\frac{9\sqrt{2}}{19}$. 6. $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k; k, n \in \mathbb{Z}$. 7. $\log_3(18 \pm 9\sqrt{3}), \log_3(10 \pm \sqrt{19})$.
 8. $1:41$.

Географический факультет.

1. $-5^{-\frac{2}{3}}$. 2. $(-\infty; -6] \cup [-1; 0) \cup \left(0; \frac{\sqrt{73}-7}{2}\right]$. 3. 14. 4. $2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$; меньше, чем $2\sqrt{15}$. 5. $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \{1\} \cup \left(\frac{3}{2}; 4\right]$.

Филологический факультет.

1. $\frac{\pi n}{3}; n \in \mathbb{Z}$. 2. $x = 1, y = 2\pi k; x = \frac{1}{4}, y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m; x = 4, y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ($k, m, n \in \mathbb{Z}$). 3. $\angle A = \angle C = \arctg 3; \angle B = \pi - 2 \arctg 3; \frac{1}{4}$. 4. 28. 5. $b \neq \frac{k}{5}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Экономический факультет (отделение экономики).

1. $[-2; 1]$. 2. -207 . 3. $x = \log_7 3, y = 2; x = \log_7 \frac{5}{3}, y = -1$. 4. 24 и 80 тонн; $m = 4$. 5. $4\sqrt{13}$. 6. $\left(-\infty; -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right] \cup \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}; +\infty\right)$. 7. 36.

Экономический факультет (отделение менеджмента).

1. -2 . 2. 7. 3. $x = \frac{1}{2}, y = \log_3 3\sqrt{2}$. 4. 6 тонн; $m = 4$. 5. $\frac{336}{23}$. 6. $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{2}{7}}\right] \cup \left[-\sqrt{\frac{1}{7}}; \sqrt{\frac{1}{7}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{2}{7}}; +\infty\right)$.

Факультет психологии.

1. $\frac{\sqrt{5}-3}{3}$. 2. $\pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1-\sqrt{11}}{4} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$. 3. $\left\{-\frac{4}{3}\right\} \cup [-1; 0]$. 4. 5, $\frac{975}{196}\sqrt{3}$.
 5. $\left(-\frac{5}{2}; 7\right); \left[\frac{9-\sqrt{211}}{2}; -\frac{5}{2}\right] \cup \{5\}$.

Социологический факультет.

1. 3. 2. $(0; 3]$. 3. $\sqrt{7}$. 4. 25%, 62,5%, 10%. 5. Первый 10, второй 12. 6. $a = 7$; корни 2, 4 и 8.

Институт стран Азии и Африки.

1. $\left[\frac{1}{16}; 12\right]$. 2. 11, $\frac{-11-\sqrt{161}}{2}$. 3. $a^2 \frac{\sqrt{3}}{6}$. 4. $\frac{\pi}{2}, \pi + \arctg \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\pi}{2}$. 5. $(-\infty; -5] \cup \left[-3; -\frac{1}{\sqrt{4}}\right] \cup \left\{-\frac{1}{32}\right\} \cup \left\{\frac{1}{8}\right\} \cup \left[\frac{1}{\sqrt{4}}; +\infty\right)$. 6. $c = 0, d = 1$ или $c = -1, d = -2$; $[0; 2]$.

Факультет государственного управления.

1. В пункте E. 2. $(-\infty; -5] \cup [-1; +\infty)$. 3. 14 млн. предприятие A, 2 млн. предприятие B. 4. $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. 5. Нет решений при $a > 0, b \geq 0$; $(-\infty; +\infty)$ при $a \leq 0, b \leq 0$; $(-\infty; -\sqrt{-\frac{a}{b}}] \cup [\sqrt{-\frac{a}{b}}; +\infty)$ при $a > 0, b < 0$; $[-\sqrt{-\frac{a}{b}}; \sqrt{-\frac{a}{b}}]$ при $a < 0, b > 0$; $\{0\}$ при $a = 0, b > 0$. 6. $x = 2, y = 2, z = -2$. 7. Да.

Высшая школа бизнеса.

1. $(-\infty; -5) \cup \{3\}$. 2. 80%. 3. $\frac{2\pi}{3} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$. 4. $x = -2, y = 3$. 5. $AB = 12, BC = 10$. 6. $x = 3, y = 1; x = -3, y = -1$. 7. 70° . 8. -2 .

2004 год

Механико-математический факультет.

1. $(-1; 0) \cup (0; 1)$. 2. $(-\infty; -5 - \sqrt{21}] \cup (-0,5; -5 + \sqrt{21}] \cup \{2\} \cup (3; \infty)$. 3. 13.
 4. $-\frac{\pi}{4} + \{-1\}^m \frac{\pi}{4} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$. (Другой вариант ответа: $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{12} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$).
 5. 18 км. 6. $\frac{4(5\sqrt{3}+1)}{3\sqrt{11}}$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики.

1. $(-\infty; +\infty)$. 2. $(-3; -2] \cup \left[\frac{3-\sqrt{31}}{2}; \frac{\sqrt{23}-1}{2}\right] \cup [2; 5)$. 3. $\frac{15\pi}{16} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
 4. $65 : 144$. 5. Если $a < -\frac{5}{4}$, то одно решение; если $a = -\frac{5}{4}$, то два решения; если $-\frac{5}{4} < a < -1$, то три решения; если $-1 \leq a < 1 - \sqrt{2}$, то два решения; если $a = 1 - \sqrt{2}$, то одно решение; если $1 - \sqrt{2} < a < 5$, то два решения; если $a \geq 5$, то одно решение. 6. $\frac{1}{2}$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики (бакалавры).

1. $\{\frac{1}{12}; \frac{1}{6}\}$. 2. $(-\infty; +\infty)$. 3. $(-4; -3) \cup \left[\frac{9-\sqrt{233}}{4}; \frac{\sqrt{161}-3}{4}\right] \cup [3; 7)$. 4. Если $c \leq -9$, то $(-\infty; +\infty)$; если $-9 < c < 0$, то $(-\infty; \log_3(3 - \sqrt{c+9})) \cup [\log_3(3 + \sqrt{c+9}); +\infty)$; если $c \geq 0$, то $[\log_3(3 + \sqrt{c+9}); +\infty)$. 5. $\frac{7\pi}{10} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
 6. $25 : 156$. 7. $\frac{1}{2}$.

Физический факультет.

1. $\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $[0; 4) \cup (16; +\infty)$. 3. $\log_3$. 4. $\frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{7}+\sqrt{3})}$. 5. $(-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$.
 6. $2 \arctg(5 \operatorname{tg} \alpha)$. 7. Корни существуют при $p = 0$ (только $x = 0$) и при $p \geq 4$, когда все корни положительны. 8. 2.

Химический факультет и факультет наук о материалах.

1. $[-4; -3) \cup (-1; 2]$. 2. $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. $\left(6^{\frac{2\sqrt{21}}{3}-1}; +\infty\right)$. 4. $\frac{15}{4}$. 5. $\frac{3}{\sqrt{51}}$.
 6. $(2; 1)$, $(-2; -1)$.

Биологический факультет, факультет фундаментальной медицины, факультет биоинженерии и биоинформатики.

1. $\frac{5+\sqrt{13}}{4}$. 2. $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}$, $n, k \in \mathbb{Z}$. 3. $20\sqrt{3}$. 4. $(-\infty; \log_3 2) \cup \left[\log_3 \frac{11+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$.
 5. $\frac{31}{6}$.

Факультет почвоведения.

1. 12; $-\frac{25}{8}$. 2. $(-3; 0) \cup (0; 3)$. 3. 0; 8. 4. $(\lg 9; 1]$ 5. 0; $-\frac{\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{3}$. 6. $\sqrt{14}$; $\sqrt{7} \pm \sqrt{2}$.
 7. $(-1; -2)$.

Геологический факультет.

1. $[-\sqrt{6}; \sqrt{6}]$. 2. 0; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 3. $\{-17\} \cup [0; 17]$. 4. $\arctg 4$; 17. 5. $[3; 4)$. 6. $\frac{2}{9}$; $m = \frac{4}{3}$.
 7. $(\frac{5\pi}{6} + 2\pi m; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k)$, $(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi m; \frac{\pi}{3} + 2\pi k)$, $k, m \in \mathbb{Z}$. 8. 2.

Географический факультет.

1. $\{-1; 1\} \cup (2; +\infty)$. 2. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. а) 30 км; б) $\frac{195}{4}$ км. 4. а) 9; б) 7.
 5. -2; $-\frac{16}{3}$. 6. 6990.

Экономический факультет (отделение экономики).

1. 1. 2. $\{1; 3\}$. 3. $\frac{12}{5}$. 4. $(-\infty; -3) \cup (0; \frac{1}{2})$. 5. 132 у.е. 6. 7. 7. $\frac{2}{15}$

Экономический факультет (отделение менеджмента).

1. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 2. $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$. 3. $\frac{3}{2}$. 4. $(-\frac{7}{2}; -3)$. 5. 66 тысяч у.е. 6. -3.

Факультет психологии.

1. $\log_5(5 + 2\sqrt{7})$. 2. $[-5; 1) \cup (4; 5] \cup (7; +\infty)$. 3. $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$; сумма корней равна $\pi/6$. 4. $\arcsin \frac{7}{8}$; $\frac{784}{33\sqrt{15}}$. 5. $a = 0$; $a = -4$.

Филологический факультет.

1. $(-\frac{1}{2}; \frac{11}{6})$. 2. $\pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. 3. 4. а) $2\sqrt{3}$; б) 6. 5. 1 час 57 минут. 6. а) $(\pm 1; \pm 2)$; б) $0 < y < \frac{x^2}{8}$ при $x > 0$ и $-\frac{x^2}{8} < y < 0$ при $x < 0$.

Социологический факультет.

1. $[-3; 5]$ 2. $\pm \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. 3. Выросла на $\frac{700}{11}\%$. 4. $\frac{3}{\sqrt{17}}$. 5. $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$. 6. $b > 4c$.

Институт стран Азии и Африки.

1. $(-\infty; -7)$. 2. $\pi + 2\pi n$, $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. 3. $(0; 0; 0)$, $(1; 1; 1)$, $(1; -1; -1)$, $(-1; 1; -1)$, $(-1; -1; 1)$. 4. $\log_3 \frac{27 \pm 5\sqrt{29}}{2}$. 5. $\frac{9\pi}{14\pi - 6\sqrt{3}}$. 6. $\frac{3641}{3136} \pm \frac{\sqrt{505}}{28}$.

Факультет государственного управления.

1. 14. 2. $\frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. 3. $\sqrt{7}$. 4. 4920. 5. $(-3; -\frac{5}{2}) \cup [\frac{\sqrt{73}-1}{4}; +\infty)$. 6. Четыре (гири массой 1, 3, 9, 27 килограммов). 7. 2.

Высшая школа бизнеса.

1. $(-\infty; -2) \cup (-2; 0]$. 2. $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. $(28; 6)$, $(-7; -29)$. 4. 32. 5. 7 час 30 мин. 6. $(10; 9)$. 7. -10 . 8. $[-6; -5] \cup (-2; 6]$.

2005 год

Олимпиада «Ломоносов».

1. 64. 2. $0 < x \leq \log_2 3$. 3. 25. 4. $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 5. 11. 6. $\left[-4; \frac{2\sqrt{101}-13}{13}\right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{23}{13}; 2\right]$. 7. $150\sqrt{3}$. 8. $-8 \leq a \leq 6$. 9. От А к В; 8 км. 10. 1.

Механико-математический факультет.

1. 28. 2. -1 . 3. $[1; 2) \cup (2; \sqrt{5}]$ 4. $BC = 18$; $r/r_2 \in (\frac{1}{3}; 1) \cup (1; \frac{5}{3})$. 5. 0; $4 + 2\sqrt{3}$. 6. $4\sqrt{6}$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики (олимпиада, апрель 2005).

1. $(0; \frac{1}{16}) \cup [\frac{1}{8}; \frac{1}{2}) \cup [1; +\infty)$. 2. $(x_n; \frac{\pi}{4} + \pi n - x_n)$, где $x_n = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{\pi}{4} + \pi n)^2 - 36}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -2, -1, 0, 1$. 3. $(0, -1)$. 4. $15/2$. 5. $2\sqrt{42}/3$. 6. $\pm \arcsin \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики.

1. $(0; \frac{5-\sqrt{17}}{2})$. 2. $\pi + \arctg 2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. $S_{100} = 15050$; $b_{40} = 81$. 4. $4\sqrt{10} - 2\sqrt{15}$. 5. $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} - 3] \cup (\frac{5\pi}{2} - 6; \frac{7\pi}{2} - 9]$. 6. 32.

Химический факультет.

1. ± 1 . 2. $[\frac{1}{4}; +\infty)$. 3. $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$. 4. 10. 5. $(2, 0)$. 6. 2.

Биологический факультет.

1. ± 1 . 2. $-\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. $16\sqrt{5}$. 4. $[1; 2)$. 5. 4. 6. $x = -\frac{1}{2}$, $y = 2$. 7. $\frac{\pi}{35}$.

Факультет почвоведения.

1. 4. 2. $\sin \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$. 3. $[\frac{1}{2}; +\infty)$. 4. 10. 5. 7. 6. $1:3$.

Географический факультет.

1. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $y = 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. 2. 150. 3. $[\frac{4}{5}; 1)$. 4. $\frac{3\pi}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}$. 5. 26.

6. $\pi\sqrt{\frac{7}{2}}$.

Факультет психологии.

1. ± 3 . 2. $(-\infty; 1] \cup (\log_2 11; +\infty)$. 3. $-\frac{\pi}{12} + 2\pi k$, $-\frac{11\pi}{12} + 2\pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

4. $\arccos \frac{5}{8} + \frac{\pi}{2}$; $\frac{4\sqrt{22}}{\sqrt{13}}$. 5. 5. 6. $[-2; 0) \cup (0; 2]$.

Социологический факультет.

1. 0; 16. 2. $\pm \frac{1}{3}$. 3. 4. 4. $\frac{11}{12}$. 5. $(\frac{7+\sqrt{5}}{2}; 5)$. 6. 4; 1200 руб.

Филологический факультет.

1. 0, ± 1 , ± 2 , ± 3 . 2. 240. 3. $(-\frac{3}{4}; 0) \cup (3; +\infty)$. 4. 2π . 5. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 6. 2; $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{5}$. 7. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Геологический факультет.

1. $\{-1\} \cup [\frac{1}{2}; 1]$. 2. $[-3; \frac{\sqrt{41}-5}{4}]$. 3. $S = 1$; $R = \frac{\sqrt{85}}{2}$. 4. 5π . 5. 0 или 3.

6. $[\frac{2}{3}; 1) \cup [3; +\infty)$. 7. $[-1; 5]$. 8. $\frac{12}{5}$.

Экономический факультет (отделение экономики).

1. $\frac{9\pi}{8}(4k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. 2. 18. 3. 962500 руб. 4. $[1 - \sqrt{23}; -\frac{7}{2}) \cup (-\frac{7}{2}; -\sqrt{\frac{34}{3}};] \cup [\sqrt{\frac{34}{3}}; 4)$. 5. $2\sqrt{3} + 4$, $2\sqrt{3} + 4$, $4\sqrt{3} + 6$. 6. $(-\frac{2}{3}; 1)$, $(-1 - \frac{1}{l-1}; l^2 + l - 1)$, $(-1 + \frac{1}{l+2}; l^2 + l - 1)$, $l \in \mathbb{Z}$, $l \neq -5, -2, 1, 4$. 7. $(0; 16\pi)$.

Московская школа экономики.

1. $[1; +\infty)$. 2. $(-\infty; -2]$. 3. -3. 4. $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$. 5. 6, 8, 10, 12. 6. $(2; 3)$, $(3; 2)$, $(3; 3)$, $(4; 3)$, $(5; 4)$. 7. $90\sqrt{3}$. 8. $(-\infty; 1] \cup \{\frac{5}{4}\} \cup [\frac{4}{3}; +\infty)$.

Институт стран Азии и Африки.

1. $(-\infty; -1) \cup (-1; 5]$. 2. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $\pm \arccos \frac{1-\sqrt{3}}{2} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. 3. $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. 4. 5%. 5. $(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}) \cup (-\frac{1}{6}; -\frac{1}{10})$. 6. Либо $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12}$, либо $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, α , $\frac{5\pi}{6} - \alpha$, где $\alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{4-\sqrt{3}}}$. 7. $12\sqrt{2}$.

Факультет государственного управления.

1. Да (с 8 руб. 50 коп. по 16 руб. включительно). 2. $(5; +\infty)$. 3. $E(0; 0)$. 4. $1 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 5. 69 руб. 43 коп. 6. $[0; +\infty)$.

Факультет глобальных процессов.

1. 126. 2. $(-\frac{3}{2}; -\sqrt{\frac{3}{2}}) \cup [-1; 0) \cup (0; \sqrt{\frac{3}{2}})$. 3. $\frac{1}{2}$. 4. $4\sqrt{3}$. 5. Верно. 6. 20%. 7. $\frac{\pi}{2}$; $\arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$. 8. $(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty)$.

2006 год**Олимпиада «Ломоносов».**

1. -19. 2. Корень трехчлена больше. 3. $\pm\sqrt{2\pi k}$, $-1 \pm \sqrt{1+2\pi n}$, $k, n = 0, 1, 2, \dots$. 4. 36 и 8. 5. $3/5$. 6. $[0; 4]$. 7. $(-\infty; -2] \cup \{-\frac{1}{2}\} \cup [0; \frac{1}{2}] \cup \{2\}$. 8. 2.

9. (2, 117), (3, 59). 10. $-\frac{\pi}{4} + \pi k \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq -\frac{\pi}{4} + \pi n$ ($k, n \in \mathbb{Z}$).

Механико-математический факультет.

1. 216. 2. $(0; +\infty)$. 3. 90° . 4. $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 5. 60° ; $\frac{405\sqrt{3}}{16}$. 6. $1/3$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики (олимпиада, апрель 2006).

1. $\{-3; 1\}$. 2. $(-\infty; 10) \cup \{11\} \cup (14; +\infty)$. 3. 90° , 60° . 4. $(\arctg \frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{\pi}{2})$.

5. $AD : BC = 2 : 1$. 6. $a = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики (отделение специалистов).

1. 14:00. 2. $-11\pi/6$, $\pi/6$, 2π , $13\pi/6$. 3. $[3; 6) \cup (6; \frac{133}{2} - 11\sqrt{6})$. 4. 672. 5. $(\frac{3d+8}{6}; \frac{3d}{2})$ (при всяком d). 6. 7.

Химический факультет и факультет наук о материалах.

1. $[-1; 1]$. 2. $(-14/3; -3)$. 3. $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{8} \pm \frac{5\pi}{12} + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. 4. $9/2$. 5. $24 : 49$.

6. $4 - \sqrt{7} < a < 4 + \sqrt{7}$.

Биологический факультет.

1. $\{-1\} \cup [1; +\infty)$. 2. $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. $\frac{\sqrt{385}}{4\sqrt{6}}$. 4. $(\sqrt{17} - 7)/8$. 5. 7.

6. $360 - 171\sqrt{3}$.

Факультет почвоведения.

1. $\frac{7+24\sqrt{3}}{50}$. 2. 0. 2. 3. $[0; \frac{1}{9}) \cup [1; +\infty)$. 4. 28 минут. 5. $\frac{180\pi}{180+\pi}$. 6. 6. 7. $-4 < b < -1$.

Географический факультет.

1. $\frac{1}{2}$. 2. 2. 3. $\pi + 2\pi n$, $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. 4. а) 40 км; б) 80 км/ч, 60 км/ч.

5. $AB = 89/6$, $CD = 23/3$. 6. $c < -\pi$, $c \geq \pi$.

Факультет психологии.

1. 0. 2. $[3; +\infty)$. 3. $\pm \frac{\pi}{4} + \pi k$, $\pm \arctg 2 + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$. 4. 2. 5. Если $a < 0$, то $(0; -a) \cup (-a; +\infty)$, если $a > 0$, то $(-\infty; -3a) \cup (-\frac{a}{3}; 0)$, если $a = 0$, то нет решений. 6. $\pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Социологический и филологический факультеты.

1. $(-\infty; -1] \cup [1; 2) \cup (2; +\infty)$. 2. $4\sqrt{3}$ и $4\sqrt{3}$ (одна из хорд), $2\sqrt{3}$ и $6\sqrt{3}$ (две другие хорды). 3. $(1, -\frac{3}{2}, -3)$, $(-1, \frac{3}{2}, 3)$. 4. 525. 5. $(9 + 3\sqrt{2})/2$. 6. $3\pi^2 k^2$.

Геологический факультет.

1. $[-4; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$. 2. $\{0\} \cup [2; \frac{12}{5}]$. 3. $\frac{5}{2\pi n(2\pi/5)}$. 4. $(-3; -2) \cup (1; 2]$.

5. $10/3$ л. 6. $11\pi/30$. 7. $SO/ON = 120/19$. 8. Минимально при $a = -5$, минимальное значение равно -4 .

Экономический факультет (отделение экономики).

1. $-1/2$; 1. 2. $(\frac{1}{2}; 1) \cup (6; \frac{13}{2})$. 3. $13\pi/5$. 4. 24 в первой бригаде и 45 во второй.

5. $\sqrt{2}$. 6. $-1 \leq a \leq 1/4$; $a \geq 1$. 7. $2\pi + 8$.

Московская школа экономики.

1. 6. 2. $(3; 11]$. 3. πt , $t \in \mathbb{Z}$. 4. 20%. 5. $(0; 0)$, $(2; 0)$, $(1; 1)$. 6. 30. 7. Если $b < 1$, то $\{-1/3\} \cup [1; +\infty)$; если $b = 1$, то $[-1/3; +\infty)$; если $b > 1$, то $[-1/3; 1]$.

Институт стран Азии и Африки.

1. $\{-5\} \cup (-2; 3)$. 2. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $\frac{\pi}{2} \pm \frac{1}{2} \arccos(\frac{3}{4})$, $k, n \in \mathbb{Z}$. 3. $(-\frac{3}{2}; 0) \cup (\frac{9}{2}; \frac{27}{2}]$.

4. $7\sqrt{13}/10$. 5. -1 ; $1/2$. 6. $(-\infty; -\frac{3}{4}) \cup (-\frac{1}{12}; 0)$. 7. 25.

Факультет государственного управления.

1. 17. 2. $\pm\sqrt{\frac{7}{2}}$. 3. $\pi - 2$. 4. $1 \pm \frac{\pi}{2} \mp 2\pi k$, $k, n \in \mathbb{N}$. 5. $29\frac{2}{3}\%$, $24\frac{2}{3}\%$, $18\frac{2}{3}\%$, $11\frac{2}{3}\%$ соответственно. 6. $a \leq -35$. 7. 7 суток.

Факультет глобальных процессов.

1. $(-\infty; 0]$. 2. $\frac{100}{49}$. 3. $(3; +\infty)$. 4. $-\pi + 4\pi n < x < 4\pi n$, $4\pi n < x < \pi + 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 5. $3\sqrt{3/2}$. 6. $8\pi/3$. 7. $\frac{17-\sqrt{29}}{2} \leq a < 9$. 8. $x_* > k_*$.

2007 год

Олимпиада «Ломоносов».

1. $-0,5$. 2. $x = 0$; $x = \sqrt[6]{100\,000}$. 3. 30. 4. $[-7; -\frac{3}{4}] \cup [\frac{1}{2}; 2)$. 5. 10. 6. 540; 108. 7. $\arctg \frac{7}{3} - \frac{\pi}{4}$. 8. $275\pi(\operatorname{tg} 20^\circ \pm \operatorname{tg} 10^\circ)$. 9. $0 < x < \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{\pi}{3}$; $x = \frac{2\pi}{3}$; $x = \pi$. 10. а) $3\frac{2}{3}$; б) $3\frac{8}{11}$.

Механико-математический факультет.

1. 15. 2. $a = -\frac{6}{7}$, $b = \frac{1}{7}$. 3. $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctg \frac{3}{5} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). 4. 23° ; $4 \sin 67^\circ$; углы одинаковы. 5. 3. 6. $2 \arccos(\sqrt{3} - 1)^{\frac{3}{2}}$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики (отделение специалистов).

1. $-\frac{19\pi}{200}$; $\frac{131\pi}{200}$. 2. $(-\frac{3}{2}; -1) \cup [-\frac{1}{2}; 1]$. 3. $36/\sqrt{13}$. 4. $(-5; 20)$, $(-5; 21)$. 5. $3 : 7$. 6. $\pi\sqrt{3}/2$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики (отделение бакалавров).

1. 36. 2. $5\pi/184$; $133\pi/184$. 3. $(-\frac{3}{4}; 0) \cup [\frac{1}{4}; 3]$. 4. $2\sqrt{6}$. 5. $(-6; 23)$, $(-6; 24)$. 6. $2 : 11$.

Физический факультет.

1. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). 2. $\log_3 5$. 3. 3. 4. $16\sqrt{2}$. 5. $(-2; 0) \cup (2; +\infty)$. 6. aR . 7. Одно при $-3 < a \leq -\sqrt{2}$, два при $-\sqrt{2} < a \leq -2\sqrt{3}/3$, три при $-2/\sqrt{3} < a < 0$. 8. $10448\sqrt{3}$.

Химический факультет и факультет наук о материалах.

1. $-23/4$; -1 ; 1 ; 6 . 2. $(-8; -6) \cup [-2\sqrt{5}; -4] \cup \{-2\}$. 3. 1; 4. 4. $\sqrt{3}$; 3. 5. $(-\frac{91}{17}, \frac{14}{17})$. 6. $\arctg 5 + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). 7. На 251. 8. $-1 < a \leq 0$ или $a = (2 + 2\sqrt{13})/3$.

Геологический факультет.

1. $[9; 12)$. 2. $(-1)^{n+1} \arcsin(1/3) + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). 3. $\{-2\} \cup [2; 6]$. 4. $CD = 6$, $DA = 4$. 5. $(2 - \sqrt{3}; 3 - \sqrt{7}) \cup [3 + \sqrt{7}; +\infty)$. 6. 24. 7. При $z = 5$, максимум равен 8. 8. $1 : 2$.

Факультет почвоведения.

1. -16 ; 18. 2. $(-\infty; -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}; 9]$. 3. В 2 раза. 4. $\pi/56 + \pi n/28$; $\pi/12 + \pi k/6$ ($n, k \in \mathbb{Z}$). 5. $\{1/2\} \cup (1; +\infty)$. 6. $(1; 3)$, $(3, 1)$. 7. 2; 4. 8. 12.

Филологический факультет.

1. -25 . 2. $(-\infty; -8) \cup (-5; -2) \cup [0; +\infty)$. 3. От 6 до 14 включительно. 4. $(1; -1)$, $(-3; 3)$. 5. $-2\pi/3 + 2\pi n$, $(-1)^k \arcsin(3/5) - \pi/6 + \pi k$ ($n, k \in \mathbb{Z}$). 6. $AB = AC = 13$. 7. $(-\infty; -7] \cup (-4; -3) \cup (-2; 0) \cup (1; +\infty)$. 8. $c = -4\sqrt{2}$, $-4 < c \leq 4$.

Экономический факультет (отделение экономики).

1. При $x = -7$ имеем $y = 5$. 2. $3\pi/4 + 2\pi n$; $5\pi/8 + 2\pi k$ ($n, k \in \mathbb{Z}$).
 3. $(-\infty; \log_3 5) \cup (3/2; \log_2 3)$. 4. 27 тысяч рублей. 5. $10\sqrt{3}$. 6. $3 - \sqrt{5} < a < 7/2$;
 $5 < a \leq 10$. 7. 2.

Экономический факультет (отделение менеджмента).

1. $x = 1$; разность равна -6 . 2. $(-9; -5)$. 3. $-\pi/4 + 2\pi n$; $5\pi/4 + 2\pi k$ ($n, k \in \mathbb{Z}$).
 4. $(\frac{5}{4}; \log_3 4) \cup (\frac{4}{3}; +\infty)$. 5. 72 часа. 6. $2\sqrt{129}$.

Экономический факультет (вечернее отделение).

1. $(-7; 5)$. 2. $3\pi/4 + 2\pi n$; $5\pi/4 + 2\pi k$ ($n, k \in \mathbb{Z}$). 3. $(-\infty; \frac{4}{3}) \cup (\log_3 5; \frac{3}{2})$.
 4. 33 600 рублей. 5. $10\sqrt{3}$. 6. $0 \leq a < 1$; $1 < a \leq 5/3$; $4 \leq a < 5$; $a > 5$. 7. 2.

Московская школа экономики.

1. $\{1\} \cup [2; +\infty)$. 2. $5\pi/6 + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). 3. $x = 2$. 4. 1. 5. На 20%. 6. $(12; -4)$;
 $(2; -4)$; $(10; -2)$; $(4; -2)$; $(10; -6)$; $(4; -6)$. 7. Периметр равен 25, площадь
 равна $(5\sqrt{143})/4$. 8. $0 < a < 1$; $1 < a < 4$; $4 < a < 5$.

Институт стран Азии и Африки.

1. $\{-3\} \cup [-2; 4]$. 2. 20%. 3. $[-4; -2) \cup (5; 10]$. 4. $(4; 1; \pm \arccos \frac{1}{5} - \arctg \frac{4}{3} + 2\pi n)$
 $(n \in \mathbb{Z})$. 5. $2\sqrt{10} - 5$. 6. $2 < a < 7$. 7. Объем пирамиды $QKMN$, равный
 $\sqrt{77}/12$, меньше, чем объем пирамиды $SABC$, равный $3/4$.

Факультет государственного управления.

1. 15 полных кругов. 2. $(-1)^n(\pi/6) + \pi n$; $(-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{4} + \pi k$ ($n, k \in \mathbb{Z}$).
 3. $13/2$. 4. $(0; 1/(4^{\sqrt{2}})] \cup [4^{\sqrt{2}} - 16 \cdot 4^{1/\sqrt{3}}]$. 5. Количество бензозаправочных
 станций в северном и восточном районах одинаково. 6. $(a; b) = (\frac{t^2}{|t|^2+2}; t)$,
 где $t \neq 0$; $(a; b) = (\frac{t^2}{|t|^2-2}; t)$, где $|t| > 2$. 7. 49 охотников.

Дополнительный набор.

1. 1 000 000 000. 2. πn ; $\pi/2 + 2\pi k$ ($n, k \in \mathbb{Z}$). 3. $(-6, -5)$ и $(4, 5)$; $(4; 15)$
 и $(14; 15)$; $(-16; -5)$ и $(-6; -15)$. 4. $[-2; 0)$. 5. $\frac{1}{3} Q^{\frac{2}{3}} \sqrt{\lg \delta \lg \gamma}$. 6. $(-\frac{4}{5}; \frac{1}{2}) \cup$
 $(\frac{4}{5}; 1]$. 7. $8R^4/S$. 8. 1 и 6; 2 и 7; 3 и 6; 4 и 3; -1 и 2; -2 и 9.

2008 год**Олимпиада «Ломоносов».**

1. -1 . 2. 5. 3. 9 или 49. 4. Нет. 5. 3 или $2\sqrt{3}$. 6. $[\log_{50} 8; \log_{50} 9)$. 7. $\frac{2\pi}{3} + 4\pi n$,
 $n \in \mathbb{Z}$. 8. $3\sqrt{29}$ или $3\sqrt{61}$. 9. 1, ..., 2002. 10. 12 (при $d \in [4, 5; 7]$).

Механико-математический факультет.

1. $(-\infty; -1] \cup \{1\} \cup [2; \infty)$. 2. а) да; б) например, $(\sin 3x - 1)(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$.
 3. $(1, \frac{1}{2})$. 4. а) 6 : 5; б) 13. 5. $f(x) = x^3 - x + 1$. 6. 7.

Химический, географический, биологический, психологии, биоинженерии и биоинформатики, фундаментальной медицины, наук о материалах и физико-химический факультеты.

1. $x = (-1)^{n+1}\pi/4 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $-17/6$. 3. $x = 1/3$. 4. $4\sqrt{2}$. 2. 5. а), в).
 6. $2\sqrt{5}$. 7. $a > 3 + \sqrt{20}$.

Факультеты почвоведения, глобальных процессов и высшая школа современных социальных наук.

1. $[-7/2, -3) \cup (-3, \infty)$. 2. 3,2 км/ч. 3. $-31/17$. 4. $(-\infty, -2] \cup (-2^{-3/2}, 0)$. 5. Да: Гоша. 6. $\sqrt{13}$, $2\sqrt{13}$, $\sqrt{13}$, $2\sqrt{13}$. 7. 4; $\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$.

Социологический факультет.

1. $-6 < x < 0$, $0 < x < 3$. 2. 2. 3. 70° . 4. $x = 9$, $\sqrt{3}$. 5. 30%; 30. 6. $x = 3$, $y \geq -3$; $y = 1$, $x \geq -1$. 7. $\min a = 1/2$, $\max a = 1/\cos(\pi/9)$.

Централизованный экзамен для поступающих на договорные образовательные программы.

1. $x = 0$. 2. $1/2$. 3. 7. 4. $-1/\sqrt{2} \leq x \leq 1/\sqrt{2}$. 5. $0 \leq x < 2$, $x > 8$. 6. 4. 7. Одинаковы. 8. Две; на три равные части. 9. $-4\frac{3}{4} \leq a < 4$.

2009 год

Олимпиада «Ломоносов».

1. 6. 2. 70. 3. $x = a - 1$, $\frac{1}{a-1}$ при $a > 1$, решений нет при $a \leq 1$. 4. да. 5. 2; 6. 6. 1. 7. 13. 8. а) да, б) 72. 9. $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$.

Механико-математический факультет.

- Задачи первой смены.** 1. 1, $\frac{12+\sqrt{331}}{17}$. 2. 77. 3. $\frac{16}{\sqrt{3}}$. 4. 19, 20, 21, 22, 23. 5. б) $x = \pi k/3$, $x = (-1)^{n+1}\pi/6 + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$. 6. $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$.

- Задачи первой смены.** 1. $(-2, 1) \cup (5, 7)$. 2. 1. 3. $38 \sin 40^\circ$. 4. $(11; 2)$ при $c = -2$, нет решений при $c \neq -2$. 5. б) 20. 6. $(5 - 2\sqrt{6}; 8 - 2\sqrt{6}) \cup (5 + 2\sqrt{6}; 8 + 2\sqrt{6})$.

Факультет биоинженерии и биоинформатики.

1. $\{-2\} \cup (3, +\infty)$. 2. $4, 3 + \sqrt{3}$. 3. $(-\infty, 1] \cup \{3\} \cup [7, +\infty)$. 4. $\pm\pi/15 + \pi n/5$. 5. $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. 6. $1/2, 5/2$. 7. (а) 240π , (б) 289π . 8. -1 . 9. $(-1; -7/9]$.

Экзамен, альтернативный ЕГЭ по математике.

1. Второе. 2. $[-5; -2) \cup (-2; 1)$. 3. а) 294, б) на 25%. 4. 7. 5. $[0; 1/2)$. 6. $\pi/4 + \pi n$, $\pi/8 + \pi n$. 7. $(-16; -9] \cup \{-8\} \cup [-7; 0) \cup (0; 9]$. 8. $192\sqrt{3}$. 9. 11837, 111837, 1671837, 18371837.

Централизованный экзамен для поступающих на договорные образовательные программы.

1. Первое. 2. а) -4 ; б) $x \in (-4; 5]$. 3. $x \in (-\infty; -\frac{3}{4}) \cup \{0\} \cup (2; +\infty)$. 4. $20\sqrt{2}$. 5. $x \in (0; 1) \cup (1; 4)$. 6. $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\arctg \frac{3}{2} + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. 7. 140. 8. $\left[\frac{4\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$. 9. $c = 2$, $c > \frac{7}{3}$.

2010 год

Олимпиада «Ломоносов».

1. $-1 \leq x \leq 3$. 2. $\frac{6}{25}$. 3. 8 млн р. 4. $-4 < x \leq -3 + 2\sqrt{\sqrt{5}-2}$. 5. 54, 72, 96 и 128. 6. $y = \frac{1}{25x^2} + 2$ при $-\frac{1}{5} \leq x < 0$. 7. $a < 13\sqrt{5} - 5$. 8. 4. 9. а) Да, б) нет.

10. 12.

Механико-математический факультет. 1. $x = 2, y = 3$. 2. $[\frac{2}{3}, \frac{4}{5})$. 3. $\frac{12}{7}$. 4. $\frac{25}{4}$. 5. 80 м. 6. $\sqrt{6}/2$.

Факультет биоинженерии и биоинформатики, факультет наук о материалах.

1. 5. 2. $(-6, -1), (\frac{-7+3\sqrt{5}}{2}, \frac{-7+3\sqrt{5}}{2})$. 3. а) $\arctg 4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $120 \arctg 4 + 7140\pi < 23040$. 4. $2\sqrt{6}, 2\sqrt{6}, -2\sqrt{6}, -2\sqrt{6}, R = \frac{35}{\sqrt{6}}$. 5. $[\arccos \frac{1}{4}; \frac{\pi}{2}] \cup [2; \frac{3\pi}{2}] \cup [-\arccos \frac{1}{4} + 2\pi n; \arccos \frac{1}{4} + 2\pi n] \cup [\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k], n, k \in \mathbb{Z}, n \geq 1, k \geq 1$. 6. $(-\infty; -\frac{1-\sqrt{13}}{2}) \cup (-1; +\infty)$.

Факультет государственного управления, социологический факультет, высшая школа современных социальных наук.

1. -6. 2. 5 часов. 3. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{4\sqrt{2}}{7}$. 4. $(1, 3]$. 5. $\frac{14}{5}$. 6. -5 и $\sqrt[3]{3}$.

Экзамен, альтернативный ЕГЭ по математике.

1. $\frac{1}{2552}$. 2. $-4 \leq x < -1, x \geq 1$. 3. 25%. 4. 2. 5. $\frac{2\pi}{3}$. 6. $-\log_3 2 \leq x \leq 1$. 7. 6. 8. $\frac{\pi}{2} + \pi n, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 9. $2\sqrt{6}$. 10. $2\frac{2}{3}$ часа; 11. 16; 12. $(1, 3), (3, 5)$.

Централизованный экзамен для поступающих на договорные образовательные программы.

1. $-\frac{3}{2}$. 2. 5. 3. $\frac{3\pi}{4}$. 4. $(\log_2 3 - 1; 1]$. 5. $\frac{3}{5}$. 6. $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

Экзамен по математике, альтернативный ЕГЭ, для иностранных граждан (выпускников ЦМО МГУ).

1. $-1 < x < 2, x \geq 8$. 2. 125 рублей. 3. -4. 4. $2\sqrt{2}$. 5. $3/2$. 6. 7. 7. $4/5$. 8. $2\sqrt{2}$. 9. $\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 10. $(0, 0), (3, 1), (-\frac{1}{5}, -\frac{3}{5})$. 11. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 12. $0 < x \leq 2$.

2011 год

Олимпиада «Ломоносов».

1. 12. 2. 4. 3. $7\sqrt{2}$. 4. $(\frac{-1-\sqrt{2}}{5}; -\frac{2}{5}) \cup (\frac{-1+\sqrt{2}}{5}; \infty)$. 5. $BL = 25$. 6. $a = -6, b = -1, c = -4$. 7. 13. 8. 17π.

Дополнительное вступительное испытание по математике.

1. $\frac{3}{200}$. 2. $\frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$. 3. $\frac{14}{9}$. 4. $[-\frac{3}{5}; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{3}; +\infty)$. 5. 1. 6. $\frac{4}{3}, x = \frac{1}{\log_2 3 - 1}$. 7. 1. 8. $x = \frac{5}{9}, y = \frac{1}{9}$.

2012 год

Олимпиада «Ломоносов».

1. 0. 2. 5. 3. Нет. 4. $0 < a \leq 8$. 5. $2 \arccos \frac{1}{8} = \arccos(-\frac{31}{32})$. 6. $[0; 9]$. 7. 120. 8. 28.

Дополнительное вступительное испытание по математике.

1. $2, 1x^2 - 2, 3x - 2 = 0$. 2. -2. 3. $[\log_2 2; \log_2 7] \cup \{2\}$. 4. $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $(-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$. 5. 6. 6. $\sqrt{10}$. 7. $(-\infty; \sqrt{3}] \cup (\sqrt{7}; +\infty)$; 8. $\frac{5\sqrt{15}}{6}$.

2013 год

Олимпиада «Ломоносов».

1. На 110 %. 2. $x = \pm \frac{5\pi}{12} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. 3. $\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}; \sqrt{2} - 2\right) \cup [2; 3)$. 4. $\frac{126\sqrt{6}}{125}$.
 5. $x \in \left[-a; -\frac{26a}{17}\right]$ при $a < 0$, $x \in \left[-\frac{26a}{17}; -a\right]$ при $a > 0$. 6. 12. 7. 2 раза.
 8. 5 : 11 или 1 : 19.

Дополнительное вступительное испытание по математике.

1. $\frac{3}{5}$. 2. $\frac{1}{2}$. 3. $[0; 1]$. 4. $\frac{k\pi}{8}, \frac{n\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}, k \not\equiv 4, n \in \mathbb{Z}, n \not\equiv 3$. 5. 2 км. 6. 7.
 7. $\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{-1}$. 8. $a \neq 0$.

2014 год

Олимпиада «Ломоносов».

1. $-\frac{1}{2}$. 2. 10 070. 3. $2 \arctg \frac{1}{2} \left(= \arctg \frac{4}{3}\right)$. 4. $a = -\frac{1}{2013}, b = \log_{2014} 2013$.
 5. $\pi n < \alpha < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. 6. 120 тыс. руб. 7. $\frac{12\pi}{5}$. 8. 450.

Дополнительное вступительное испытание по математике.

1. 4. 2. -3. 3. $(0; 1) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$. 4. $\frac{7\pi}{8} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 5. 1 : 1. 6. $x = 4, y = 8$.
 7. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. 8. $[-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]$.

2015 год

Олимпиада «Ломоносов».

1. 76. 2. $\frac{\pi}{3}$. 3. 2. 4. $1 + \sqrt{2}$. 5. $2\sqrt{7}$. 6. Только $a = \frac{3}{2}$. 7. $5\sqrt{23}$. 8. а) 17; б) 09.

Дополнительное вступительное испытание по математике.

1. 2. 2. 39. 3. $\left[-\frac{5\pi}{12} + 2\pi n, \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{11\pi}{12} + 2\pi n, \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$. 4. $\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2}$. 5. $\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$. 6. 1 км. 7. $\frac{13}{6}$. 8. $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n (n \in \mathbb{Z}), \beta = 0$.

2016 год

Олимпиада «Ломоносов».

1. 1200. 2. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 3. В 3 раза. 4. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. 5. $\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right] \cup \{3\}$. 6. 99. 7. 72. 8. 672.

Дополнительное вступительное испытание по математике.

1. $\frac{29}{35}$. 2. ± 1 . 3. $\frac{\pi}{4} + k\pi, \arctg 5 + n\pi, k, n \in \mathbb{Z}$. 4. $\left(0; \frac{1}{3}\right] \cup (1; 3)$. 5. $8\sqrt{2}$. 6. В 12:00. 7. 50. 8. $9\sqrt{5}, a = 2, x = \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Список использованной литературы

1. *Б.И.Александров, В.М.Максимов, М.В.Лурье, А.В.Колесниченко.* Пособие по математике для поступающих в ВУЗы. Москва, изд-во МГУ, 1972.
2. *Г.В.Дорофеев, М.К.Потапов, Н.Х.Розов.* Пособие по математике для поступающих в ВУЗы. Москва, изд-во «Наука», 1972.
3. *Н.К.Егеров, В.В.Зайцев, Б.А.Кордемский, Т.Н.Маслова, И.Ф.Орловская, Р.И.Позойский, Г.С.Рябовская, Н.М.Федорова* — под общей редакцией *М.И. Сканави.* Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы. Минск, изд-во «Высшая школа», 1990.
4. *Ю.В.Нестеренко, С.Н.Олехник, М.К.Потапов.* Задачи вступительных экзаменов по математике. Москва, изд-во «Наука», 1983.
5. *Д.О.Шклярский, Н.Н.Ченцов, И.М.Яглом.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. Москва, изд-во «Наука», 1976.
6. *Г.С.М.Коксетер, С.Л.Грейтцер.* Новые встречи с геометрией. Москва, изд-во «Наука», 1978.
7. *И.И.Мельников, И.Н.Сергеев.* Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах. Москва, изд-во МГУ, 1990.
8. *Г.А.Гальперин, А.К.Толпыго.* Московские математические олимпиады. Москва, изд-во «Просвещение», 1986.
9. *Д.Пойа.* Математическое открытие. Москва, изд-во «Наука», 1976.
10. *Н.Б.Васильев, А.А.Егоров.* Задачи всесоюзных математических олимпиад. Москва, «Наука», 1988.
11. *И.Ф.Шарыгин.* Задачи по геометрии. Стереометрия. Библиотечка «Квант». Москва, «Наука», 1984.
12. *В.В.Прасолов.* Задачи по планиметрии. Часть 1. Москва, «Наука», 1991.
13. *В.М.Клопский, З.А.Скопец, М.И.Ягловский.* Геометрия. 9–10 классы. Москва, «Просвещение», 1982.
14. *В.В.Вавилов, И.И.Мельников, С.Н.Олехник, П.И.Пасиченко.* Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Москва, «Наука», 1987.
15. *В.В.Вавилов, И.И.Мельников, С.Н.Олехник, П.И.Пасиченко.* Задачи по математике. Алгебра. Москва, «Наука», 1987.
16. *С.Н.Олехник, М.К.Потапов, П.И.Пасиченко.* Нестандартные методы решения уравнений и неравенств. Москва, Изд-во МГУ, 1991.
17. *Варианты вступительных экзаменов по математике за 1983–1991 годы на все факультеты МГУ с ответами, указаниями, решениями.* Москва, Изд-во предприятия «Патент», 1992.
18. *Московский университет.* Справочник для поступающих. 1970–1992 годы. Москва, изд-во МГУ, 1970–1992.
19. *В.В.Прасолов, И.Ф.Шарыгин.* Задачи по стереометрии. Москва, «Наука», 1989.
20. *Д.О.Шклярский, Н.Н.Ченцов, И.М.Яглом.* Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. Москва, «Наука», 1974.

21. Математика. Задачи вступительных экзаменов в МГУ им. М.В. Ломоносова с ответами и решениями (1999-2004 гг.) / Сост. Е.А. Григорьев. М.: УНЦ ДО, 2005.
22. Задачи вступительных экзаменов по математике (2005, 2006, 2007) / Под общ. ред. Е.А. Григорьева. М.: МГУ, 2005, 2006, 2007.
23. Олимпиады и вступительные экзамены по математике (2008, 2009) / Под общ. ред. Е.А. Григорьева. М.: МГУ, 2008, 2009.